Longitud, àrea i volum

Anton Aubanell

En aquest escrit ens proposem comentar quatre mòduls del Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) que formen una seqüència que convé que el visitant vagi passant d'una manera ordenada, ja que planteja un seguit de reptes encadenats amb algunes característiques comunes:

- Es proposen quatre reptes successius i relacionats cadascun dels quals convida a conjecturar, experimentar i obtenir una conclusió.
- En tots els casos, fins i tot mitjançant el propi encadenament dels reptes, es vol generar una certa sorpresa en el visitant a través d'una discrepància entre el que probablement hagi conjecturat i el resultat de l'experiment. Serà aquesta sorpresa la que el convidarà a cercar respostes que vagin una mica més enllà de la seva intuïció inicial.
- Tots els reptes tracten sobre proporcionalitat entre longituds de circumferències, àrees de cercles i volums de cilindres i esferes.
- En quasi tots els casos, la relació entre els radis de les figures o els cossos que es comparen és 2:1. L'únic cas en què no és així és el segon dels reptes que componen el primer mòdul.

A continuació, analitzarem els quatre mòduls i els reptes que plantegen.

Mòdul 1

Aquest mòdul presenta dos reptes a través dels materials que es mostren en les figures 1 i 2.

En el **primer repte** es pregunta al visitant què tindrà més longitud, una circumferència de 30 cm de diàmetre o dues de 15 cm. Com es veu en la figura 1, en el mòdul es presenten les circumferències encaixades per posar en evidència la relació entre els diàmetres i s'hi inclou un cordó per a resseguir aquestes circumferències i poder comparar així, físicament, les seves longituds. Després de fer conjectures (que, en aquest cas, solen quedar força ben repartides entre les tres possibilitats), amb el cordó es comprova que tenen la mateixa longitud. Es tracta d'un primer resultat sorprenent que convida al raonament següent formulat en termes més generals: Si R és el radi de la circumferència gran i r és el de la circumferència petita, de manera que $R = 2r$, és evident que la longitud de la circumferència gran és igual a la suma de la de les dues circumferències petites, ja que $2\pi R = 2\pi\,(2r) = 2\,(2\pi r)$.

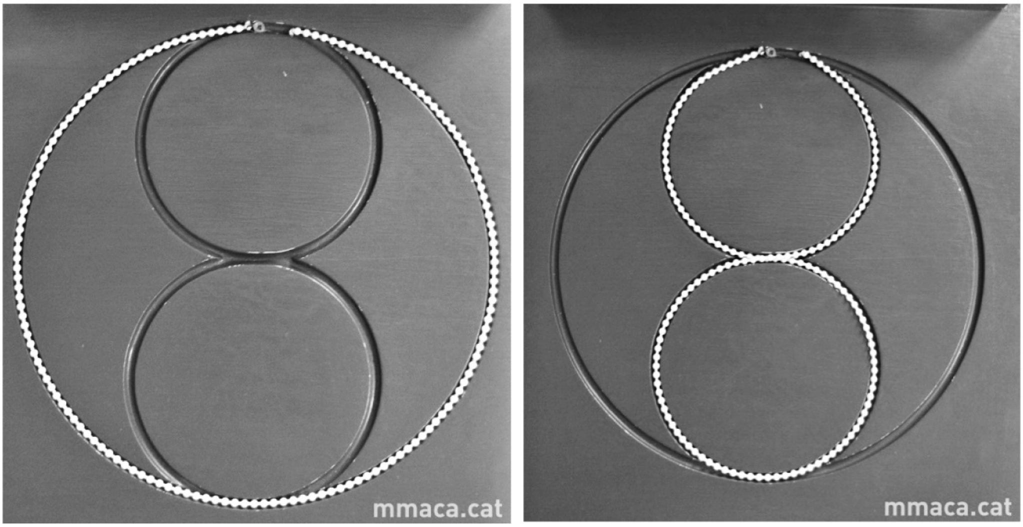

Figura 1. Comparació de longituds de circumferència amb relació 1:2 entre diàmetres.

