

# Matemàtiques amb eines digitals

**Lluís Mora Cañellas**

Cesire-Creamat

Departament de Didàctica de les Matemàtiques

Universitat de Barcelona

## Resum

Abans d'utilitzar les eines digitals per tal de treballar les matemàtiques, o qualsevol altra assignatura, hem de decidir quines matemàtiques volem treballar. Però aquesta decisió ha d'anar acompanyada de la selecció de la metodologia que utilitzarem per treballar-les a l'aula. Amb els continguts i la metodologia no n'hi ha prou, hem de tenir en compte un tercer element: l'avaluació d'aquests continguts. Un cop establerts aquests elements previs podrem decidir la utilització de les eines digitals que considerem necessàries per a desenvolupar el treball que volem realitzar. En l'article mostrarem, fruit del treball com a professor en un institut, que aquestes eines es poden classificar de dues maneres: a) eines útils per a desenvolupar el treball matemàtic, i b) eines útils per a contenir les activitats matemàtiques que hem desenvolupat. Finalitzarem l'article mostrant una activitat realitzada en una classe de 3r d'ESO de l'IES Llavaneres que intenta congregar tots els elements mostrats anteriorment.

## Abstract

*Before using digital tools in the math classroom we must decide what kind of math we want to teach. This decision must be accompanied by the choice of what classroom methodology we have to use in this task. But content and methodology is not enough, we have to consider a third element: the students assessment related with the kind of math and his methodology. Once these elements are determined we have to choose the digital tools that we consider necessary to carry out. As a teacher and a researcher, the paper shows that these tools can be classified in two ways: a) tools to develop the mathematical work, and b) useful tools to contain the mathematical activities. At the end the article, we show an activity performed in 3rd ESO math classroom at the INS Llavaneres, where we trying to combine some of the elements listed above.*

## 1. Introducció

En les classes de matemàtiques sempre s'han pogut utilitzar els mitjans tecnològics: àbacs, regles de càlcul, calculadores, ...un cordill i un pal per dibuixar a terra. En els darrers anys, aquests mitjans tecnològics s'han anat desenvolupant exponencialment amb els ordinadors, de manera que moltes de les «antigues» eines tecnològiques han trobat el seu equivalent digital instal·lat en els ordinadors o en els telèfons digitals que pràcticament tothom té al seu abast. És clar, doncs, que quan parlem de noves tecnologies ens estem referint a tecnologies digitals, o «numèriques», com diuen els francesos, definició que personalment prefereixo atès que representa millor el tipus de tecnologia al qual ens estem referint.

Aquest ús massiu de les eines digitals ha de comportar canvis en el funcionament de les aules i en els materials amb què hauran de treballar els nostres alumnes. Mitra (1999) mostra que la introducció d'ordinadors pot fer que els estudiants puguin ser els qui condueixin l'adquisició dels seus aprenentatges. Leadbeater i Wong (2010) ens mostren que el treball amb ordinadors pot induir l'aprenent a treballar de manera més creativa i col·laborativa, i portar, per tant, a un ensenyament més personalitzat.

Però penso, com Adell (2011), que allò realment important no és la tecnologia, sinó el que els nostres estudiants poden fer amb ella. El cordill i el pal eren importants, atès que el dibuix d'un cercle, o d'una el·lipse, era útil per algun propòsit previ. Primer hi ha una idea i les eines ens han de permetre assolir-la; dit d'una altra manera, les eines han d'estar al servei del que volem fer. No podem oblidar, com ens recorda Bates (2014), que la tecnologia no és neutral; per la qual cosa no l'hem de posar davant de les idees. Els mitjans no han de ser més importants que les tasques a realitzar i les competències a assolir. Allò important seran les tasques que els estudiants desenvolupin.

A partir d'aquestes idees parlarem primer de la formació matemàtica que hauríem de donar als nostres estudiants. En aquest bloc, tindrem en compte tres aspectes: primer de tot, els continguts matemàtics que cal treballar; en segon lloc, la manera com hem de treballar aquests continguts a les nostres aules, i per finalitzar aquest primer apartat, com avaluarem aquest treball matemàtic que hem desenvolupat.

Un cop establert aquest punt de partida, ens cal decidir quines són les eines digitals que utilitzarem per tal de fer el nostre treball. I sempre tenint present que han de ser eines que ens ajudin a treballar els continguts matemàtics amb la metodologia proposada i a fer-ne l'avaluació, amb l'objectiu que els estudiants assoleixin la competència matemàtica. En aquest sentit, entenem que podem classificar les eines digitals en dos tipus: a) Eines que donaran suport als continguts, i b) Eines que donaran suport a l'organització de les tasques i els continguts.

## 2. Formació matemàtica

Seguint les idees exposades en l'apartat anterior, el primer que hem de fer és plantejar-nos quina formació matemàtica (general) volem donar als nostres estudiants. Aquí haurem de tenir en compte tant els continguts com la metodologia i l'avaluació.

## 2.1. Quines matemàtiques?

La tesi de l'article és que s'han d'ensenyar els continguts matemàtics a través de la resolució de problemes. I aquest procés no ha d'estar subordinat als continguts que es treballin. Seguint la línia indicada per Santaló quan diu:

Ensenyar matemàtiques ha de ser equivalent a ensenyar a resoldre problemes.  
Estudiar matemàtiques no ha de ser res més que pensar en la solució de problemes.

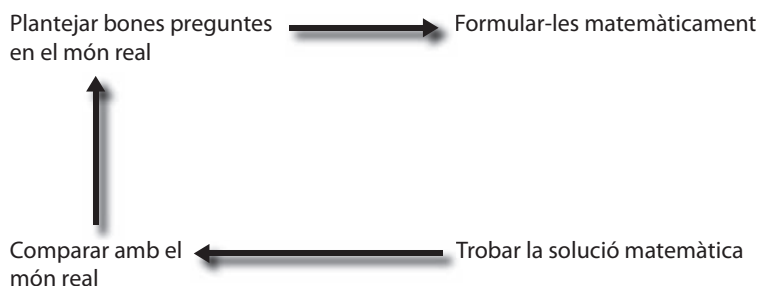
O el que ens diu John Mason:

Volem que els nostres estudiants tinguin prou confiança i capacitat per reproduir problemes antics i, sobretot, per treballar amb nous problemes.

