Resoldre no és aprendre.
De la resolució a la competència matemàtica i de la vivenciació a l'abstracció i la generalització matemàtica

Josep Callís i Franco
Mestre. Professor de Didàctica de les Matemàtiques (UdG)
Coordinador dels grups de treball de Rosa Sensat
d'innovació matemàtica a infantil, primària i EE
josep.callis@udg.edu

Resum

A través de la transcripció d'unes sessions de classe, l'article planteja la necessitat de transformar el procediment de transferència educativa en el qual es tinguin en compte la graduació de les diferents fases o etapes didàctiques que possibilitin l'abstracció i la generalització matemàtica. En aquest procés es posa una atenció especial en les fases de vivenciació i manipulació i en aquella en què la vivenciació pren una posició clau en aquest camí didàctic i que, sovint, malauradament no es té en compte a causa, fonamentalment, d'una falta de capacitació en aquesta tècnica educativa. Alhora, porta a la reflexió sobre la necessitat de plantejar situacions problemàtiques seqüencials per tal d'arribar a processos deductius o inductius que permetin la generalització de fenòmens i lleis, de manera que l'objectiu essencial en l'activitat matemàtica no és resoldre, sinó aprendre.

Abstract

Using a number of class transcripts, this article sets out the need for transformation of the educational transfer process, taking into account the graduation of the various learning phases that enable mathematical abstraction and generalization. Special emphasis is placed upon the experiential and manipulative stages, and the key role that experientialism plays in this learning process, which is unfortunately not always recognized due to a lack of teacher training in this area. It also aims to raise awareness of the need to set sequences of problems, in order to stimulate the deductive and inductive reasoning processes that allow for the generalization of mathematical phenomena and laws. Thus, the essential goal of mathematical activity is not to solve problems but to learn.

Els resultats de les avaluacions externes efectuades tant des de la Generalitat com en àmbits internacionals i també com ho demostren els diversos estudis efectuats per analitzar el grau de funcionalitat social de les matemàtiques (Informe Cockcroft, 1982; COPIRELEM, 1982; National Science Board, 1983; Recommendations for School Matehatics of the 1980s (NCTM); informes ICMI; Eurydice, 2011; proves PISA...) evidencien la poca incidència dels aprenentatges matemàtics per donar resposta a les situacions de vida i a les demandes socials del món actual. Aquesta desconnexió entre el currículum impartit i les necessitats del currículum après que es manifesta tant a primària com a secundària, aprenentatges sovint descontextualitzats de la realitat i de la seva funcionalitat pràctica, és, entre d'altres, una de les causes fonamentals dels baixos resultats avaluatius i de la baixa comprensió matemàtica entre l'alumnat.

Per intentar donar resposta a aquest repte i transformar els aprenentatges memorístics en competencials, a les aules de les nostres escoles trobem experiències diverses que intenten reparar en el que poden aquests dèficits estructurals i metodològics introduint i aplicant metodologies diverses centrades en la resolució de problemes, l'aprenentatge cooperatiu, l'aprenentatge servei, el mètode de projectes i d'altres, en què la recerca i la investigació compartida amb interrelacions interdisciplinàries fonamenten les bases del treball.

Resulta obvi que, tot i la gran diversitat existent en relació amb el concepte de competència, existeix un acord tàcit en la direcció de considerar-la «una acció conscient efectuada amb l'objectiu de solucionar una problemàtica contextualitzada, aplicant i posant en joc els condicionants necessaris i adequats (coneixements, procediments, actituds, estratègies, habilitats...) a aquell context, amb capacitat per a analitzar críticament el procés i el resultat i fer-hi, si cal, les modificacions pertinents. Un domini competencial representa, doncs, un complex procés integrador d'estructures mentals i habilitats no mentals» (Callís i Callís, 2007, p. 9). És, per tant, una estructura complexa que «ha de permetre saber analitzar i gestionar (identificar, interpretar, transcriure, transferir i avaluar) els contexts i situacions reals i els processos mentals que es necessiten i s'apliquen [...]. Tota competència, en el fons, és alhora multicompetencial, ja que cada competència necessita subcompetències que possibilitin organitzar i gestionar tant la informació com el propi control personal i els sabers conceptuals i procedimentals amb capacitat per saber resoldre situacions i problemes tot adequant-los a l'especificitat i als canvis de cada context i fer-ho sota una visió crítica que cerca la qualitat i la innovació» (Callís, 2006). Resulta evident, per tant, que l'avaluació d'una competència difícilment es pot fer per una determinada resolució d'un moment o d'una activitat puntual, ja que la competència és un procés evolutiu i, per tant, l'avaluació en un determinat moment només possibilita detectar l'estadi evolutiu d'aquesta adquisició en aquell moment concret, sense que això signifiqui el ple domini competencial. Els controls avaluatius només són factibles a partir dels productes o accions que es generen en aplicar-los en contexts dominats i, especialment, en els no coneguts.

Des del marc de la resolució de problemes (Polya, 1957; Mason, Burton i Stancey, 1989; Schoenfeld, 1981 i 1992; Lakatos, 1977; Gascon, 1992; Vila, 1998), la diferència entre activitats d'aplicació i problema són concepcions epistemològicament del tot diferenciades. Mentre que en les activitats d'aplicació es posa l'alumnat sota el supòsit que pot resoldre l'activitat proposada, ja que es pressuposa que coneix o que ha de conèixer els continguts implicats perquè han estat presentats i treballats a l'aula, les situacions problemàtiques, al contrari, plantegen propostes en què l'alumnat, d'entrada, no té els coneixements i els dominis per a la seva resolució.

