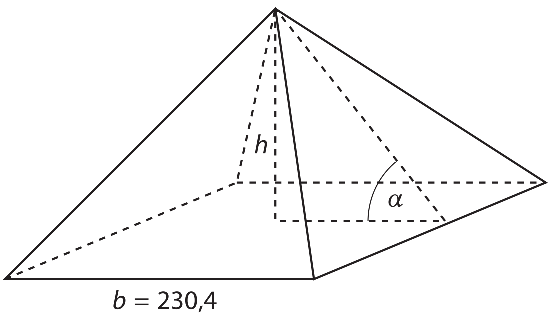
L'origami dels poliedres platònics

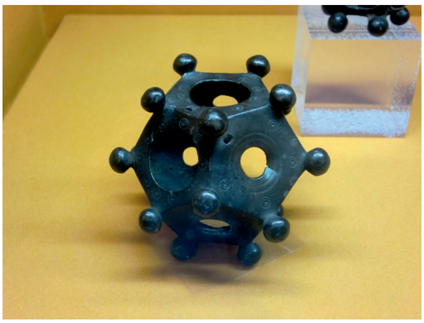
Jaume Coll Guerrero

CFA Rafael Farré (Molins de Rei)
Professor associat Departament de Matemàtiques (UAB)

1. Els humans i els poliedres

Fa milers d'anys que els humans coneixen els poliedres. Un dels exemples més antics, enigmàtic i emotiu, és la gran piràmide de Kheops, segon faraó de la IV dinastia egípcia. Aquesta construcció faraònica està situada a la planura de Gizeh, avui dia al costat de la ciutat del Caire o Al-Qahira (La Victoriosa). Essent la més gran de totes les piràmides egípcies té una alçada de $h = 146{,}6$ m i el costat de la base fa $b = 230{,}4$ m de longitud, d'on podem deduir que la seva inclinació té un valor numèric que es pot aproximar per l'arrel quadrada del nombre auri $m = \tan(\alpha) \approx \sqrt{\phi}$, amb un error relatiu del 0,04%, o també un valor aproximat de $m = \tan(\alpha) \approx \sqrt[12]{18}$, amb un error relatiu del 0,01%. En la resta de les piràmides de l'antic Egipte no es donen aquestes aproximacions numèriques i, per tant, cal esperar que aquestes i d'altres aproximacions expressades amb funcions senzilles siguin casualitats numèriques.

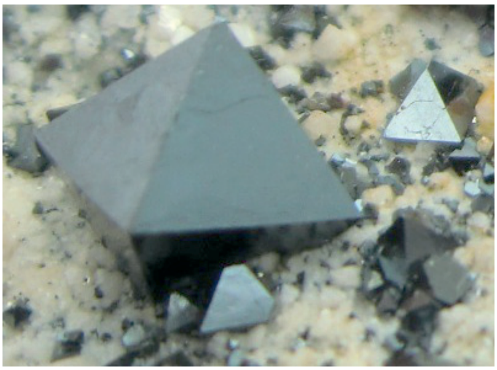




Altres poliedres força enigmàtics es poden veure en el Musée gallo-romain de la ciutat francesa de Lió. A més de daus i compassos de l'època romana, aquest museu té dos dodecaedres de bronze datats al voltant dels segles II i III de la nostra era. En les seves 12 cares foradades per cercles de diferents mides es poden veure algunes marques circulars, i en cadascun dels seus 20 vèrtexs que connecten les 30 arestes hi ha unes petites esferes. Avui dia es coneixen més de 100 d'aquests dodecaedres, la majoria trobats a França, i un únic icosaedre al Rheinisches Landesmuseum de Bonn. Encara no es coneix quina era la utilitat d'aquests objectes perquè no s'han trobat referències històriques documentades.

Com han arribat els humans a conèixer figures geomètriques tan regulars? Una part de la resposta és que observessin aquestes formes geomètriques a la natura. Molts minerals cristal·litzen macroscòpicament en diferents tipus de poliedres força regulars. Aquest procés natural es produeix a l'escorça de la terra des de milions d'anys abans de l'aparició dels humans. Així tenim que la pirita cristal·litza en cubs, octaedres i dodecaedres, i la fluorita i la magnetita en octaedres gairebé perfectes per a l'ull humà. Aquests són tres exemples de poliedres en què totes les cares són polígons regulars iguals i en tots els vèrtexs conflueixen el mateix nombre de cares. Aquests poliedres s'anomenen poliedres regulars o sòlids platònics en honor de Plató, que els menciona en el *Timeu*: «El foc està format per tetraedres; l'aire, d'octaedres; l'aigua, d'icosaedres; la terra, de cubs; com que encara és possible una cinquena forma, Déu ha utilitzat aquesta, el dodecaedre pentagonal, perquè serveixi de límit al món».