O el que ens diu Halmos (1980):

La matemàtica segurament no existiria sense tots aquests ingredients (axiomes, teoremes, postulats, conceptes, definicions, teories, fórmules, mètodes); tots són essencials. Però cap d'ells és el cor de la disciplina, ja que la principal raó d'existir d'un matemàtic és resoldre problemes i, per tant, en el que realment consisteix la matemàtica és en [plantejar] problemes i [trobar les seves] solucions (p. 519).

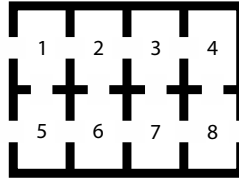
Tenim moltes referències sobre el que entenem per problemes i la seva resolució; podem anar al NCTM, mirar el currículum català del 2007 tant de primària com de secundària, però es pot entendre que un problema va lligat a una situació que ens porta a enfrontar-nos a un nou repte, situat en un context i per al qual no disposem d'una resposta immediata i estàndard. Per tant, aquest procés ens requerirà entendre la informació rebuda, reflexionar-hi, prendre decisions, dissenyar estratègies i comunicar els resultats. Una altra referència a tenir en compte és la de Wolfram (2010) en la conferència que va fer a TED, «Teaching kids real math with computers», on relaciona clarament (esquema 1) què vol dir fer matemàtiques amb el procés de resolució de problemes.



**Esquema 1. Què representa fer matemàtiques.**

Poden ser exemples de problemes les situacions següents a diferents nivells educatius.

Un elefant ha d'entrar i sortir d'un laberint. Al seu interior hi ha moltes habitacions. Dins de les habitacions hi ha plàtans (el número que hi ha a cada habitació representa el nombre de plàtans que hi ha a l'habitació). Cada vegada que passa per una habitació recull els plàtans que troba. No pot passar per les habitacions més d'una vegada. Amb quants plàtans pot sortir?



O, per exemple, l'activitat següent proposada al concurs +MATES l'any 2010:

*Sumes curioses (+Mates 10)*

Observeu les sumes següents.

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 1 - 4 &= -(1 + 2) \\
 1 - 4 + 9 &= 1 + 2 + 3 \\
 1 - 4 + 9 - 16 &= -(1 + 2 + 3 + 4)
 \end{aligned}$$

Podeu escriure la regla general? Com la podeu justificar?

És important assenyalar que un treball matemàtic d'aquesta mena afavoreix l'assoliment per part dels estudiants dels processos que s'intenten potenciar amb l'actual currículum. Aquests processos són: resolució de problemes, raonament i prova, comunicació i representació i connexions. En els documents editats pel Departament d'Ensenyament (2013), «Competències bàsiques en l'àmbit matemàtic», tant pel que fa a primària com a secundària, això es mostra clarament.

Si analitzem el currículum actual, veurem que està clarament orientat a processos, en front de currículums anteriors més orientats a objectius. En la taula següent en podem veure clarament les diferències entre els dos tipus de currículum.

Orientat a processos	Orientat a objectius
Els objectius són flexibles.	Objectius generals formulats amb precisió.
Model de descobriment. Mètode científic.	Es transmeten fonamentalment idees al voltant de tècniques.
Participació activa de professors i estudiants.	Activitats tancades i repetitives.
Es valora el procés d'adquisició de coneixements.	Importància de les destreses.
	Produir resultats de coneixement quantificables i normalitzables.

El tipus de treball que es pot desenvolupar en un currículum guiat per objectius s'orienta a la transmissió de coneixements i al treball d'habilitats enfront del treball enfocat a la resolució de problemes, o a la indagació que permet l'orientat a processos. Aquesta diferència, Flowers (2012), és la mateixa que la que hi ha entre instrucció (objectius) i educació (processos).

I believe that education and training are different. To me, training is an essential commodity that will certainly be outsourced to digital systems and be dramatically improved in the process. Education is much more subtle and complex and is likely to be accomplished through mentorship or apprentice-like interactions between a learner and an expert.

## 2.2. Com volem treballar-les?

La resolució de problemes és la base del treball matemàtic que volem desenvolupar, però val a dir que, amb lleugeres diferències, aquí també hi podem incloure el treball per projectes, la indagació, etc. Ens cal precisar una metodologia d'acord amb aquest treball. En aquest aspecte, hem de ser innovadors i escoltar els gegants, tant Puig Adam (1958) com Polya (1967), en els seus decàlegs sobre el treball matemàtic. A partir d'aquestes idees, el treball matemàtic necessita una metodologia d'aula-taller, de laboratori, on es treballi seguint les etapes següents:

- a) Una introducció a les activitats que desenvoluparem. On es presentaran els objectius que volem assolir.
- b) Presentar les investigacions, els problemes i els projectes.
- c) Treball en petit grup.
- d) Discussió i contrast en gran grup.
- e) I si escau, realització d'altres activitats relacionades, que recullen també Alsina, Burgués i Fortuny (1988).

## 2.3. Com volem avaluar-les?

Aquest aspecte segurament és el més difícil al qual ens hem d'enfrontar si volem avaluar les matemàtiques que ens hem proposat treballar i de la manera que volem fer-ho.

Però tenim referents que ens orienten en aquest procés. De Lange (1999) n'és un. Al document «Framework for classroom assessment in Mathematics» ens estableix un decàleg de principis de l'avaluació a classe. A partir d'aquests principis ens proposem els aspectes següents per a realitzar una avaluació equilibrada:

- a) Totes les activitats que realitzem han de ser avaluables.
- b) Cal treballar diversos tipus d'activitats: orals, escrites, individuals, en grup, pràctiques, teòriques...
- c) Els estudiants han de poder disposar de tota la informació que es generi en el procés d'avaluació.
- d) Cal establir mecanismes d'autoavaluació. En el sentit que els estudiants siguin conscients dels seu grau d'aprenentatge.

De Lange també ens diu com han d'estar constituïdes les proves, de tota mena, que ens han de servir per recollir la informació per tal d'avaluar d'una manera adequada.

Aquesta informació es resumeix en la figura 1.