En el primer cas, la proposta té, essencialment, l'objectiu d'aplicar i practicar aquells continguts determinats pel currículum que es valoren com a bàsics i que, conseqüentment, cal dominar per superar positivament l'avaluació, domini que s'adquireix a partir de procediments més o menys conductistes fonamentats en la repetició, a través de la qual s'assoleixen i s'interioritzen aquells coneixements procedimentals o conceptuals que es considera que han de saber i entendre; i, en les situacions problemàtiques, se cerca que mitjançant el procés resolutori del problema sigui l'alumnat mateix qui construeixi el seu propi coneixement i adquireixi estratègies resolutòries significatives i competencials.

En les activitats d'aplicació que es presenten o es fan fer a l'alumnat en finalitzar o al llarg d'un determinat contingut temàtic, com solen ser la gran majoria d'activitats que es proposen en els llibres de text, el que es pretén és que l'alumnat resolgui correctament o que trobi un resultat, normalment aritmètic, a uns exercicis, generalment semblants els uns amb les altres per tal d'agafar una algorismització del procediment resolutori. Aquest procediment de treball per si mateix no significa ni comporta, d'entrada, la comprensió o l'aprenentatge del contingut conceptual o procedimental que porta implícit la indicada activitat.

Resulta obvi, per tant, que, al contrari, en el procés d'aprenentatge de les situacions problemàtiques cal tenir en compte tant el procediment de treball o l'aplicació d'una metodologia que tingui en consideració les diferents fases evolutives necessàries per conquerir la capacitat de raonament i abstracció matemàtica com, alhora, el procés per aconseguir que l'aprenentatge sigui competencial i no simplement resolutori.

Exemplificació pràctica

Analitzarem aquesta doble incidència a través de la transcripció detallada de la seqüència didàctica filmada i centrada en una activitat pràctica presentada com un joc plantejat com un campionat d'encistellar un objecte. La proposta es treballa des d'una perspectiva de metodologia activa i d'aprenentatge basat en problemes (ABS) i portada a terme amb alumnat de magisteri i també amb grups de mestres de primària en actiu.

Per iniciar l'activitat i el procés didàctic, es demana la participació de tres persones de les quals una aguantarà l'objecte que farà de cistella (paperera, cubell, capsa de cartró...) i dues seran els jugadors que competiran i que hauran d'encistellar un objecte (pilota, guix, retolador, esborrador...). L'activitat resulta més efectiva si es fa en un espai ampli que tingui possibilitats de mobilitat (patí, gimnàs...), si bé en aquest cas és feta a l'aula. Se situarà els dos jugadors (llançadors) en uns determinats punts de l'aula o del pati dels quals no es poden moure i es disposarà una corda que els uneixi. Tot seguit s'indicarà que el qui porta la cistella ha de situar-se en el lloc on vulgui, però de manera que aquesta posició sigui acceptada pels dos competidors tenint en compte que el punt escollit no pot beneficiar cap dels dos jugadors, o sigui que cadascú vegi que aquella posició no beneficia el jugador contrari però tampoc a ell. En el cas que algun dels jugadors no estigui d'acord amb el punt on s'ha situat el cistellador, caldrà que en justifiqui el motiu (només són vàlides raons de diferència de distàncies), i si té raó, el cistellador ha de modificar la posició per arribar a l'acord amb els dos llançadors.

Foto 1. Posició entre dos jugadors.

Un cop explicades les normatives, s'anirà desenvolupant un procés dialògic entre mestre i alumnat i entre l'alumnat mateix que porti a la reflexió, l'anàlisi i la recerca pertinents i a les conclusions finals. El procés de treball per anar resolent els interrogants que es vagin generant, les conjectures i les hipòtesis que sorgeixin, es fa a través d'una evolució en la tipologia de treball que va del treball personal al de contrast per parelles, contrast entre dues o tres parelles i debat i conclusions generals per retornar a un treball de síntesi personal.

Les sigles utilitzades per a descriure el procés i el diàleg establert que es detalla a continuació són: M (mestre), C (portador de la cistella o cistellador), AA (algun alumne o alumna) i AAs (conclusions de la participació col·lectiva de l'alumnat).

> M (dirigint-se a la classe): Abans d'iniciar el campionat, és important que al llarg de l'activitat observeu i pareu molta atenció en què és el quemira i com ho fa la persona que té la cistella per situar-se. Comencem!
>
> M (després que el cistellador s'ha situat en un indret que té l'acord dels dos jugadors): Heu vist com ho ha fet per trobar el lloc on s'ha situat?
>
> AAs: Anava provant per veure si trobava el punt exacte. Mirava cada un dels qui juguen i se n'anava acostant o allunyant per veure si trobava el punt que creia que era equidistant per a tots dos.
>
> AA: Ho feia per assaig i error.
>
> M (dirigint-se al cistellador): Ho feies així com diuen?

C: Sí. Anava provant per veure si més o menys em semblava que era a la mateixa distància de cadascun.

M: Com ho podríem fer per saber si s'ha situat correctament?

AA: Mesurant-ho amb passes.

M: Creieu que aquest procediment serà segur i exacte?

AAs: No. Es poden fer passes més llargues o més curtes sense adonar-se'n.

M: Què podríem fer?

AA: Fer-ho amb peus.

AAs: Podríem agafar alguna cosa com una cinta mètrica, una corda, el pal de l'escombra, llibres... i mesurar-ho.

M: I ara, del que tenim a mà aquí a la classe (prèviament s'hauran deixat recursos diversos que puguin estar a la vista: corda, llistons...), què és el que ens podria anar millor?

AA: Una corda.