La pirita també pot cristal·litzar en forma de cuboctaedre, que és un poliedre semiregular o arquimedià format per 6 quadrats i 8 hexàgons regulars. Un darrer exemple és el granat, que pot cristal·litzar com a dodecaedre ròmbic, que és un dels 13 poliedres de Catalan.



Magnetita, octaedre sòlid platònic.

Granat, dodecaedre ròmbic sòlid de Catalan.

2. Per què cinc sòlids platònics?

Els poliedres estan formats per elements de dimensió 2 (les cares C), de dimensió 1 (les arestes A) i de dimensió zero (els vèrtexs V). Per a qualsevol poliedre homeomorf a l'esfera, aquests elements estan relacionats per la fórmula d'Euler:

$$C + V = A + 2 \qquad (1)$$

Leonhard Euler (Basilea, 1707-Sant Petersburg, 1783) va proposar aquesta igualtat en una carta escrita a Berlín amb data 14 de novembre de 1750 i dirigida al seu amic Christian Golbach, que vivia a Sant Petersburg. Podeu visitar la tomba d'Euler a l'ala esquerra del cementiri del monestir ortodox Alexandre Nevski d'aquesta antiga capital russa. La primera demostració rigorosa de la fórmula d'Euler no fou donada fins al 1847 per Karl Von Staudt.

Aquesta equació diofàntica lineal (1) té infinites solucions, però no totes es corresponen a un poliedre; per exemple, no existeix cap poliedre amb els valors $C = V = A = 2$, tot i que aquests valors compleixen la relació d'Euler $2+2 = 2+2$. Per demostrar que tan sols existeixen 5 sòlids platònics imposarem condicions de regularitat a aquesta fórmula. Naturalment, cada aresta està limitada per dos vèrtexs. A cada aresta conflueixen dues cares, i dues cares comparteixen com a molt una única aresta. Com que el poliedre és regular, totes les cares que el formen són polígons regulars amb n arestes i n vèrtexs; a més, a cada vèrtex del poliedre conflueixen m cares i m arestes. Evidentment, $n \geq 3$ i $m \geq 3$. Aquesta informació ens permet obtenir relacions entre el nombre de cares C, el nombre d'arestes A i el nombre de vèrtexs V:

$$A = \frac{nC}{2}, \quad V = \frac{nC}{m}, \quad V = \frac{2A}{m} \tag{2}$$

Substituint aquestes expressions en la fórmula d'Euler (1) obtenim els valors $C,A,V \in \mathbb{N}$ en funció dels paràmetres naturals $n,m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C + \frac{nC}{m} = \frac{nC}{2} + 2 &\implies C = \frac{4m}{2n+2m-nm} \\ \frac{2A}{n} + \frac{2A}{m} = A + 2 &\implies A = \frac{2nm}{2n+2m-nm} \\ \frac{mV}{n} + V = \frac{mV}{2} + 2 &\implies V = \frac{4n}{2n+2m-nm} \end{aligned} \tag{3}$$

Ara cal resoldre aquestes tres noves equacions diofàntiques algebraiques. Primer de tot veurem que un dels paràmetres val tres: $n = 3$ o bé $m = 3$. En efecte, és evident que el denominador d'aquestes expressions és positiu:

$$2n + 2m - nm > 0 \implies \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} \tag{4}$$

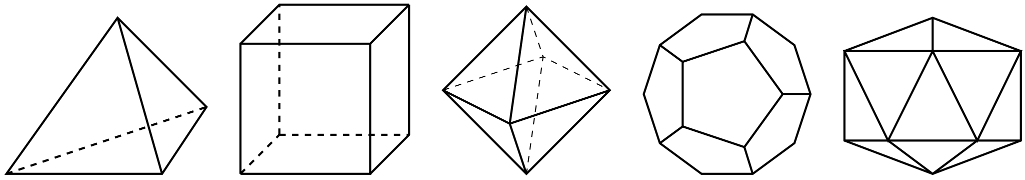
Si els dos paràmetres són diferents de 3, aleshores $n \geq 4$ i $m \geq 4$, i obtenim la següent contradicció:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

Si $n = 3$, de la desigualtat (4) deduïm que $m \leq 5$, i per simetria de les variables n,m en la mateixa desigualtat (4) tenim que $n \leq 5$ si $m = 3$. Així doncs, tenim 5 possibilitats, i amb les expressions (3) podem deduir el nombre de cares, arestes i vèrtexs.

n	m	C	A	V	
3	5	20	30	12	Icosaedre
3	4	8	12	6	Octaedre
3	3	4	6	4	Tetraedre
4	3	6	12	8	Cub
5	3	12	30	20	Dodecaedre

Observem que el nombre d'arestes sempre és un múltiple de 6 i que el nombre de cares i de vèrtexs és parell.