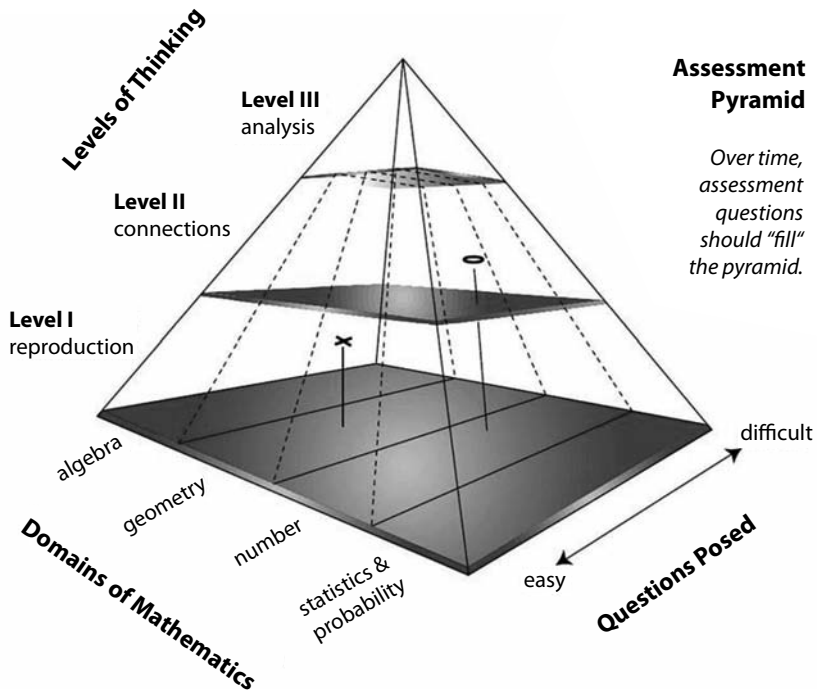


Figura 1. De Lange Pyramid for assessment.

En síntesi, creiem que podem afegir que hem de procurar que, en totes les activitats que realitzem, siguin d'avaluació o no:

- a) Ha d'haver-hi elements dels diversos blocs de contingut matemàtic del currículum, amb diversos graus de dificultat, i
- b) Han de predominar les activitats del nivell de «reproducció», però també n'hi ha d'haver, en menor mesura, del nivell de connexions i del nivell de reflexió (anàlisi).

Amb aquestes dues darreres reflexions i els quatre criteris esmentats podem avaluar el treball dels estudiants. Un cop establert el que hem de fer, com fer-ho i com avaluar-ho, ens cal buscar les millors eines informàtiques per tal de poder realitzar la tasca. Això és el que farem als apartats següents.

### 3. De quins mitjans digitals podem disposar per desenvolupar-les?

Què volem dels mitjans digitals?

Què podem aconseguir dels mitjans digitals?

Com els podem utilitzar per canviar com s'aprenen les matemàtiques?

Les eines que podem utilitzar per a desenvolupar el treball matemàtic, les podem classificar en dos tipus: aquelles que ens permeten directament el treball matemàtic, una de les quals podria ser el GeoGebra, i aquelles que actuen com a contenidors de les tasques matemàtiques que volem treballar, entre les quals, s'inclouen aquelles eines que ens ajuden en el treball; el Moodle en podria ser un exemple, entre d'altres. Però abans de veure quines eines podem incloure en cadascun dels dos apartats, ens cal establir alguns criteris per veure quines, del gran ventall d'eines disponibles, poden ser les més interessants, atès que volem que els nostres estudiants assoleixin la competència matemàtica, però també cal que siguin competents digitalment. En aquest apartat de l'article veurem, doncs, tres aspectes:

- a) Quines característiques volem que tinguin les nostres eines digitals, tant per als estudiants com per als professors. Què volem d'aquests mitjans digitals?
- b) Quines eines podem considerar que donen un bon suport als continguts.
- c) Quines eines donen suport a l'organització i a la presentació de les tasques a desenvolupar.

### 3.1. Què volem d'aquests mitjans digitals?

Els mitjans digitals que utilitzarem a l'aula s'adreçaran a estudiants i professors. Per tant, ens hem de plantejar quines característiques volem que potencïin en ambdós col·lectius. Com en molts altres aspectes ja tenim referents en aquest apartat. Podem veure com l'ISTE (International Society for Technology in Education), de la mateixa manera que l'NCTM, ha elaborat un seguit d'estàndards referits als mitjans digitals adreçats a professors i alumnes.

#### **Estàndards referits a estudiants**

Volem que les eines digitals que utilitzem a l'aula permetin als estudiants:

- Demostrar creativitat i innovació.
- Comunicar i col·laborar.
- Dur a terme investigacions i utilitzar informació.
- Pensar críticament, resoldre problemes i prendre decisions.
- Utilitzar la tecnologia de manera eficaç i productiva.

És important assenyalar la semblança que hi ha entre aquests darrers aspectes amb el tipus de matemàtiques que hem proposat que s'han de treballar a l'aula.

Però les eines digitals també seran utilitzades pel professorat; per tant, també hi ha d'haver uns estàndards adreçats a aquestes persones. De fet, el web 2.0 preveu un canvi de rol d'estudiants i professors a les aules. Ha d'augmentar la interacció, i sobretot, deixaran de ser usuaris per convertir-se en creadors.

#### **Estàndards referits a professors**

Volem que permetin als professors:

- Disposar de materials per facilitar l'aprenentatge dels estudiants.
- Facilitat d'integració amb altres eines.

- Dissenyar i desenvolupar escenaris d'aprenentatge i avaluació.
- Recollir informació dels treballs realitzats pels estudiants.
- Compartir informació amb els estudiants i amb altres professors.

Aquests estàndards ens donen criteris per decidir si una eina digital és adequada per a la tasca que volem fer o no. Així, podem utilitzar la taula 1 per valorar les potencialitats i les debilitats de les eines digitals.