M: Doncs, comprovem-ho. Com ho faràs?

AA: Faré que el cistellador agafi un extrem de la corda i jo per l'altra banda, tensant la corda, la posaré just on hi ha un jugador; llavors, mantenint-la tensada, em mouré per arribar al segon jugador i veuré si hi ha la mateixa distància.

M (després de les comprovacions pertinents i constatada la igualtat de posició del cistellador respecte als altres dos jugadors): Això era un problema?

AAs (en alguns casos es manifesten dubtes clars davant la pregunta): Sí.

M: Per què?

AAs: Perquè es tracta de resoldre una situació.

M: Així doncs, si és un problema, l'hem resolt?

AAs: Sí, perquè hem solucionat i hem donat resposta al que es demanava.

M: De fet, la pregunta més important no és si l'hem resolt, sinó: hem après?

AAs: Sí.

M: I què hem après?

AAs: Doncs... hem après a utilitzar diferents recursos per mesurar una distància. A fer estimació de longitud...

M: Segur que hem après? Comprovem-ho.

Ara, el mestre situa els dos jugadors en uns altres punts diferents dels inicials i demana al cistellador que, com abans, se situï en un punt amb el qual els dos jugadors estiguin d'acord, i continua demanant que s'observi com ho fa per trobar la situació i què és el que mira. Després que s'hagi trobat el punt i comprovada la igualtat de distàncies, es demana que expliquin què ha fet el cistellador per trobar el punt.

AAs: Ho ha fet com abans, per assaig i error.

Tot seguit es posa més dificultat al problema indicant que aquell punt trobat com a solució no es pot utilitzar justificant qualsevol motiu, i així se segueix amb tres o quatre casos més fent que, en trobar el punt, cada vegada es vagi marcant aquell punt o deixant-hi un objecte cada cop es va demanant quin ha estat el procediment resolutori.

M: Segons dieu, en cada cas ho hem fet sempre igual, per assaig i error. Per tant, si bé cada vegada hem resolt el que es demanava, la resolució adoptada o el procediment utilitzat permeten solucionar altres casos o situacions diferents d'una manera exacta i precisa?

AAs: No. Cada cas és diferent i cada cop s'han de fer comprovacions i estimacions diferents.

M: Per tant, resolíem el problema, però, apreníem? És el mateix resoldre que aprendre?

AAs: No, perquè solucionem un cas i ho fem per tempteig i sempre ho fem igual, i el que fem és com començar sempre de zero.

M: Veieu alguna cosa curiosa en mirar els punts de les solucions que hem anat trobant en cada cas?

AAs: Sembla que estan en línia recta.

M: Com ho podem saber?

AAs: Posant una corda que passi per aquests punts.

M (després de situar la corda): Ara que sí que veiem que aquests punts estan en línia recta, podríeu indicar algunes curiositats o propietats que hi veieu?

AAs: Passa pel centre de la línia que uneix els dos jugadors.

AAs: Cada punt és a la mateixa distància dels jugadors.

AAs: Talla perpendicularment la línia que uneix els dos jugadors.

Foto 2. Disposició mediatriu.

M: Què vol dir perpendicularment i com ho podem saber, que és perpendicular?

AAs: Quan sigui en angle recte. Podem posar, per exemple, un llibre, o una carpeta, de manera que un costat estigui sobre la línia dels jugadors i veure si l'altre costat coincideix amb la recta que uneix els punts de les solucions de cada cas.

M: Així doncs, podríeu resumir tot això que acabeu de dir?

AAs: La recta passa pel centre de forma perpendicular i els punts estan a la mateixa distància dels dos extrems.

M: En matemàtiques existeix una paraula que defineix tot això i, utilitzant-la, ja no cal descriure aquestes propietats que heu descobert. La paraula és «mediatriu». Per cert, hem resolt el problema?

AAs: Sí.

M: Hem après?

AAs: Sí.

M: Què hem après?

AAs: Que la solució és la mediatriu i no un únic punt.

M: Per tant?

AAs: Que el problema té infinites solucions.

M: Si hi ha dos punts, sempre es podrà trobar un punt que en sigui equidistant?

AAs: Sí. Sempre, perquè sempre hi podrem traçar la mediatriu.

M: Sembla que hem après força coses, però de veritat hem après? Comprovem-ho.

En aquesta ocasió es planteja la situació problemàtica a partir del fet que ara són tres els jugadors i no dos. S'uneixen les seves posicions amb una corda posada a terra de manera que es forma un triangle. Després de distribuir-los, demanem al cistellador que se situï a la mateixa distància dels tres i, un cop trobada la posició aproximada, de nou resolta per tempteig, es continua amb el mateix procediment d'interpel·lació per fer reflexionar i constatar el resultat.

M: Com s'ha trobat el punt i com ho farem per saber que són a la mateixa distància?

AAs: Com abans. Ho ha fet per tempteig o per assaig i error, a base de provar. I per comprovar-ho, també ho farem com abans, o sigui, amb la corda tensada des del lloc on es troba el cistellador, la farem arribar a una posició i després, mantenint-la sempre tensada, veurem si coincideix amb la posició dels altres jugadors.

M: Agafem un pal o un guix i el lliguem a l'extrem de la corda en la distància del jugador primer i, així tensada, dibuixem el recorregut. Què obtenim?

AA: Una circumferència.

M: Per tant, on és el cistellador?

AA: Al centre de la circumferència.

M: I quina propietat té aquest punt?

AAs: Que passa pels tres punts on hi ha els jugadors.

M: Doncs, en matemàtiques, també hi ha un nom per a això: circumcentre.