3. Què és la papiroflèxia?

Aquesta mateixa pregunta es devien fer l'any 1938 els lectors del llibre *Papirolas. Tratado de papiroflexia*, publicat a l'Argentina per l'odontòleg burgalès Vicente Solórzano Sagredo. Sembla ser que aquesta és la primera publicació en què apareix la paraula *papiroflèxia*. De fet, en el títol d'aquest llibre apareixen dues paraules creades pel doctor Solórzano:

- *papirola*: figura que se hace doblando una y otra vez una hoja de papel.
- *papiroflexia*: es el arte geométrico de hacer plegados para las papirolas.

Aquestes dues paraules, així com *papirofléxico*, no van ser incloses al diccionari de la RAE fins a l'any 1986, tot i que sí que apareixien en altres diccionaris. El doctor Solórzano també va fundar l'any 1954 el Museo de Papiroflexia a la ciutat de Buenos Aires. Posteriorment, l'any 1961, aquesta col·lecció es va traslladar a Valladolid, on un dels seus companys d'estudis, Nemesio Montero Pérez, la va dipositar en el museu de ciències naturals d'aquesta ciutat. Amb els anys i després d'algunes gestions amb les germanes del doctor Montero, les figures d'aquesta col·lecció van ser cedides a l'Asociación Española de Papiroflexia (AEP), a la seu de la qual es conserven actualment en dos grans baguls, pendents d'estudi i catalogació.

Trenta-sis anys abans de la publicació del llibre del doctor Solórzano, quan encara no existia la paraula *papiroflèxia*, l'escriptor i filòsof Miguel de Unamuno va publicar un apèndix al llibre *Amor y Pedagogía* amb el títol *Apuntes para un tratado de Cocotología*; en aquest apèndix podem llegir el següent:

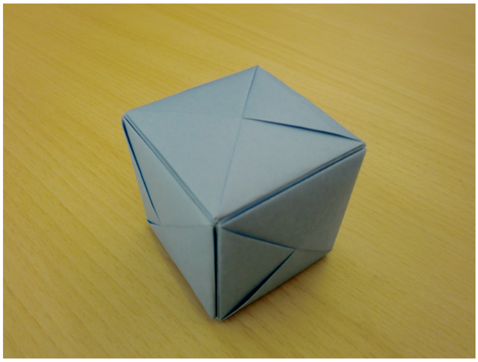
> La palabra cocotología se compone de dos, de la francesa *cocotte*, pajarita de papel, y de la griega *logia*, de *logos*, tratado. La palabra francesa *cocotte* es una palabra infantil y que se aplica en su sentido primitivo y recto a los pollos y por extensión a las aves. En sentido traslaticio, a las pajaritas de papel y a las mozas de vida alegre.

Poques llengües del món tenen una paraula pròpia equivalent a *papiroflèxia*. Trobem la paraula *paperfolding* en anglès, *papierfalten* en alemany i *origami* en japonès (de *oru*, plegar, i *kami*, paper). Aquesta darrera paraula és la que s'utilitza en la majoria de llengües del món per designar aquest art de plegar el paper.

La paraula oriflèxia, amb accent obert a la e*, que és el títol d'aquesta secció, no té cap significat, senzillament és la contracció de la paraula oriental* origami *i de l'occidental* papiroflèxia.

Avui dia no és clar que la papiroflèxia s'originés al Japó. D'aquest país, a més d'imposar-se la paraula *origami* en les altres llegües del món, es coneix el llibre més antic dedicat íntegrament a la papiroflèxia. És un anònim de 1797 que porta per títol *Hiden Senbazuru Orikata* i que podríem traduir per *El secret del plegat de les 1000 grues*, on es descriuen les construccions de diferents tipus de grues de paper. Del Japó també es coneix documentalment un cub de paper anomenat Tamatebako o cofre del tresor, publicat l'any 1734 per Hayato Ohoka en el llibre *Ranma Zushiki*.

Caixa de Catherine de Clèves.



Tamatebako.