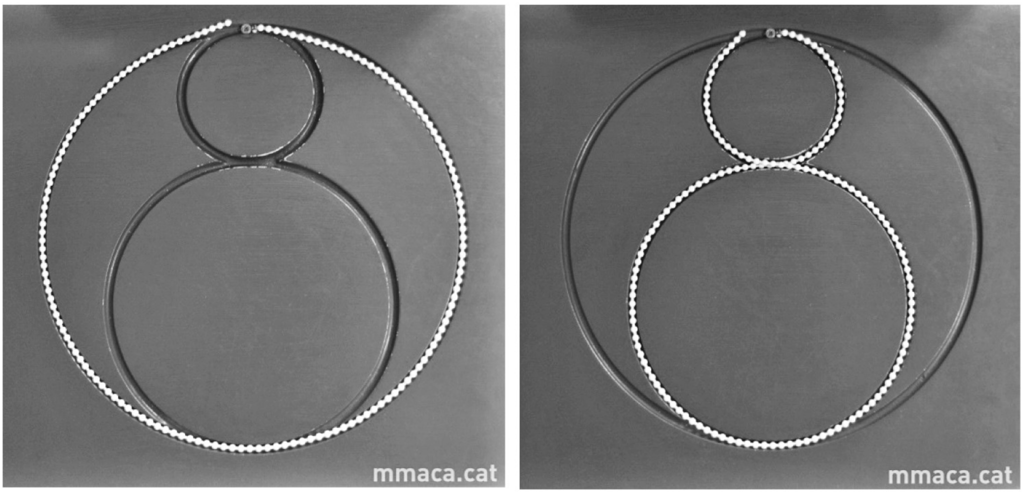

Figura 2. Comparació de longituds de circumferència encaixades.

En el **segon repte** es pregunta al visitant què serà més gran, la longitud d'una circumferència de 30 cm de diàmetre o la suma de les longituds d'una de 10 cm de diàmetre i d'una de 20 cm de diàmetre. És una pregunta similar a l'anterior, però ara es tracta de dues circumferències «petites» diferents. Com es veu en la figura 2, en el mòdul es presenten també les circumferències encaixades per posar en evidència la relació entre els diàmetres i s'hi inclou un cordó per a resseguir aquestes circumferències i poder comparar així, físicament, les seves longituds. En aquest cas, les conjectures sorgeixen ràpidament i es decanten cap a la igualtat, que fàcilment es comprova amb el cordó. En termes generals, es pot fer el raonament següent per a justificar-ho: Si R és el radi de la circumferència gran i r_1 i r_2 són els radis de les petites, de manera que $R = r_1 + r_2$, és evident que la longitud de la gran és igual a la suma de les longituds de les dues circumferències petites, ja que $2\pi R = 2\pi\,(r_1 + r_2) = 2\pi r_1 + 2\pi r_2$. Malgrat que, en aquest escrit, és natural que s'incloguin raonaments formals com l'anterior, en el context del MMACA, volem accentuar els aspectes més intuïtius de l'experiència matemàtica. En el cas de visites escolars, segons el nivell educatiu, de retorn a l'escola, poden ser oportuns raonaments d'aquesta mena, però tenint sempre molta cura de no malmetre el valor de la intuïció, tan fràgil com potent en l'educació matemàtica.

Els dos reptes d'aquest mòdul tenen en comú la relació lineal que hi ha entre la longitud d'una circumferència i el seu radi.

Mòdul 2

Aquest mòdul també presenta dos reptes.

En el **primer repte** es mostra un tub de 20 cm de diàmetre i, al costat, dos de 10 cm de diàmetre (vegeu la figura 3), i es pregunta per on passarà més aire, pel tub de 20 cm o pels dos de 10 cm. La tendència inicial, alimentada pel resultat dels reptes del mòdul anterior, és decantar-se per la igualtat. Tanmateix, fent una secció dels tubs de manera que els dos petits quedin encaixats en els grans (figura 4), ja es veu que la secció del tub gran supera en molt la secció conjunta dels dos petits.

Figura 3. Comparació de seccions de tubs circulars.

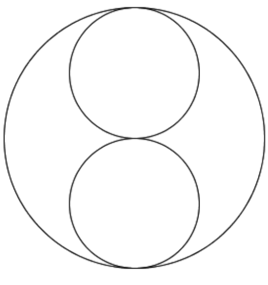

Figura 4. Secció dels tubs encaixats.

El **segon repte** d'aquest mòdul convida el nostre visitant a quantificar tot preguntant-li quantes vegades la secció del tub gran és més gran que la del petit. És evident que més de dues! Després de conjecturar, procedirem a mesurar àrees d'una manera experimental emprant una estranya unitat, el cigró. Emplenarem la secció interior del tub petit amb cigrons (evitant forats i superposicions) i després situarem els mateixos cigrons en un dels dos espais que queden entre els tubs petits i el tub gran i descobrirem amb sorpresa que les dues àrees són iguals (figura 5). Així doncs, hem deduït experimentalment que la secció del tub gran és 4 vegades la del tub petit. Formalment això es demostra a partir de la relació quadràtica que hi ha entre l'àrea d'un cercle i el seu radi: Si R és el radi del cercle gran i r és el del cercle petit, de manera que $R = 2r$, és evident que l'àrea del cercle gran serà igual a 4 vegades la del cercle petit, ja que $\pi R^2 = \pi\,(2r)^2 = 4\pi r^2$.