Després de repetir-ho en diversos casos en què es continua treballant amb el procediment de tempteig i en què es constata, en cada cas, que el punt és un centre de circumferència, es porta a la consideració de veure els tres punts com a triangles que tenen un circumcentre.

M: Hem resolt el problema?

AAs: Sí.

M: Hem après?

Foto 3. Posició tres jugadors. Circumcentre.

AAs: Sí. Sabem què és un circumcentre i que tots els triangles poden tenir-ne un, circumcentre que a vegades és a l'interior i a vegades a l'exterior.

M: Abans m'heu dit que havíeu après el que era una mediatriu, i ara el que és un circumcentre; però en cada cas continueu fent sempre el mateix. Saber què és la mediatriu o el circumcentre ens ha ajudat a solucionar el problema?

AAs: No.

M: Així doncs, aprendre conceptes és aprendre?

AAs: Sí, però només vol dir aprendre conceptes; no és aprendre a aprendre, o sigui, que em permeti resoldre situacions noves reals o solucionar altres coses, ja que seguim cada vegada com al principi, sense saber què fer.

M: A veure, ara plantejarem un nou cas i us ajudaré una mica (se cerca una nova posició de tres persones).

M (al cistellador): Imagina't que, encara que són tres, només en juguen dues, les que vulguis. Quina és la solució?

C: La mediatriu.

M: Doncs, ara amb una corda, situa-la i comprova que compleixi les tres propietats que havíeu dit que tenia la mediatriu. Les recordeu?

M (després de recordar les propietats de la mediatriu i situar una corda com a mediatriu entre dos dels jugadors): Ara, imagina't que juguen dues altres persones. Quina és la seva solució?

C: Igual que abans, la seva mediatriu.

M: Construeix-la i observem què passa.

AA: Es tallen en un punt.

M: I què és aquest punt?

AAs: El circumcentre.

M: Per què?

AAs: Perquè és equidistant dels tres jugadors, ja que és sobre la primera mediatriu i això vol dir que l'1 i el 2 es troben a la mateixa distància, i com que també és sobre la segona mediatriu vol dir que també es troba a la mateixa distància del 3.

M: Així doncs, en tres punts sempre serà possible situar un punt, un circumcentre, que equidisti de tots tres?

AAs (després de reflexionar): No, no serà possible si els tres punts estan alineats, ja que llavors les mediatrius seran paral·leles entre elles. En qualsevol triangle, sí.

M: Ara continuarem, i fixeu-vos bé què farà i com ho farà la persona que agafi la cistella, és a dir, si ho fa com sempre, per assaig i error i mirant sempre els jugadors. (En aquest moment es posa una nova situació a partir de tres persones i es resol el problema.)

AAs: Ara ha canviat de procediment. Abans de situar-se, el que mirava eren els centres dels espais que separen cada jugador i amb l'ajuda de la mà o del braç traçava la mediatriu imaginària de cada parella de jugadors i se situava en un punt sense demanar als jugadors si hi estaven o no d'acord.

M: Just, ara hem après. I què ens ha fet aprendre?

AAs: La manera de fer-ho, o sigui, l'aplicació d'un procediment.

A continuació, canviem el procediment de treball. Si fins aquí el problema requeia directament sobre el propi alumnat i era una situació de vida (vivencial), ara se'ls proporciona material (suros, xinxetes, gomes elàstiques i fils de dos colors, un per unir els punts i un altre de diferent per construir les mediatrius) per tal que, manipulant-lo, practiquin situacions en què calgui posar les tres xinxetes on vulguin i trobin la posició del circumcentre. La manipulació, per tant, ens ha obert els ulls per veure-hi més enllà del problema específic i ens permet aplicar i consolidar la pràctica dels procediments resolutoris alhora que desvetlla multitud d'interrogants que estimularan la recerca i la investigació posteriors. En aquest moment

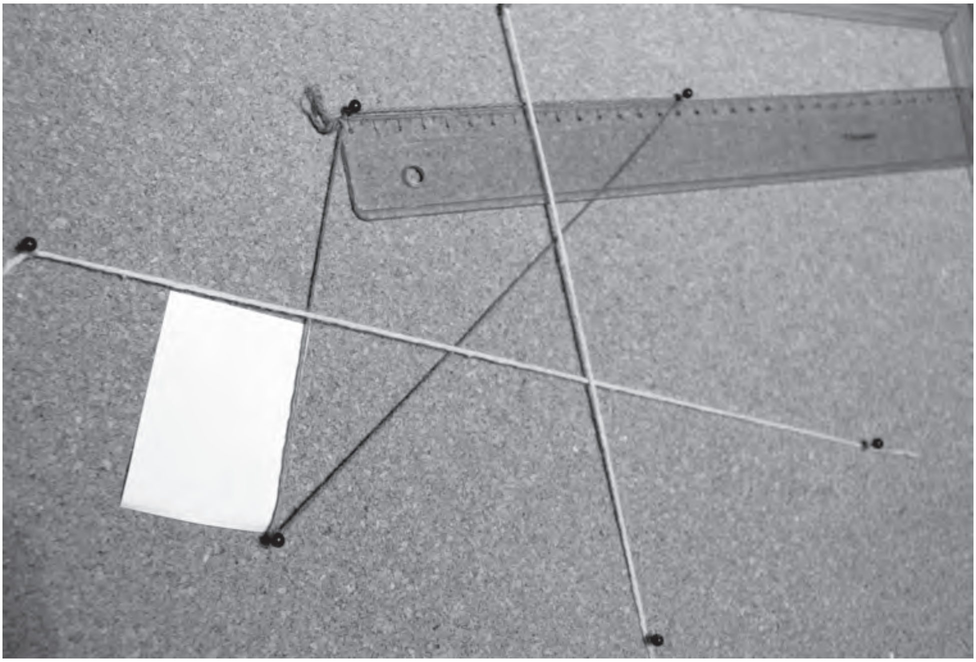


Foto 4. Manipulant sobre suro.

s'entrarà en una fase de nou canvi d'enfocament didàctic i s'iniciarà el treball simbòlic en què la realitat viscuda o manipulada serà representada o substituïda per paraules, dibuixos o esquemes, o bé per llenguatge matemàtic.