<b>Per als estudiants</b>	<b>Possibilitats que ofereix</b>
Demostrar creativitat i innovació.	
Comunicar i col·laborar.	
Dur a terme investigacions i utilitzar informació.	
Pensar críticament, resoldre problemes i prendre decisions.	
Utilitzar la tecnologia de manera eficaç i productiva.	
<b>Per als professors</b>	<b>Possibilitats que ofereix</b>
Disposar de materials per facilitar l'aprenentatge dels estudiants.	
Facilitat d'integració amb altres eines.	
Dissenyar i desenvolupar escenaris d'aprenentatge i avaluació.	
Recollir informació dels treballs realitzats pels estudiants.	
Compartir informació amb els estudiants i amb altres professors.	

**Taula 1. Potencialitats i debilitats de les eines digitals.**

L'ús d'aquesta taula per revisar els estàndards que permet assolir o no una determinada eina digital ens permetrà saber, entre d'altres coses, si aquesta eina es pot utilitzar d'una manera individual o cal que el seu ús es complementi amb altres eines. Així, per exemple, si analitzem una eina digital, ja mencionada anteriorment, el GeoGebra, amb la taula anterior obtenim el resultat següent:

<b>Per als estudiants</b>	<b>Possibilitats que ofereix</b>
Demostrar creativitat i innovació.	Permet crear dibuixos, macros per personalitzar treballs.
Comunicar i col·laborar.	És una eina de treball individual, tot i que permet que amb un treball determinat hi puguin interactuar amb altres persones.
Dur a terme investigacions i utilitzar informació.	Permet l'avaluació de diverses situacions fent canvis en les condicions dels problemes plantejats.



<b>Per als estudiants</b>	<b>Possibilitats que ofereix</b>
Pensar críticament, resoldre problemes i prendre decisions.	Es poden resoldre problemes geomètrics, i en el moment que podem canviar la situació, ens pot ajudar a prendre decisions.
Utilitzar la tecnologia de manera eficaç i productiva.	Segur que sí.
<b>Per als professors</b>	<b>Possibilitats que ofereix</b>
Disposar de materials per facilitar l'aprenentatge dels estudiants.	Les associacions de GeoGebra i professors posen a disposició dels professors multitud de materials per al treball amb aquesta eina.
Facilitat d'integració amb altres eines.	Es poden inserir els treballs creats en blogs, pàgines web o altres.
Dissenyar i desenvolupar escenaris d'aprenentatge i avaluació.	Hi ha molts exemples.
Recollir informació dels treballs realitzats pels estudiants.	No permet fer-ho.
Compartir informació amb els estudiants i amb altres professors.	La informació es pot compartir, però no permet la interacció. És comparteix l'ús.

**Taula 2. Valoració GeoGebra.**

Encara que amb el GeoGebra disposem d'una eina molt completa, els aspectes que fan referència a recollir informació del treball dels estudiants i compartir aquesta informació poden ser millorables. Han de ser utilitzades conjuntament amb altres eines digitals.

### 3.2. Eines que donen un bon suport als continguts de matemàtiques

Ja hem comentat que el GeoGebra, segons com s'utilitzi, pot ser una eina molt completa per al treball matemàtic. És interessant comentar que, atès el desenvolupament que s'està donant en la web, hi ha moltes eines que engloben diversos aspectes. Per tant, la seva classificació pot variar.

Altres eines útils per a desenvolupar el treball matemàtic les trobem en la taula 3.

<b>Eines útils</b>	<b>Adreça web</b>	
GeoGebra	<a href="http://acgeogebra.cat/joomla">http://acgeogebra.cat/joomla</a>	Geometria dinàmica.
Wolfram Alpha	<a href="http://www.wolframalpha.com">http://www.wolframalpha.com</a>	Cercador computacional i creador de ginyes.
Illuminations	<a href="http://illuminations.nctm.org">http://illuminations.nctm.org</a>	Font de recursos diversos. Lliçons, activitats digitals.
Nrich	<a href="http://nrich.maths.org/frontpage">http://nrich.maths.org/frontpage</a>	Font de problemes, alguns amb recursos digitals. Des de p3 fins a 18 anys.

<b>Eines útils</b>	<b>Adreça web</b>	
ARDORA 6	<a href="http://webardora.net">http://webardora.net</a>	Creació de continguts escolars.
WEBQUEST	<a href="https://sites.google.com/site/webquestcathome">https://sites.google.com/site/webquestcathome</a>	Metodologia de treball amb suport digital.
Estadística para todos	<a href="http://www.estadisticaparatodos.es">http://www.estadisticaparatodos.es</a>	Ús d' <i>applets</i> i del full de càlcul.
eduteka	<a href="http://www.eduteka.org">http://www.eduteka.org</a>	Portal educatiu que inclou diversos apartats. Tots útils.
Scratch	<a href="http://scratch.mit.edu">http://scratch.mit.edu</a>	Eina de programació.

**Taula 3. Eines digitals per treballar les matemàtiques.**

Moltes d'aquestes activitats també tenen espais webs col·laboratius en què les persones que els utilitzen hi acostumen a penjar les activitats que desenvolupen.

Hem de ser conscients que hi ha moltes eines digitals. Sembla clar que tots els professors hem d'experimentar, provar, aquelles eines que s'acostin a la nostra manera de treballar. Si aquesta eina s'hi adapta cal aprofundir en el seu ús, i si no, cal buscar-ne alguna de nova, que de ben segur existeix.

<b>Eines útils</b>	<b>Adreça web</b>	
Google Docs	<a href="https://drive.google.com">https://drive.google.com</a>	Paquet integrat que inclou processador de textos, full de càlcul, espai web, formularis. Multiplicitat de funcionalitats.
Wix	<a href="http://es.wix.com">http://es.wix.com</a>	Creador d'espais web.
EXE Learning	<a href="http://exelearning.net">http://exelearning.net</a>	Dissenyador d'activitats que permet el disseny d'espais web així com d'activitats SCORM.
Wikispaces	<a href="https://www.wikispaces.com">https://www.wikispaces.com</a>	Espai web que permet organitzar documents, enllaços i altres tasques.
CMAP Tools	<a href="http://cmap.ihmc.us">http://cmap.ihmc.us</a>	Disseny de mapes conceptuals, i també ens permet dissenyar espais web que faciliten l'accés a les activitats digitals dissenyades.
Cool Tools for Schools	<a href="https://cooltoolsforschools.wikispaces.com">https://cooltoolsforschools.wikispaces.com</a>	Espai wiki que recull una gran quantitat d'eines que podem utilitzar per a presentar les tasques.