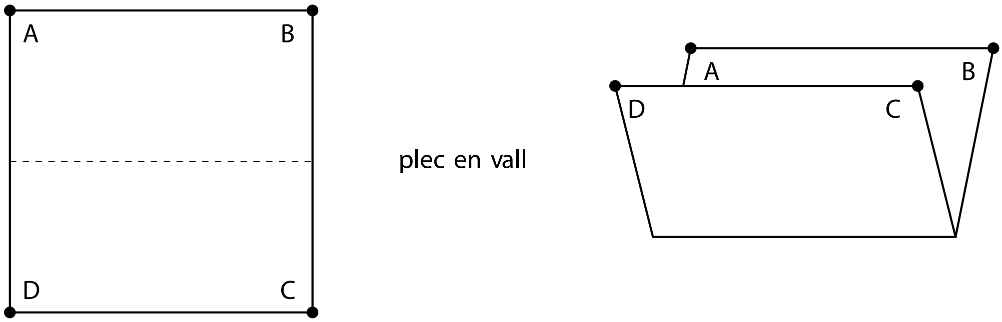
A Occident la figura d'origami documentada més antiga que es coneix és la caixa del *Llibre de les Hores* de Catherine de Clèves (s. XV). Uns 500 anys més tard podem trobar la descripció de la seva construcció en la figura número 6 del llibre anònim *Una hoja de papel*, publicat per l'Editorial Salvatella. Vicente Palacios Garrido, expresident de la AEP i actualment resident a Barcelona, va esbrinar que aquest llibre fou escrit per Lorenzo Sainz Herrera. Molt probablement Lorenzo Sainz no coneixia el *Llibre de les Hores* de Catherine de Clèves i, per tant, cal esperar que aquesta caixa i d'altres figures tradicionals i molt populars que apareixen en el mateix llibre, com l'*ocellet* (*pajarita* en castellà, *cocotte* en francès), s'hagin transmès per tradició oral al llarg dels segles.

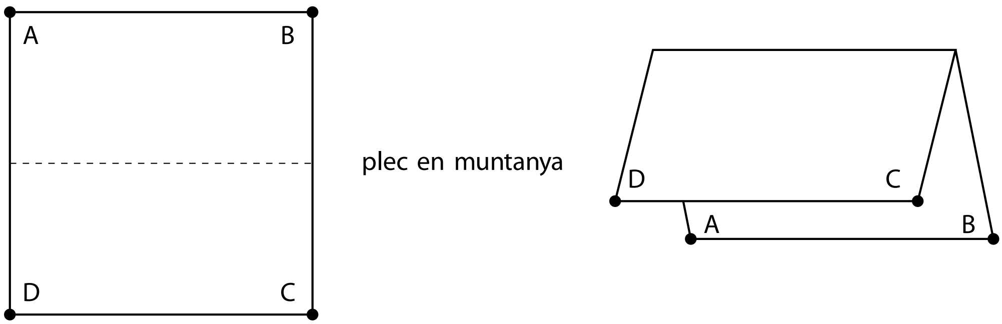
A més de la papiroflèxia clàssica, en què es construeix una figura a partir d'un únic paper, que normalment és un full DIN A4 o un paper quadrat, avui dia existeixen diferents branques de la papiroflèxia, com la papiroflèxia modular, en què es construeixen figures de paper unint diferents cops un mateix mòdul, o la papiroflèxia cinètica, en què es construeixen figures de paper amb moviment. En el següent apartat veurem com podem construir amb paper els 5 sòlids platònics amb tècniques modulars.

4. Mòduls aresta

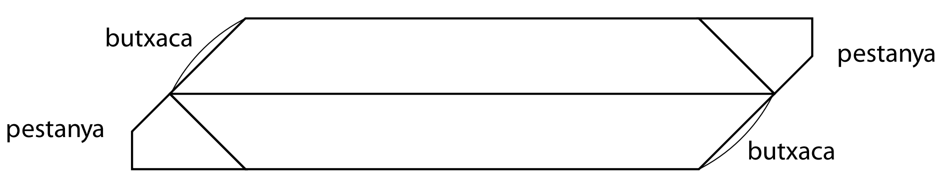
Per fer poliedres de paper amb tècniques de papiroflèxia modular es poden utilitzar mòduls de tipus cara, mòduls de tipus vèrtex o mòduls de tipus aresta. El més conegut i popular és el mòdul de Mitsunobu Sonobe, publicat el 1968 al magazine 2 del Sosaku Origami Group 67; unint 6 d'aquests mòduls de tipus cara es pot fer un cub. Un mòdul molt versàtil i resistent de tipus aresta és el Kantenmodul (2002) de l'alemanya Carmen Sprung; amb aquest mòdul es poden construir molts poliedres, com per exemple la família dels 8 deltaedres, en particular el tetraedre, l'octaedre i l'icosaedre. També cal destacar els mòduls aresta de 120 graus, 135 graus (1987) i 144 graus (2013) de l'origamista de Singapur Francis Ow, que permeten fer els 13 poliedres arquimedians. Els mòduls aresta de 60, 90 i 105 graus que es descriuen a continuació són modificacions dels mòduls 120 i 135 de Francis Ow i del Kantenmodul de Carmen Sprung. Aquests tres darrers mòduls aresta es fan a partir d'un paper quadrat; jo he optat per utilitzar com a paper inicial un full DIN A5, és a dir, la meitat d'un DIN A4. De fet, la construcció d'aquests mòduls es pot fer amb qualsevol format de paper de tipus DIN o adaptar-la a altres tipus de paper amb format rectangular.