M: En quins casos els triangles tindran el circumcentre en posició interior i en quins exterior? De quina manera podem treballar més ràpid per trobar la solució?

A.A: Fent-ho directament a partir de dibuixos.

AAs: Els triangles acutangles tenen sempre el circumcentre interior, els obtusangles el tenen exteriori, en el cas dels rectangles, sempre interior i en algun cas sobre la meitat de la hipotenusa. Fer-ho sobre la base de la classificació de costats no té sentit, ja que, per exemple, els escalens poden ser de tots tres tipus segons l'angle, i els isòsceles poden ser, també, de tots tres tipus.

AAs: En el cas dels triangles rectangles, el circumcentre se situarà sobre la meitat de la hipotenusa quan sigui isòsceles.

M: I en aquest cas, quines propietats o curiositats es poden constatar?

AAs: Que la mediatriu sobre la hipotenusa passa pel vèrtex de l'angle recte i, per tant, el divideix en dos angles de 45 graus... Que, en conseqüència, el vèrtex on hi ha l'angle recte és a la mateixa distància que des del circumcentre als altres dos vèrtexs... Que la distància des del centre de la hipotenusa fins a l'angle recte és igual que la meitat de la hipotenusa... Que es formen dos triangles rectangles també isòsceles...

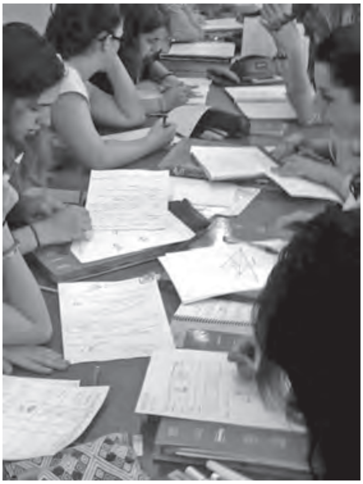


Foto 5. Treball individual.

Foto 6. Treball per grups.

M: Bé, ara que ja dominem els procediments resolutoris, investigarem si podem trobar el circumcentre en una situació de quatre punts, cosa que podrem fer treballant sobre paper per anar més ràpids, ja que caldrà resoldre casos diferents posant els quatre punts en formes diverses. (Es fa el treball de manera individual i després es revisa o es contrasta per petits grups.) Recordem les diferents tipologies o varietats de quadrilàters? (S'obre un debat en què es recorden i es visualitzen els diferents quadrilàters cercant formes de l'entorn, retallant-les o dibuixant-les, projectant ombres a partir d'un quadrat o un rectangle, cercant punts o referents a l'aula per tal de cercar-hi o visualitzar-hi algun quadrilàter i fer-ne una fotografia. Tot seguit es treballa per grups la seva classificació aportant els criteris classificatoris que es consideren adequats: tenir costats iguals o no, tenir angles iguals o no, tenir costats paral·lels o no... i sintetitzant, al final, els seus criteris en una taula classificatòria.)

M: En els quadrilàters que heu fet, heu trobat sempre el circumcentre?

El debat generat, a causa dels resultats diferents obtinguts, porta a plantejar-se interrogants i a fer conjectures diverses, ja que alguns grups manifesten que no hi ha circumcentre i d'altres que sí que han trobat casos amb circumcentre.

AAs: Només els quadrats, els rectangles, els trapezis isòsceles, i alguns tipus de trapezoides poden tenir un circumcentre. En la majoria de casos de quadrilàters irregulars resulta impossible.

M: Podríem trobar algun procediment per investigar els quadrilàters que poden tenir un circumcentre?

AAs: És lògic que si tenen circumcentre, la circumferència ha de passar pels seus vèrtexs; per tant, podem fer el procés a la inversa, o sigui, tenim una circumferència i mirem quins quadrilàters hi podem construir de manera que els seus vèrtexs sempre estiguin dins la circumferència.

AAs: En resulten els mateixos que havíem dit que tenien circumcentre. No podem fer-hi cap rombe, ni cap romboide, ni cap trapezi rectangle; sí, en canvi, un quadrat, un rectangle, un trapezi isòsceles i un trapezoide. El que sembla obvi és que tots els polígons regulars podran tenir un circumcentre.

M: Així doncs, de què dependrà l'existència del circumcentre? Dels angles, dels costats, d'alguna altra cosa? I, en aquests casos que tenen circumcentre, on es troba: dins de la figura, a fora...?

AAs: Tenint en compte que els regulars tenen sempre circumcentre i que tenen costats i angles iguals, tal vegada els dos factors hi influeixen d'una manera conjunta.

AAs: La igualtat de costats com a clau explicativa de tenir circumcentre és evident que no és vàlida, ja que el rombe els té iguals i no té circumcentre i el rectangle, que els té diferents, sí que en té. Tampoc no ho indica el fet de tenir els angles iguals, perquè el trapezi isòsceles no els té iguals i té circumcentre i alguns trapezoides ha resultat que també en poden tenir.