**Taula 4. Eines que ajuden a organitzar les activitats.**

### 3.3. Eines que donen suport a l'organització i a la presentació de les tasques

Aquestes eines són les que ens ajudaran a presentar i donar forma a les tasques que pretenem que facin els nostres estudiants. Les que hem escollit per utilitzar entenem que són les que s'adapten al tipus de treball matemàtic que volen desenvolupar i que compleixen els estàndards per al treball digital. Val a dir que poques eines, per no dir cap, compleixen tots els estàndards digitals. Per tant, és imprescindible utilitzar-ne una combinació. A la taula 4 en veiem un recull.

Les darreres versions de moltes d'aquestes eines presenten una característica molt important: permeten el treball col·laboratiu sense haver de compartir ordinadors o espai físic. També cal tenir present que en les tasques que treballem no utilitzarem sempre totes les eines digitals disponibles; només utilitzarem aquelles que ens siguin interessants per tal de poder desenvolupar el treball matemàtic concret que ens hem proposat. Sempre cal, per part del professorat, una selecció de les eines que hem d'utilitzar.

Podem trobar altres eines que ens poden permetre arribar als mateixos resultats. No hi ha eines millors o pitjors; hi ha eines útils per a professors i estudiants o eines no tan útils, i tothom ha de trobar les que el facin sentir més còmode.

## 4. Un exemple: les truites al llac

Mostrarem ara com podem aplicar el que hem proposat en els apartats anteriors de l'article a una activitat per tal que pugui ser treballada amb mitjans digitals. Per mostrar-ho, hem seleccionat una activitat anomenada «Les truites al llac» i que es pot treballar a l'aula a partir de 3r d'ESO.

Inicialment, l'enunciat d'aquesta activitat és:

Cada primavera, un estany és repoblat amb truites. És a dir, la població disminueix cada any per causes naturals, però al final de cada any s'afegeixen més peixos. Les dades que ens cal saber són:

- Actualment hi ha 3.000 truites a l'estany.
- A causa de la pesca, la mort natural o altres circumstàncies, la població disminueix en un 20% cada any, independentment de la reposició.
- Al final de cada any, mil truites s'afegeixen a la llacuna.

- A. Quantes truites hi ha després del primer any de començar el procés a l'estany? I al final del segon any, quantes truites hi tindrem?
- B. Com creieu que la població canviarà en el temps si els paràmetres inicials canvien? És a dir, què succeirà si es realitza un canvi en el nombre inicial de peixos, en la velocitat a la qual la població disminueix o en el nombre de truites que es reposa cada any?

Per tal de realitzar la conversió digital, hem utilitzat com a base el programa EXE Learning amb formularis realitzats amb l'eina google docs. I atès que es fa una demanda relativa a investigar com canviaran uns determinats paràmetres amb el temps hem inclòs la possibilitat de tre-

ballar amb un full de càlcul o amb un *applet*, enllaçat en el web Il·luminacions per tal d'experimentar amb les dades que ens planteja el problema. També utilitzem el tractament de textos de google docs per a la presentació d'informes.

La idea del treball digital que ens vam proposar era que els estudiants fessin ús de les eines anteriors per tal de realitzar totes les tasques. Es podria haver pensat l'activitat de manera que els estudiants realitzessin un dossier en format pdf i l'enviessin via correu electrònic. Però aquesta no era la idea. Per tant, vam haver de fer una adaptació de l'activitat. Això va voler dir modificar una mica l'estructura de l'activitat, en base al tipus de matemàtiques que volíem treballar i a la manera de treballar-les.

Podeu trobar la versió digital d'aquesta activitat a:

[http://walipi.webatu.com/nous\\_projectes/lestany\\_truites/index.html](http://walipi.webatu.com/nous_projectes/lestany_truites/index.html)

i una versió amb la documentació en format pdf o word en el repositori del Department d'Ensenyament ARC, a l'adreça:

<http://apliense.xtec.cat/arc/node/1773>.

#### 4.1. L'estany de les truites digital

Aquestes pantalles estan extretes de l'espai web on es troba allotjada l'activitat. I les utilitzarem per mostrar la conversió digital de l'activitat.

**L'estany de les truites**

**Objectius**

- Treballar en un problema on intervien tres variables: truites en un estany, percentatge de disminució i increment absolut d'aquesta població.
- Utilitzarem formularis, full de càlcul, taules i gràfics per tal de treballar i comprendre el problema
- Veure que un fenomen es pot estudiar simbòlicament, gràficament i analíticament.
- Realitzar una petita recerca, amb canvis en les tres variables, per tal de conèixer la variació de la població a l'estany.
- Elaborar un informe que reculli el treball realitzat
- Finalitzar la tasca amb la redacció de les conclusions sobre la tasca realitzada.

**INFORMACIÓ DEL PROBLEMA**

Cada primavera, un estany de truites és repoblat amb aquests peixos. És a dir, la població disminueix cada any a causa de causes naturals, però al final de cada any, s'afegeixen més peixos. Les dades que ens cal saber són:

- Actualment hi ha 3.000 truites a l'estany.
- A causa de la pesca, la mort natural o altres causes, la població disminueix en un 20% cada any, independentment de la reposició d'existències.
- Al final de cada any, 1.000 truites s'afegeixen a la llacuna.

**Hipòtesi inicial de la situació**

1.- Explica i intenta justificar com creus que creixerà la població de truites de la llacuna. Has d'explicar si creus que creixerà indefinidament, creixerà fins arribar a un límit, o la població anirà augmentant i disminuint alternativament, o si anirà disminuint fins a desaparèixer.  
Es possible predir la població de la llacuna després d'un nombre determinat d'anys, 50 per exemple? Com es podria fer tal predicció?

Reflexiona i respon

**Imatge 1. Objectius de l'activitat.**

La imatge 1 mostra els objectius de l'activitat; es dona informació rellevant del problema i es demana la formulació d'una hipòtesi, que quedarà recollida en un formulari.

**?** 2.- Truites a l'estany

Quantes truites hi ha després del primer any de començar el procés a l'estany?

3100

3200

3300

3400

3500

I al final del segon any, quantes truites i tindrem?