Per fer els mòduls utilitzarem els següents plecs bàsics de l'origami:



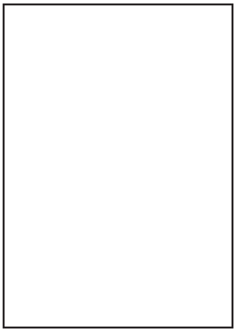


Els mòduls aresta que es descriuen a continuació tenen en cada extrem una pestanya i una butxaca; la unió de dos mòduls es fa introduint una pestanya del primer mòdul en una butxaca del segon mòdul.



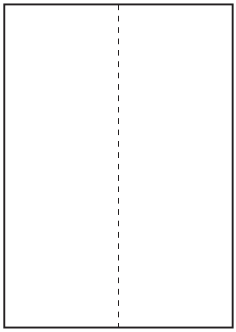
4.1. Mòdul aresta de 60 graus

Pas 1



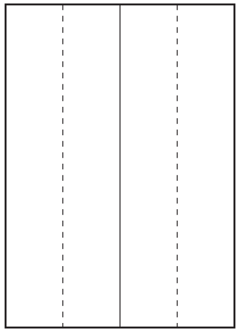
Comenceu amb un full de mida DIN A5.

Pas 2



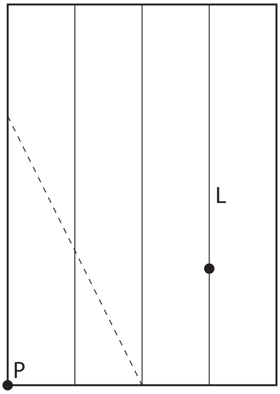
Plegueu i desplegueu en vall per la meitat.

Pas 3



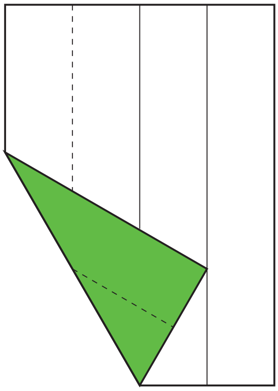
Plegueu i desplegueu en vall per la quarta part.

Pas 4



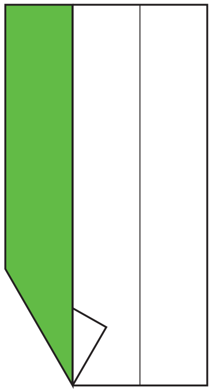
Plec en vall.
Porteu el punt P al costat L.

Pas 5



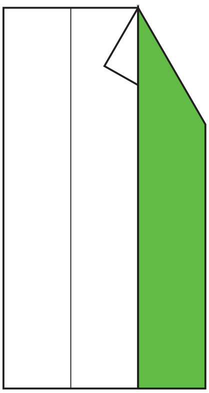
Plegueu en vall i aixafeu.

Pas 6



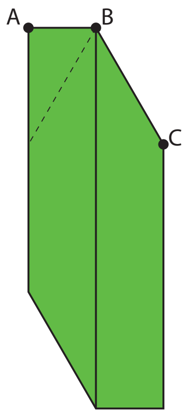
Roteu el paper 180 graus.

Pas 7



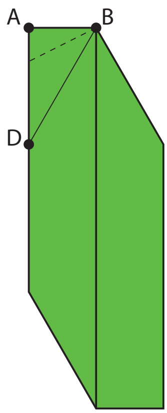
Repetiu els passos 4-6.

Pas 8



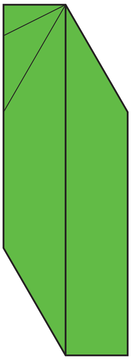
Plegueu i desplegueu en vall la bisectriu de l'angle $\angle ABC$. Porteu el costat superior *AB* al costat lateral *BC*.

Pas 9



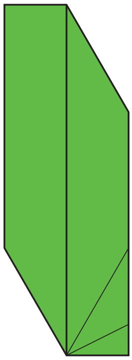
Plegueu i desplegueu en vall la bisectriu de l'angle $\angle ABD$. Porteu el costat superior *AB* al costat lateral *BD*.

Pas 10



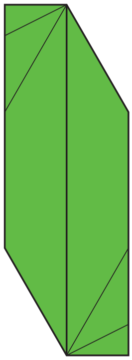
Roteu el paper
180 graus.

