Publicacions Matemàtiques, Vol 32 (1988), 57-59.

EXISTENCIA DE INYECTORES EN GRUPOS FINITOS RESPECTO DE CIERTAS CLASES DE FITTING

M.J. IRANZO Y F. PÉREZ MONASOR

Abstract

In this paper we prove that all finite groups have F-injectors with respect to a saturated and extensible Fitting formation F.

Todos los grupos considerados en este trabajo son finitos. Las componentes de un grupo son sus subgrupos subnormales cuasisimples. El producto de todas las componentes de un grupo G es el radical semisimple de G, denotado $E(G)$. Las propiedades de las componentes de un grupo pueden encontrarse en ([**2**, X.13]).

Para las definiciones y primeras propiedades sobre clases de Fitting e inyectores ver [**1**].

Denotamos por N, N^*, S, E_π las clases de los grupos nilpotentes, cuasinilpotentes, resolubles, π-grupos, siendo π un conjunto de números primos.

En 1985 encontramos un test para la obtención de F-inyectores en cualquier grupo finito. Dicho test es en esencia el siguiente:

1. Existencia de F-inyectores de $E(G)$.
2. Sea I un F-inyector de $E(G)$. Si J es un F-inyector de $N_G(I)$, entonces J es un F-inyector de G.
3. Si G es F-constricto, $(N_G(I) = G)$, entonces G posee F- inyectores.

La eficacia de dicho test fue comprobada para el caso en que $N \subseteq F \subseteq N^*$, siendo F una clase de Fitting cerrada para cocientes centrales y extensiones centrales. ([4]). Asimismo cuando $F = \{G \mid E(G/O_{\pi'}(G)) \in H, H$ clase de Fitting, $\pi = car\ H\}$ ([5]).

El motivo de este trabajo es probar que si F es una formación de Fitting saturada y extensible, todo grupo finito admite F-inyectores. En este caso la última fase del test no parece utilizable de forma inmediata, puesto que no es conocido que todo grupo F-constricto tenga F-inyectores. Por ello ha sido necesario modificar algo la técnica de la demostración.

To B. Huppert on his sixtieth birthday.

Lema 1. *Sea F un homomorfo de Fitting. Si G es producto directo de grupos simples no abelianos G_i, $i = 1, \dots, n$, entonces G posee F-inyectores que son exactamente los productos de los subgrupos F-maximales de los factores.*

Demostración: Vale la misma que la del lema 1 de [4]. ■

En lo que sigue y siempre que no se manifieste lo contrario, F será una formación de Fitting saturada.

Lema 2. *Un grupo G posee F-inyectores si y solo si los posee $G/Z(G)$.*

Demostración: Simple comprobación. ■

Corolario 1. *Dado un grupo cualquiera G, $E(G)$ posee F-inyectores.*

Demostración: Basta tener en cuenta que $E(G)/Z(E(G))$ es producto directo de grupos simples no abelianos y aplicar los dos lemas anteriores. ■

Corolario 2. *Sea $G = G_1 G_2$ donde G_i es semisimple $i = 1, 2$ y $[G_1, G_2] = 1$. Si J es un F-inyector de G, entonces $J = (J \cap G_1)(J \cap G_2)$.*

Demostración: Vale una demostración análoga a la del Corolario 2 de [4]. ■

Notas.

1. Evidentemente los F-inyectores de una componente de G son sus subgrupos F-maximales.

2. En virtud de los resultados anteriores, los F-inyectores de $E(G)$ son exactamente los productos de los F-inyectores de sus componentes.