3710

3720

3730

3740

3750

3.- Reflexió

Icona iDevice

3. Creus que és possible predir la població de truites de la llacuna després d'un nombre determinat d'anys, 50 per exemple? Com es podria fer tal predicció?

Reflexiona i respon.

Prem ací

4.- Reflexió

Icona iDevice

La paraula **SEGÜENT** representa la població de l'any que ve, i **ARA** representa la població d'aquest any. Escriu una equació usant **SEGÜENT** i **ARA** per representar les hipòtesis donades anteriorment. Expliqueu per quin motiu la vostra equació explica el procés que succeeix a l'estany. Podeu trobar una manera més funcional de representar l'equació?

Reflexiona i contesta

Prem ací

**Imatge 2. Subactivitats.**

A la imatge 2, hi podem veure tres activitats diferents. La primera és un exercici d'aplicació directa d'un càlcul. Als estudiants, se'ls donen diverses possibles respostes i ells hauran d'assenyalar aquella que considerin adequada. Quan responen apareix una retroalimentació que els informa de la validesa de la seva resposta. Aquesta part de l'activitat finalitza amb dues activitats de reflexió. Primer, ara que ja han treballat amb les dades del problema, han de fer una predicció a llarg termini del nombre de truites que hi haurà a l'estany. I en la segona, se'ls demana que trobin una fórmula de recurrència que els permeti obtenir el nombre de truites en un any concret a partir de les truites que hi havia l'any anterior.

A la imatge 3 es mostra la part de l'activitat en què utilitzarem un full de càlcul. S'ha d'utilitzar per elaborar una taula del nombre de truites en funció dels anys i un gràfic que representi aquestes dades. Amb aquesta informació s'ha de validar la hipòtesi formulada i intentar raonar si és adequada o no. Podem utilitzar dues versions del full de càlcul; en una, els estudiants han d'elaborar la fórmula de recurrència per determinar el nombre de truites al llac, i en la segona es pot donar aquesta informació als estudiants.

Finalment, es demana descriure el gràfic que han obtingut amb la idea de relacionar-lo amb la fórmula trobada.

**INFORMACIÓ**

Per tal de realitzar les activitats següents pots utilitzar el següent full de càlcul. L'haureu de guardar en el vostre espai de documents de google per tal de poder treballar-hi. Si feu el treball en grup, haureu de compartir el fitxer amb tots els membres del grup.

Full de càlcul.

5.- Reflexió

Icona iDevice

Primer de tot, amb aquest full avaluem la vostra conjectura inicial. L'heu confirmada o no? Expliqueu-ne els motius d'una cosa o de l'altra.

Reflexiona i contesta

Prem ací

Activitat: la representació gràfica

Ara anirem a representar gràficament les dades que hem obtingut. Això ho farem a partir del full de càlcul anterior. En el full de càlcul hem inserit un gràfic amb l'eina "Insereix un gràfic". Si has completat les dades fins a la fila 50 pots veure el gràfic que correspon.

Contesta ara les següents preguntes:

1. Descriu les característiques del gràfic
2. Explica quina informació et dona de la població de truites a l'estany.
3. Com s'indica en el gràfic la població a llarg termini de les truites a l'estany.

Reflexiona i respon

Imatge 3. Activitat en què utilitzem un full de càlcul.

Cas d'estudi: La població de truites a l'estany

Des de la direcció del parc natural que gestiona l'estany ens han encarregat un informe sobre la població de truites que hi ha a l'estany. Per fer-ho hem d'estudiar els tres paràmetres importants: La població inicial, el factor de creixement i la reposició de peixos.

Hem de respondre les següents qüestions: Com creieu que la població canviarà en el temps si els paràmetres inicials canvien? És a dir, que succeirà si es realitza un canvi en el nombre inicial de peixos, la velocitat a la qual la població disminueix, o en el nombre que es reposa cada any?

Les següents preguntes us poden ajudar:

1. Si la població inicial es duplica, que succeirà a la població a llarg termini? I si és triplica? I si ...
2. Si la quantitat de reposició d'existències anual es duplica, que succeirà a la població a llarg termini? I si és triplica? I si ...
3. Si la taxa de disminució anual de la població es duplica, que succeirà a la població a llarg termini? I si es redueix a la meitat? I si és triplica? I si ...

**Activitat**

Haureu d'elaborar un informe per escrit, elaborat amb un document de google docs, on respongueu detalladament totes les preguntes formulades anteriorment i d'altres que se us puguin acudir. Ha de ser el màxim de complet, això vol dir que heu d'utilitzar taules, gràfics, etc.

Per acabar haureu d'elaborar una presentació amb la finalitat de fer arribar aquesta informació als responsables del parc.

Mostra Reallimentació

$A(n) = r A(n-1) + b, \quad A(0) = s$

**Directions:**


Change the values of each of the following:

$s$  = Initial Population Size  
 $b$  = Yearly Restocking Amount  
 $r$  = Growth Factor

Imatge 4. Cas d'estudi i ús d'un applet.

A la imatge 4 es mostra com l'activitat es planteja com una petita recerca. Cal elaborar un informe on s'expliqui com pot evolucionar el nombre de truites a l'estany en funció dels tres paràmetres que poden anar variant. Sempre estudiant-los d'un en un. Podrem canviar la població inicial, la quantitat de truites que reposem i el factor de creixement. Per fer-ho podran disposar d'un *applet* per tal de poder fer els canvis que necessiten per obtenir respostes. També, si ho prefereixen, poden utilitzar el full de càlcul que s'ha dissenyat. L'informe per escrit s'ha de fer en un document de text creat amb el Google docs que s'haurà de compartir amb el professor.

I per finalitzar, a la imatge 5 veiem que en l'activitat només resta intentar trobar una fórmula que expliqui la distribució de truites al llarg del temps en funció dels tres factors, i l'elaboració d'un informe on es recullin les descobertes i altres aspectes al voltant de la tasca realitzada. Aquest informe s'ha de realitzar en un document de text a partir del Google docs.