Pas 11



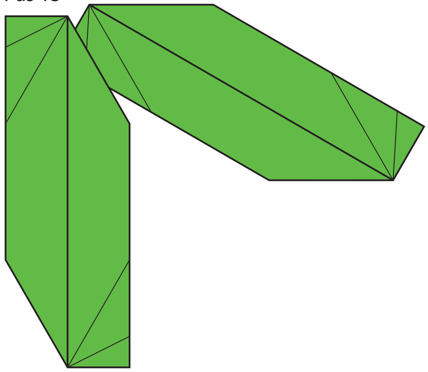
Repetiu els passos
8 i 9.

Pas 12



Mòdul final.

Pas 13



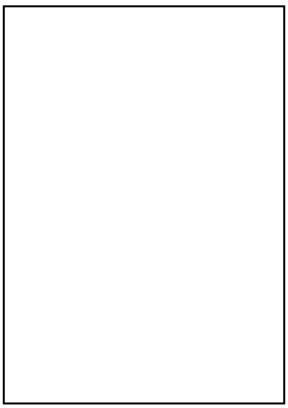
Unió de dos mòduls.

Amb aquest mòdul es poden construir els tres sòlids platònics formats per triangles:

tetraedre (6 mòduls), octaedre (12 mòduls) i icosaedre (30 mòduls).

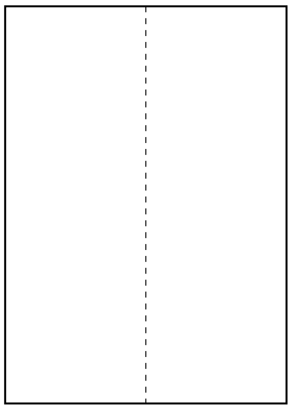
4.2. Mòdul aresta de 90 graus

Pas 1



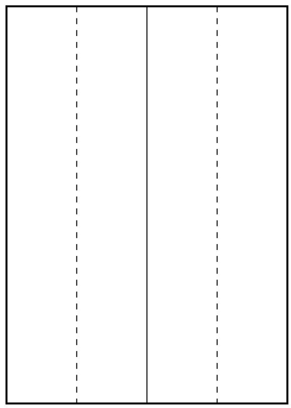
Comenceu amb un full
de mida DIN A5.

Pas 2



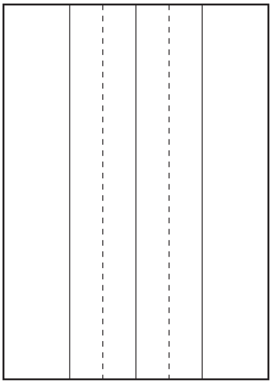
Plegueu i desplegueu en vall
per la meitat.

Pas 3



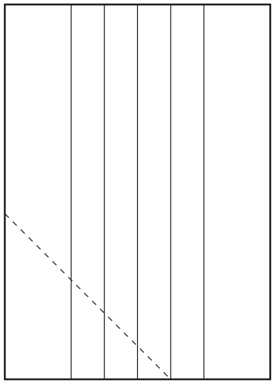
Plegueu i desplegueu en vall
per la quarta part.

Pas 4



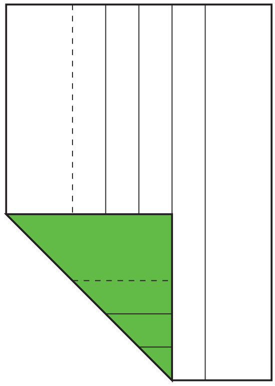
Plegueu i desplegueu en vall.

Pas 5



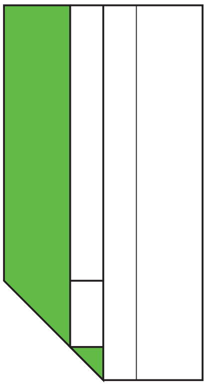
Plegueu en vall.

Pas 6



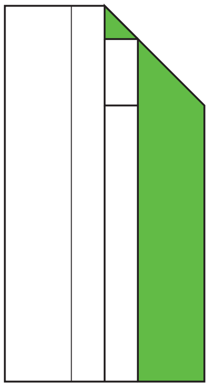
Plegueu en vall i aixafeu.

Pas 7



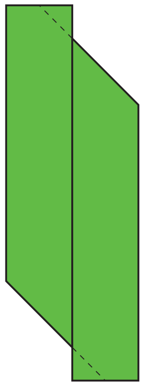
Roteu el paper 180 graus.