Figura 5. Comparació d'àrees amb cigrons.

Mòdul 3

Aquest mòdul presenta unes balances i un conjunt de cilindres de fusta, tots de la mateixa altura, un dels quals té el diàmetre doble que els altres (un té 60 mm de diàmetre i la resta tenen 30 mm de diàmetre). Vegeu la figura 6.

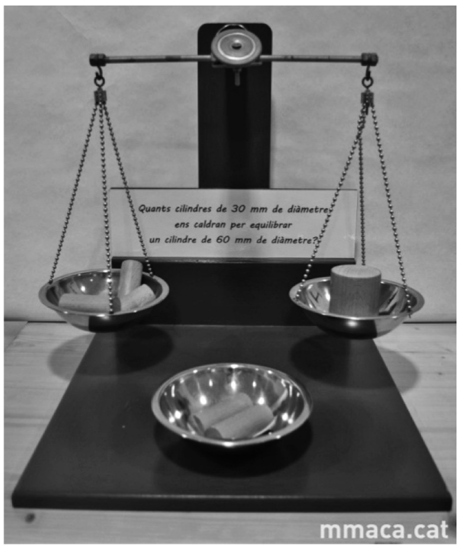

Figura 6. Comparació d'àrees amb cigrons.

Es pregunta al visitant quants cilindres petits caldrà posar en un dels platets de la balança per a equilibrar el cilindre gran posat en l'altre platet. Amb aquesta qüestió, més òbvia potser que les anteriors, ens proposem consolidar la idea que havia sorgit de l'experiència del mòdul anterior. Per això, és freqüent que es conjecturi que caldran 4 cilindres petits, com es podrà comprovar fent l'experiment amb la balança. Això es deu al fet que la relació entre el volum d'un cilindre i el seu radi és quadràtica (recordem que l'altura és la mateixa). Naturalment, en la prova experimental, estem suposant que la densitat de la fusta de tots els cilindres és la mateixa per tal que la relació entre els volums sigui idèntica entre els pesos.

Mòdul 4

Aquest mòdul presenta també unes balances, però ara hi ha un conjunt d'esferes totes del mateix diàmetre (40 mm) llevat d'una que té el diàmetre doble que la resta (80 mm). Vegeu la figura 7. En aquest cas, com en el mòdul anterior, preguntem al visitant quantes esferes petites ens caldran per a equilibrar la gran, suposant com abans que la fusta de totes té la mateixa densitat. Les conjectures inicials solen ser diverses: 4, 6, 8... Emprant la balança s'observa que calen 8 esferes petites per a equilibrar la gran. Això es dedueix a partir de la relació cúbica que hi ha entre el volum d'una esfera i el seu radi: Si R és el radi de l'esfera gran i r és el radi de la petita, de manera que $R = 2r$, el volum de l'esfera gran serà igual a 8 vegades el de la petita, ja que $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (2r)^3 = 8\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$.

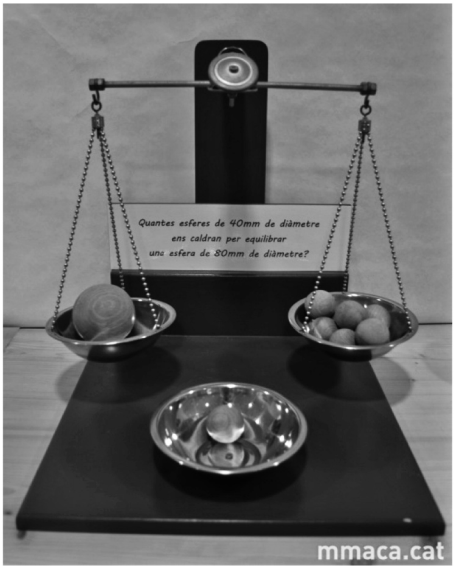

Figura 7. Comparació dels volums d'esferes.

Observem que, llevat del segon repte del primer mòdul, en tots els casos la relació entre els radis de les circumferències, els cercles o les esferes que es comparen és 1:2 i que això implica que la relació entre les longituds també sigui de 1:2, que la relació entre les àrees sigui de $1:2^2$ i que la relació entre els volums sigui de $1:2^3$.

Es tracta de quatre mòduls encadenats que permeten descobrir experimentalment unes relacions de proporcionalitat entre longituds, àrees i volums que són molt interessants per al públic general i que poden oferir un bon suport acadèmic per als nostres visitants escolars, especialment si es té en compte que formen un recorregut transversal a través d'idees (longitud, àrea, volum) que sovint es tracten en unitats didàctiques separades.