 **Activitat final: trobem la fórmula**


Ara intenta trobar la fórmula explícita.  
 La fórmula explícita és una expressió del tipus:  
 $A(n)$  = alguna expressió que inclou  $n$  però no  $A(n-1)$ , on  $n$  són els anys (el temps) i  $A(n)$  representa el número de truites en el riu. Inclou  $n$  (número d'anys que han passat) i  $A(n-1)$  és el número de truites que hi havia l'any anterior. Heu de trobar una expressió del tipus

$A(n)$  ( $n^{\circ}$  truites) = algunes operacions matemàtiques al voltant de  $n$

Ha d'incloure: la població inicial (3000), el factor de creixement (0,8) i la quantitat de repoblament (1000). I evidentment la  $n$ .

Expliqueu també el procés que heu seguit per obtenir-la

Reflexiona i respon.

 **Conclusions**

I per acabar, anem a les conclusions. Individualment obriu un document amb google docs i compartiu-lo amb el vostre professor. En aquest document heu d'explicar el més detalladament possible, els següents aspectes:

- allò que creieu que heu descobert.
- allò que heu après.
- allò que us ha sorprès.
- allò que no us ha agradat.
- allò que canviaries del que has fet
- allò que introduiries o canviaries per millorar el problema.
- altres coses que creguis convenient dir.

**Imatge 5. Fórmula general i conclusions.**

## 4.2. Resultat del treball dels estudiants

Cadascuna de les eines utilitzades té funcions diferents. EXE Learning ens ha permès crear un espai web amigable per tal que els estudiants es plantegin les preguntes i quina resposta volen donar a cadascuna. Aquesta tasca és feina del professor.

Els formularis de Google ens permeten recollir les respostes dels estudiants a les activitats en un full de càlcul. Amb un avantatge important respecte al treball a la llibreta. I el podem veure en la imatge següent:

Escriu el teu nom	Has d'explicar si creus que creixerà indefinidament, creixerà fins a arribar a un límit, o la població anirà augmentant i disminuint alternativament, o si anirà disminuint fins a desaparèixer.	Explica els motius de la resposta anterior.	És possible predir la població de la llacuna després d'un nombre determinat d'anys, cinquanta, per exemple?	Si has contestat que sí, explica com creus que es podria fer. I si has contestat que no, explica'n els motius.	Creus que és possible predir la població de truites de la llacuna després d'un nombre determinat d'anys, cinquanta, per exemple?
TM	La població anirà augmentant i disminuint alternativament.	A causa de la pesca, la població anirà disminuint, però com que les truites també es reproduïxen, creixen. Anirà seguint la seqüència augmentant i disminuint.	No.	Perquè pot haver-hi una temporada de pesca molt gran i que es quedi sense gaire peixos o es poden reproduir molt i també creixerà molt.	No.
pmlbr	La població anirà augmentant i disminuint alternativament.	Perquè cada any se li resta un vint per cent i se li suma mil; per tant, arribarà un punt en què el vint per cent serà més que mil.	Sí.	Sí, calculant la població d'aquest any augmenta i treure el vint per cent per mil truites per cada any (anant intercalant «20 per cent/més mil»).	Sí.

**Imatge 6. Mostra de respostes d'estudiants.**

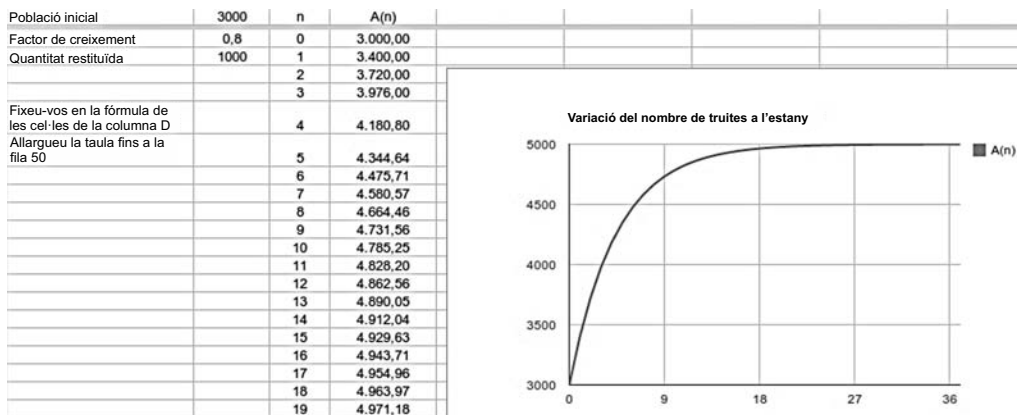
A la imatge 6 podem veure la resposta a alguna de les qüestions proposades per part de dos grups de treball. I a continuació hi hauria les respostes de la resta de grups de treball. Aquest aspecte és important a l'hora de realitzar una revisió de la tasca en gran grup. Podem veure les respostes de tots els grups de treball a les preguntes proposades i realitzar-ne la discussió. Els estudiants poden tenir accés a aquest document per tal de revisar d'una manera individual la seva feina, amb possibilitat d'edició o només de revisió, a criteri del professor responsable.

El full de càlcul d'aquest mateix aplicatiu ens permet experimentar, de la mateixa manera que l'*applet*, amb el nombre de truites, la repoblació i el percentatge de mortalitat.

A la imatge 7 ho podem veure.

Disposem de dues versions d'aquest full de càlcul: una, la que es mostra, amb la fórmula de recurrència introduïda, i la segona sense aquesta fórmula.





Imatge 7. Ús del full de càlcul per a la realització de la recerca.

En el primer cas, els estudiants han d'experimentar amb els valors de població inicial, factor de creixement i quantitat restituïda per tal de donar resposta a la recerca que se'ls ha proposat. El full de càlcul s'encarrega de realitzar els càlculs i el gràfic corresponent. El professor pot optar, en funció dels estudiants, per donar més o menys informació en aquest full de càlcul. L'*applet* té exactament les mateixes funcionalitats que el full de càlcul. Es pot optar per utilitzar o l'un o l'altre, sempre a criteri del professor. Es pot crear un giny que faci una feina semblant amb l'eina Wolfram Alpha.