Pas 8



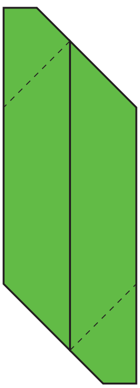
Repetiu els passos 5 i 6.

Pas 9



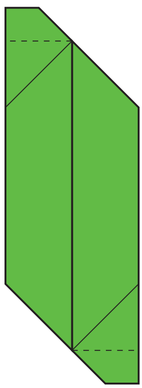
Plegueu en muntanya.

Pas 10



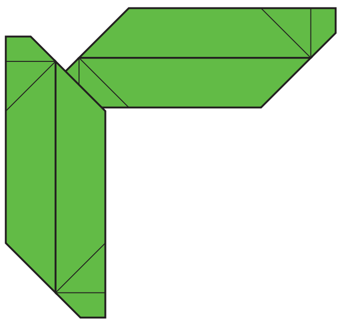
Plegueu i desplegueu en vall.

Pas 11



Plegueu i desplegueu en vall.

Pas 12

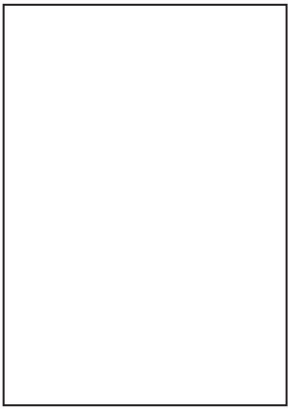


Unió de dos mòduls.

Amb 12 d'aquests mòduls podem fer un cub.

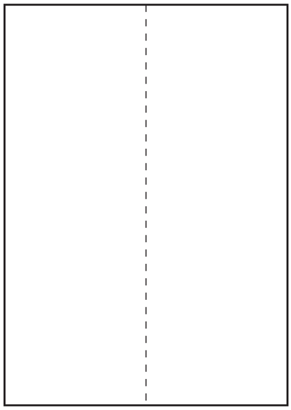
4.3. Mòdul aresta de 105 graus

Pas 1



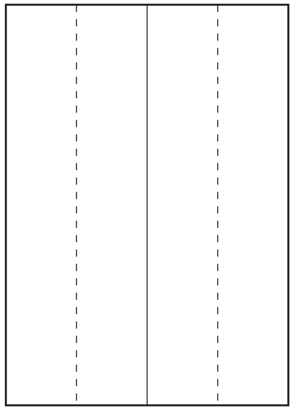
Comenceu amb un full
de mida DIN A5.

Pas 2



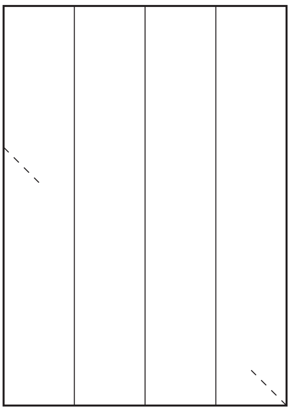
Plegueu i desplegueu en vall
per la meitat.

Pas 3



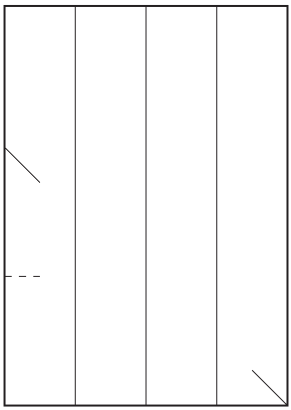
Plegueu i desplegueu en vall
per la quarta part.

Pas 4



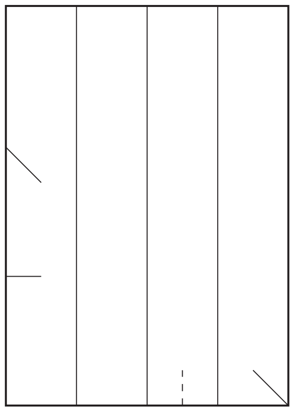
Plegueu i desplegueu en vall.

Pas 5



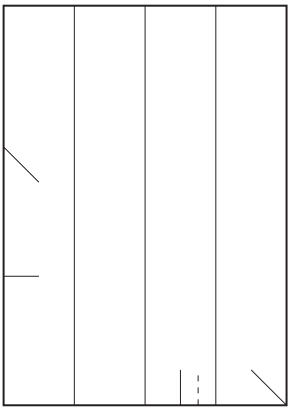
Plec en vall.

Pas 6



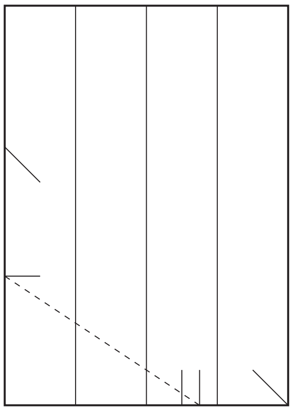
Plec en vall.