AAs: El circumcentre en el quadrat i el rectangle, sempre és interior i centrat; en canvi en els trapezis isòsceles i en els trapezoides, a vegades queda a dintre i a vegades a fora. A nosaltres, en el trapezi isòsceles ens queda a dintre, i en d'altres grups els queda a fora; en alguns, sobre la base gran...

M: Per tant, podeu analitzar i cercar quines són les condicions del trapezi isòsceles que generen aquestes tres possibilitats.

AAs: Segurament deu venir determinat per si la distància entre les bases o altura és menor, igual o superior que la meitat de la base petita.

M: Podeu formular una hipòtesi?

AAs: En tot trapezi isòsceles, si la seva altura és inferior, igual o superior a la meitat de la longitud de la seva base menor, el circumcentre serà exterior, sobre la base, o exterior a la pròpia figura.

M: Comproveu si aquesta hipòtesi es compleix i si la podem donar per vàlida. Com sempre, treball personal primer; tot seguit, compartiu-ho amb algun company o companya, i després, contrasteu-ho amb altres grups.

AAs (després dels treballs personals i de grups): Certament, hi ha part de raó, ja que sí que sembla que en els d'altura menor que la meitat de la base menor el circumcentre el veiem a fora i en els de més altura és interior, però en els d'igualtat també ens surten a fora tot i que hi ha grups en què sí que coincideix a la base.

M: En conseqüència, creieu que deu dependre d'alguna altra cosa...

AAs: És evident que la mediatriu ens fa angles de 90° sobre els costats; per tant, si la mediatriu arriba al centre del costat de la base major amb un angle, per exemple,

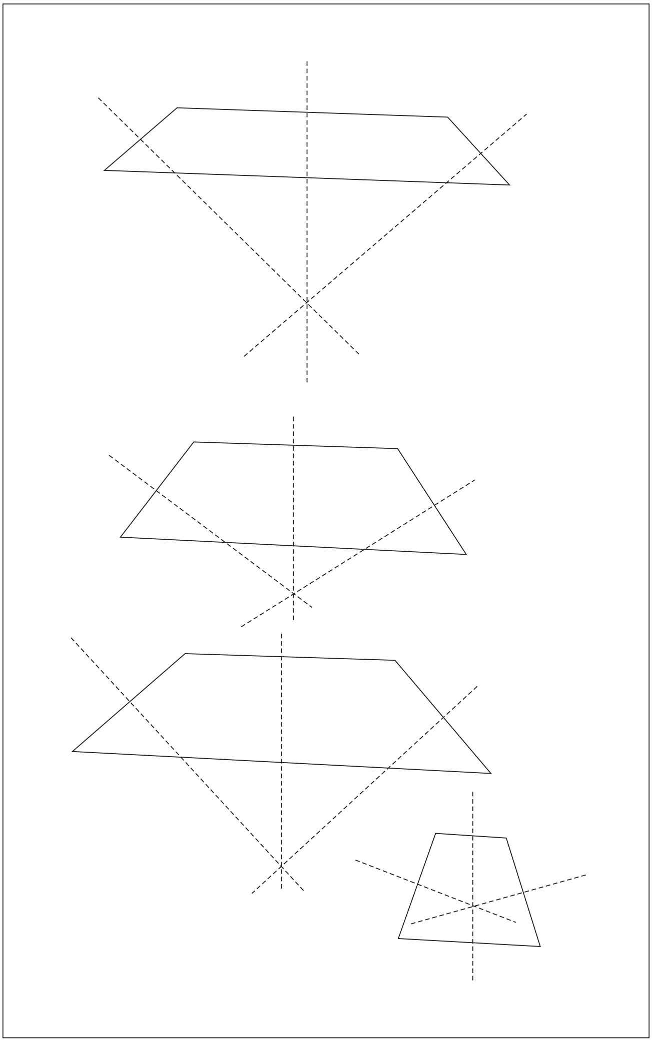


Foto 7. Full de trapezis.

de 45° — ja que entre aquesta mediatriu, mitja base gran i mig costat inclinat fan un triangle i, per tant, la suma dels seus angles ha de ser de 180° — , llavors l'angle entre la intersecció del costat inclinat i la base major ha de tenir també 45°. En aquest cas, segur que va al centre de la base gran. Llavors, segurament, les condicions de l'altura i de la base petita dependran de la mesura de la base gran i de l'angle entre el costat de la base gran i el costat inclinat.

M: Per tant, això no por passat també quan l'altura sigui més gran que mitja base petita? I podria ser possible quan l'altura sigui menor que mitja base? Penseu-hi, investigueu-ho i en parlem en la propera sessió.

A partir d'aquí, noves accions de treball manipulatiu o de treball simbòlic permetran donar resposta als interrogants i les conjectures plantejades, fent possible aprofundir-hi i crear coneixement específic sobre aquest contingut matemàtic.

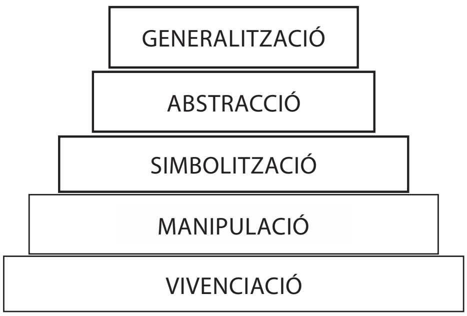
Aquest domini conceptual i procedimental aconseguit i amb creació de coneixement personal permetrà, finalment, donar resposta a situacions noves entroncades amb la realitat i així resoldre situacions com ara:

- Situar un quadre de manera que rebi la mateixa intensitat de llum respecte a tres punts de llum o focus.
- Ubicar al pati un determinat objecte (paperera, font...) per tal que sigui a la mateixa distància de la porta de sortida de P3, P4 i P5.
- Donat un plànol comarcal, situar on caldria instal·lar un abocador o un altre servei públic que sigui a la mateixa distància de tres poblacions.
- Plantejar i resoldre situacions que es puguin generar en la vida real en què calgui ubicar algun punt que hagi de ser a la mateixa distància d'altres.
- Inventar o reconèixer situacions de la vida real que es puguin resoldre sobre la base dels coneixements adquirits.