La darrera eina que utilitzarem és el tractament de textos de Google docs. Els estudiants, d'una manera col·laborativa, han de presentar dues tasques. Un informe on recullin la recerca realitzada i un altre on desenvolupin les seves conclusions sobre la tasca realitzada. Un sol document per grup de treball que s'haurà de compartir amb el professor per tal de realitzar-ne l'avaluació corresponent. En aquest informe s'hauran d'integrar els gràfics, la graella del full de càlcul i tots aquells elements que ajudin els estudiants a completar l'informe.

En la darrera tasca, els estudiants hauran, d'una manera individual, de presentar les conclusions al voltant de la tasca realitzada. Pretenem que en aquest darrer document valorin dues coses: 1) l'activitat, i 2) el seu treball.

## 5. Reflexions finals

- Les eines digitals han de ser un instrument al servei de l'aprenentatge de les matemàtiques per part dels estudiants. Hem de tenir molt clar quines matemàtiques volem treballar, com volem fer-ho i com les avaluarem. Un cop tenim clars aquests aspectes, podem decidir quines eines digitals utilitzarem per tal de donar un valor afegit a aquelles activitats. Si una eina digital no aporta aquest valor afegit a l'activitat, és millor no utilitzar-la i continuar treballant com sempre fins a trobar una eina que ens aportï aquest valor.
- D'eines, n'hi ha de molts tipus i contínuament n'apareixen i en desapareixen. Penso que hi ha tres nivells d'usuaris: 1) els que utilitzen les eines; 2) els que són capaços de modificar una eina per adaptar-la al que els interessa, i 3) els que són capaços de

dissenyar l'eina que necessiten. Per tant, ens hem de permetre col·locar en el nivell d'usuari que vulguem; no cal ser expert en tots els programes que vagin apareixent ni de les seves darreres versions. Ens cal utilitzar les eines digitals de la manera més eficient possible per a l'objectiu que perseguim, que és que els nostres estudiants aprenguin matemàtiques.

- c) Hem d'aprofitar els avantatges de connectivitat que ens ofereix la xarxa. Hi ha moltes associacions de mestres i professors, d'usuaris de programes; hi ha eines que permeten el treball col·laboratiu. Cal que estiguem connectats i treballem col·laborativament, només així podrem arribar molt més lluny.
- d) I per finalitzar, diversifiquem les eines que utilitzem, les metodologies de treball a l'aula, les d'avaluació, etc.; serà la manera com nosaltres i els nostres estudiants estarem preparats per afrontar el món d'incerteses en el qual estem vivint.

## Referències

Adell, J. (2011). <http://elbonia.cent.uji.es/jordi/2011/05/08/lo-importante-no-es-la-tecnologia-sino-lo-que-tus-alumnos-pueden-hacer-con-ella> (Darrera consulta: abril 2014).

Alsina, C., Burgués, C. i Fortuny, J. M. (1988). *Construir la geometria*. Madrid: Síntesis.

Bates, T. (2014). <http://www.tonybates.ca/2014/04/15/time-to-retire-from-online-learning> (Darrera consulta: abril 2014).

Currículum 2007. Departament d'Ensenyament, [http://www.xtec.cat/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/c8437f7a-6a8a-476a-813c-0f897525d119/matematiques\\_eso.pdf](http://www.xtec.cat/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/c8437f7a-6a8a-476a-813c-0f897525d119/matematiques_eso.pdf) (Darrera consulta: abril 2014).

De Lange, J. (1999). *A framework for classroom assessment in mathematics*. (Unpublished manuscript). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Assessment Study Group.

Departament d'Ensenyament, «Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic» <http://svcnpbs.xtec.cat/creammat/joomla/index.php/suport-curricular/73-documents-de-suport-curricular/1121-competencies-basiques-de-lambit-matematic> (Darrera consulta: abril 2014).

Flowers, W. <http://web.mit.edu/fnl/volume/243/flowers.html> (Darrera consulta: abril 2014).

Halmos, P. (1980). The heart of the mathematics. Washington: *American Mathematical Monthly*, 87, 519-524.

<http://mellbreak.lboro.ac.uk/problemsolving/pathways> (Darrera consulta: abril 2014).

International Society for Technology in Education (ISTE) <https://www.iste.org> (Darrera consulta: maig 2014).

Leadbeater, Ch. (2010). [http://www.ted.com/talks/charles\\_leadbeater\\_on\\_education#t-97371](http://www.ted.com/talks/charles_leadbeater_on_education#t-97371)  
(Darrera consulta: abril 2014).

Leadbeater, C., Wong, A. (2010). *Learning from the extremes*. [http://www.cisco.com/web/about/citizenship/socio-economics/docs/LearningfromExtremes\\_WhitePaper.pdf](http://www.cisco.com/web/about/citizenship/socio-economics/docs/LearningfromExtremes_WhitePaper.pdf)  
(Darrera consulta: abril 2012).

Mason, J., L. Burton and Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2a ed.). Pearson Education Limited.

Mathematical Problem-Solving Project for HE STEM Teaching Problem Solving in undergraduate Mathematics. <http://mellbreak.lboro.ac.uk/problemsolving/sites/default/files/guide/Guide.pdf>

Mitra, S. (1999). [http://www.ted.com/talks/sugata\\_mitra\\_the\\_child\\_driven\\_education](http://www.ted.com/talks/sugata_mitra_the_child_driven_education)  
(Darrera consulta: abril 2014).

Mora, Ll. (2012). «L'activitat matemàtica a l'aula virtual i presencial. Estudi comparatiu a 1r cicle d'ESO». Ph D. Tesis. Universitat de Barcelona.

NCTM. <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26860>  
(Darrera consulta: abril 2014).

Polya, G. (1967). *La découverte des mathématiques* (2 vols.). París: Dunod.

Puig Adam, P. (1955). Decálogo de la didáctica matemática media. *Gaceta Matemática*, 1a sèrie, 7, 5-6. Madrid: Instituto Jorge Juan de Matemáticas i Real Sociedad Matemática Española.

Wolfram, C. (2010). TED, «Teaching kids real math with computers» [https://www.ted.com/talks/conrad\\_wolfram\\_teaching\\_kids\\_real\\_math\\_with\\_computers#t-213860](https://www.ted.com/talks/conrad_wolfram_teaching_kids_real_math_with_computers#t-213860)  
(Darrera consulta: abril 2014).