Pas 7



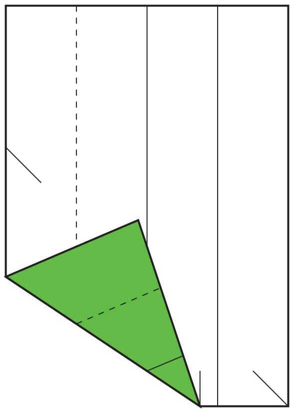
Plec en vall.

Pas 8



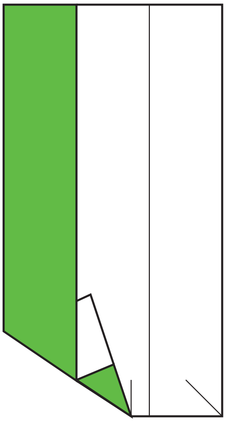
Plec en vall.

Pas 9



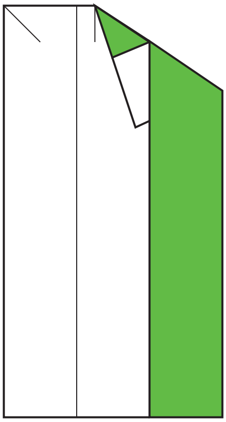
Plec en vall i aixafeu.

Pas 10



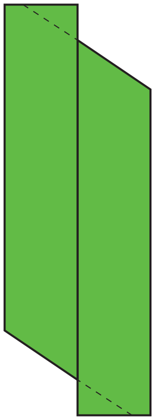
Roteu el paper 180 graus.

Pas 11



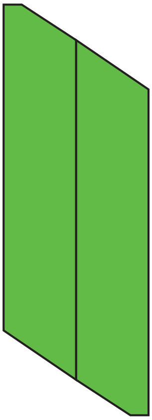
Repetiu els passos 4-10.

Pas 12



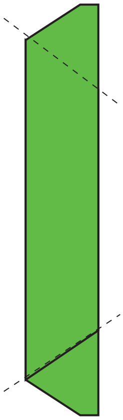
Plecs en muntanya.

Pas 13



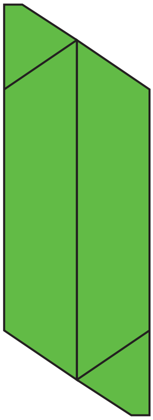
Plec en vall.

Pas 14



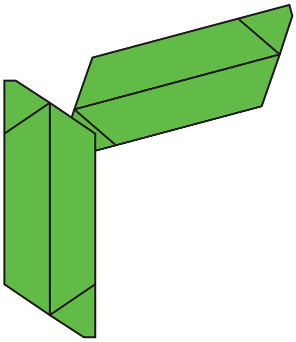
Plec superior en vall
i inferior en muntanya.

Pas 15



Mòdul final.

Pas 16



Unió de 2 mòduls.

Unint 30 d'aquests mòduls podem construir un dodecaedre. De fet, en aquest mòdul el que es fa és construir un angle de 107,945... graus en lloc d'un angle de 105 graus i, per tant, es comet un error relatiu del 2,8%, inapreciable per a l'ull humà. Aquests tres tipus de mòduls aresta i d'altres tipus de mòduls aresta semblants són casos particulars d'un mòdul aresta teòric més general...

Bibliografia

Anònim (1964). *Una hoja de papel*. Barcelona: Editorial Salvatella.

Dunham, William (2000). *Euler: El maestro de todos los matemàticos*. Madrid: Nivola.

Gil, Eduardo (2007). *Papiroflexia y geometría*. Barcelona: Editorial Salvatella.

Grupo Riglos (2003). *El libro de las pajaritas de papel*. Madrid: Alianza Editorial.

Palacios, Vicente (1988). *Papirogami*. Barcelona: Editorial Salvatella.

Pujol, Romà, Àlvarez, Ramon (1999). *L'altra geometria*. Barcelona: Casals.

Solórzano, Vicente (1938). *Papirolas. Tratado de Papiroflexia. Figuras geométricas de papel doblado*. Buenos Aires.

Sprung, Carmen (2011). *Origami*. 21 Sterne.

Unamuno, Miguel de (1964). *Amor y pedadogía. Apuntes para un tratado de Cocotología*. Colección Austral nº 161. Madrid: Espasa Calpe.

Von Staudt (1847). *Geometrie der Lage*

Agraïments

A Minerva Ciruela per introduir-me en el món de l'origami, a en Josep Ramis per la seva correcció de català, a Juan Gimeno per les seves converses sobre el tema.