Les etapes i el desenvolupament de la comprensió matemàtica

La seqüència d'aprenentatge descrita ha passat per diferents moments didàctics que podem sintetitzar en:

1. ***Evolució de les fases didàctiques*** necessàries i imprescindibles per a un bon aprenentatge matemàtic, les quals, atenint-nos als estudis de psicologia genètica i constructivista (Piaget, Kamii, Vigotski, Brunner, Diennes...), per la nostra part concretem i estructurem sobre la base de les fases següents:



a) *Vivenciació*. Fase en què l'alumnat és el protagonista directe, sobre el qual recau el problema. Porta a la comprensió del problema amb les corresponents reflexions sobre les dificultats i les seves estratègies resolutòries.

b) *Manipulació*. Context en què la situació viscuda es trasllada a realitats d'objectes materials. En aquest treball s'aconsegueix aprofundir en les dificultats resolutòries del problema i en l'obertura d'interrogants i hipòtesis.

c) *Simbolització*. Fase en què es treballa substituint la realitat per elements que la representen com poden ser les explicacions orals, gràfiques o amb llenguatge matemàtic.

d) *Abstracció*. Estadi resolutori amb l'ús de la simbolització del llenguatge matemàtic i les tècniques algorísmiques adients.

e) *Generalització*. A partir de l'anàlisi de diversos casos particulars i de la recollida dels seus resultats s'abstreuen conclusions generals que permeten crear coneixements i generar o formular lleis.

En síntesi, la vivenciació ens ha permès entendre i comprendre el problema i la seva solució. La manipulació ens ha fet possible aprofundir en la comprensió de la problemàtica i crear nous dubtes i nous interrogants tot generant i plantejant conjectures i hipòtesis que, a través del treball simbòlic, ens ha permès investigar sobre els interrogants plantejats d'una manera més ràpida i poder respondre a les conjectures i a les hipòtesis formulades tot donant via lliure a l'abstracció amb la consegüent creació de coneixement i la formulació de generalitzacions.

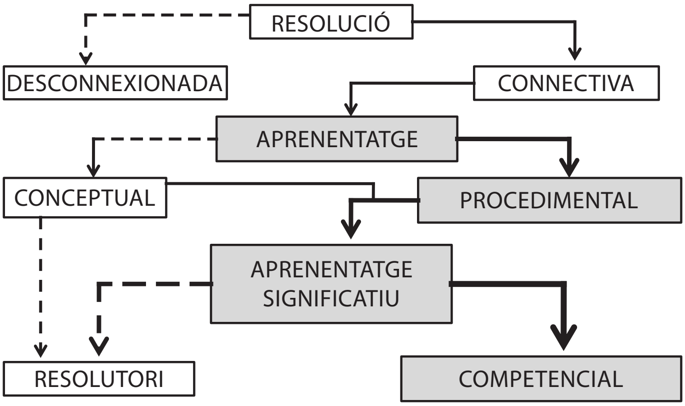
2. ***Evolució per a l'adquisició del coneixement i l'aprenentatge competencial***. En aquest procés s'ha diferenciat el fet de la resolució del d'aprenentatge i, en aquest cas, de l'aprenentatge conceptual i procedimental i del significatiu i competencial.

Una resolució d'una activitat d'aplicació per ella mateixa difícilment porta a un aprenentatge competencial, sinó simplement a una resolució desconnexionada. L'aprenentatge es produeix a partir del contrast dels coneixements adquirits i seqüenciats de manera que el problema es va ampliant i va necessitant les solucions prèvies per poder seguir endavant per construir el propi coneixement. La resolució connectiva és la que es dóna en aquelles situacions en què es va estirant el fil i ampliant la situació inicial. Resoldre el problema, per tant, no comporta necessàriament aprenentatge. De la mateixa manera, l'aprenentatge de conceptes que es pot convertir en la base dels aprenentatges curriculars sovint resulta insuficient per poder donar respostes a situacions reals de la vida i es converteix exclusivament en aprenentatge resolutori de situacions puntuals sense capacitat de servir per a noves situacions.

L'aprenentatge significatiu fa imprescindible el domini dels procediments adequats, que haurien de convertir-se en el nucli dels dissenys curriculars si el que es pretén és aconseguir una innovació educativa que serveixi per a preparar ciutadans amb capacitats per donar respostes a la vida. Només la confluència dels aprenentatges conceptuals amb els procedimentals possibilita uns aprenentatges significatius que configuren l'aprenentatge competencial.

A manera de conclusió

La transcripció de l'activitat desenvolupada ens porta a concloure que el més important en el moment de treballar a l'aula matemàtiques o qualsevol altra matèria no és que l'alumnat ens resolgui el seguit d'activitats que li posem al davant, sinó que tinguem cura que aquestes activitats siguin un factor que possibiliti l'aprenentatge, que no es fa efectiu sense un procés de contrast. O sigui, que això només serà possible com el fruit d'unes seqüències d'aprenentatge que cal planificar, en les quals es vagi ampliant gradualment el context reflexiu i en què els dominis inicials vagin sent necessaris per seguir endavant i els nous continguts assolits ho siguin, alhora, per continuar resolent nous interrogants i noves situacions, fet que ens ha de posar en alerta davant el rendiment o l'aprenentatge que es pot generar en activitats independents o desconnexionades que demanen només un resultat d'uns determinats valors que es donen.