Teorema. *Sea F una formación de Fitting saturada y extensible, entonces todo grupo posee F-inyectores.*

Demostración: En la demostración del teorema por inducción, suponemos que la afirmación vale para todos los grupos de orden menor que el orden de un grupo dado G. Puesto que es fácil comprobar que si $G/O_{\pi'}(G)$ posee F-inyectores entonces G posee F-inyectores, siendo $\pi = car\ F$, podemos suponer que $O_{\pi'}(G) = 1$. Sea I un F-inyector de $E(G)$. Si $N_G(I) < G$, entonces por hipótesis de inducción $N_G(I)$ posee F-inyectores, sea J uno de ellos. Veamos que J es F-inyector de G. Sea $N \trianglelefteq\trianglelefteq G$ y $J \cap N \leq W \leq N$ con $W \in F$. Denotemos con L_1 el producto de las componentes de G contenidas en N y L_2 el producto de las componentes fuera de N. Entonces $E(G)$ es producto central de L_1 por L_2 y por el corolario 2, $I = (I \cap L_1)(I \cap L_2)$. Además $W \cap L_1 \trianglelefteq W$ luego $W \cap L_1 \in F$ y como $I \cap L_1 \leq J \cap L_1 \leq W \cap L_1$ y por el carácter F-maximal de $I \cap L_1$ en L_1 se sigue $I \cap L_1 = W \cap L_1$ asi W normaliza a $I \cap L_1$ y centraliza a $I \cap L_2$, luego W normaliza a I. Ahora tenemos $J \cap N_N(I) \leq J \cap N \leq W \leq N_N(I)$. Además $N_N(I)$ es subnormal en $N_G(I)$ luego $J \cap N_N(I)$ es F-maximal en $N_N(I)$, luego $J \cap N = W$, lo que prueba que J es un F-inyector de G.

Podemos suponer por tanto que $N_G(I) = G$. Entonces $E(G) = IR$ con $[I, R] = 1$, R semisimple, así $I \cap R \leq Z(R)$ y como $O_{\pi'}(G) = 1, Z(R)$ es π-grupo luego F-grupo. Dado que $I \cap R$ es F-inyector de R se deduce que $I \cap R = Z(R)$. Por el lema 2 se sigue ahora que 1 es F-inyector de $R/Z(R)$ deduciéndose que éste no posee π-elementos y en consecuencia es un π'-grupo y como $O_{\pi'}(G) = 1$ y R es semisimple se sigue $R = Z(R) = 1$. Asi $E(G) \in F$, es decir G es F-constricto [**3**]. Entonces los normales minimales de G son F-grupos. Sea N uno de ellos. Como $|G/N| < |G|$, por inducción G/N posee F-inyectores. Sea S/N uno de ellos, entonces $S \in F$. Supongamos que $G^* \trianglelefteq\trianglelefteq G$ y $G^* \cap S \leq W \leq G^*$ con $W \in F$, entonces $(S \cap G^*)N/N \leq WN/N \leq G^*N/N$ y $WN/N \in F$, luego como $S/N \cap G^*N/N$ es F-maximal en G^*N/N se sigue: $(S \cap G^*)N = WN \leq S$ y por tanto $W = S \cap G^*$.

Notas.

1. Cada grupo no resoluble posee al menos dos clases de conjugación de S-inyectores.

2. Observar que no se obtiene un resultado análogo para la clase E_π, es decir un grupo con una única clase de conjugación de E_π-inyectores no es necesariamente un π-grupo. Basta considerar $\pi = \{p\}$ y aplicar teoría de Sylow.

Bibliografía

1. K. DOERK, T. HAWKES, Finite Soluble Groups, *Preprint.*
2. B. HUPPERT, N. BLACKBURN, Finite Groups III, "*Springer-Verlag, Berlin,*" 1982.
3. M.J. IRANZO, F. PÉREZ MONASOR, F-constraint with respect to a Fitting, class, *Arch. Math.* **46** (1986), 205–210.
4. M.J. IRANZO, Fitting classes F such that all Finite Groups have F--injectors, *Israel J. Math.* **56** (1986), 97–101.
5. M.J. IRANZO, On the existence of certain injectors in Finite Groups, *Communications in Algebra.*

Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad de Valencia
C/ Doctor Moliner s/n. Burjasot
(Valencia), SPAIN.

Rebut el 19 d'Agost de 1986