L'adquisició del poder d'abstracció i generalització matemàtica ha de ser i és el vertader i més important objectiu de l'aprenentatge matemàtic, de manera que, sense aquesta adquisició, allò que es fa com a acció matemàtica, si no s'ha planificat per arribar a aquesta fita d'abstracció i generalització, no es pot dir que el que es treballa sigui de veritat fer matemàtiques.

És obvi que conquerir aquest poder matemàtic no resulta ni és gens fàcil, com tampoc no ho és pujar a l'Everest. Tot escalador sap molt bé que per emprendre aquesta conquesta el que no pot fer és situar-se de cop i volta al camp 6 sense haver fet el procés d'adaptació al camp base i posteriorment anar-lo repetint en altres bases prèvies al camp 6. Situar-se de cop i volta al camp 6 i llançar-se a conquerir les altures és garantia de fracàs i probablement de la pròpia mort. També en l'àmbit matemàtic no podem posar els nostres escaladors a la conquesta del cim de l'abstracció i la generalització situant-los en camps que necessiten una adequació prèvia. Sovint, i de manera normal, en el nostre procés didàctic situem l'alumnat perquè iniciï la seva escalada d'aprenentatge des del camp 6, que en els estadis didàctics significa partir dels treballs de simbolització numèrica o, el que és el mateix, el treball de llapis i paper. Situar l'alumnat de cop i volta en aquest estadi simbòlic pot comportar greus problemàtiques, com pot ser la de «cremar motors» per forçar-ne les seves revolucions. Com més petits són els nostres alumnes més important és dedicar temps al camp base de la vivenciació, fase d'adaptació comprensiva imprescindible i sense la qual a l'alumnat li resulta complicat entendre el que representa aquell concepte, aquell problema o aquella situació a la qual l'enfrontem.

Treballar amb consciència i domini de les metodologies didàctiques comporta plantejar les seqüències didàctiques de manera que evolucionin de la vivenciació a la manipulació i, d'aquesta, a la simbolització per arribar a la fita última de l'abstracció. Seguir aquest camí resulta un factor clau per a la comprensió matemàtica i, per tant, del posterior desvetllament del raonament competencial matemàtic.

Resulta obvi, per tant, que per potenciar la innovació didàctica a les nostres aules sota l'objectiu general de millorar la comprensió dels aprenentatges i convertir-los en competencials, siguin matemàtics o de qualsevol altra tipologia, cal canviar i evolucionar des de la resolució a la competència i de la vivenciació a l'abstracció en el nostre fer diari. Només així aconseguirem que el nostre alumnat comprengui i gaudeixi de les matemàtiques i que es converteixi en competencial al servei de la vida i, a través d'ella, controli i domini l'espai i el temps que li correspon viure.

6. Bibliografia

AATT (1998). Resolució de problemes. *Biaix*, 13. Girona.

— (1996). La resolución de problemas. *UNO*, 8. Barcelona: Graó.

Callís, J. (2006). Saber analitzar i gestionar (identificar, interpretar, transcriure, transferir i avaluar) les situacions i els contexts educatius. Dins A. Geli, *Aproximació a les noves competències en els nous títols de mestres* (p. 123-127). Girona: UdG.

— (2008). El què, com, quan i perquè de la manipulació. *Manipular per aprendre: Perspectiva Escolar*, 329, 8-21. Barcelona: Associació de Mestres Rosa Sensat.

— (2010). De la vivenciació a l'abstracció o el camí vers la competència matemàtica. *Perspectiva Escolar*, 341, 2-16.

Callís, J., Callís, C. (2007). Competències matemàtiques: necessitats i perspectives. *Escola Catalana*, 445, 9-13.

Callís, J., Mallart, A. (2011). Adquisició i desenvolupament de la competència matemàtica. *Revista Catalana de Pedagogia*, 7, 113-136.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid. MEC.

Freire, P. (1972). *Cultural action for freedom. Harmonds worth*. Londres: Penguin Education.

Gardner, H. (2003). *La inteligencia reformulada. Las inteligencias múltiples en el siglo xxi*. Barcelona: Paidós.

Gascon, J. (1992). Què s'entén per resolució de problemes de matemàtiques?. *Biaix*, 2, 10-17. Reus.

Habermas, J. (1974). *Theoryand Practice*. Londres: Heinemann.

Lakatos, I. (1977). *Proofsand Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press. [Trad. castellà: *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza Editorial, 1981]

Lieblich, A., Tuval-Mashiach, R., Zilber, T. (1998). *Narrative Research. Reading, Analysis and Interpretation*. Newbury Park, CA: Sage.

Mason, J., Burton, L., Stancey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor, MEC.

Polya, G. (1957). *How to Solve It*. Princeton: Oxford University Press.

Schoenfeld, A. H. (1981). Episodes and executive Decisions in Mathematical Problem Solving. Dins *Convention Annual of the AERE. Los Angeles. Research in Mathematics Teaching and Learning* (p. 334-389). Nova York: Mac Millan.

— (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. Dins D. A. Grouws (ed.). *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 334-370). Nova York: Macmillan.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insigth*. Nova York: Academia Press.

Vila, A. (1998). La idea de problema entre l'alumnat: reflexions per a la creació d'un ambient de resolució de problemes a l'aula. *Biaix*, 11, 16-22. Reus.

Vygotsky, L. S. (1996). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.