Jocs de simetria arreu

Enric Brasó Campderrós i Carlos Luna-Mota
Museu de Matemàtiques de Catalunya, MMACA

Introducció

Aprofitant l'efemèride d'un dia tan palindròmic com el 02/02/2020, volem donar a conèixer una família de trencaclosques que ha guanyat cert renom internacional i amb la qual hem estat experimentant recentment (Ramellini, 2019): els jocs de simetria.

Un joc de simetria és un tipus particular de trencaclosques que té les característiques següents:

- El joc està format per un conjunt de peces planes.
- L'objectiu és formar una figura plana amb simetria, normalment axial.
- Les peces no es poden superposar les unes a les altres.
- Si no es diu el contrari, cal fer servir totes les peces.

En tots els jocs que presentarem en aquest article cal fer servir totes les peces per formar figures amb simetria axial. En els casos en què hi hagi més d'una solució, calgui fer servir un subconjunt de les peces o la figura resultant hagi de tenir simetria rotacional, així ho explicitarem.

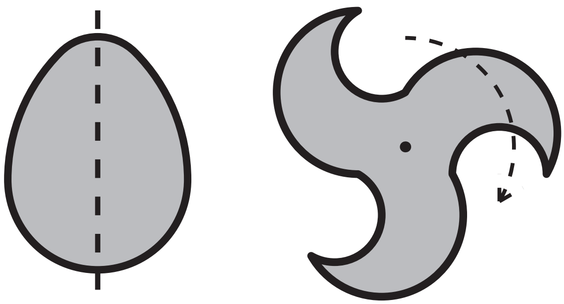

Figura 1. Figures amb simetria axial (esquerra) i amb simetria rotacional (dreta).

L'element característic que distingeix aquest tipus de trencaclosques d'altres de semblants és la imprecisió del seu objectiu. Allà on altres trencaclosques permeten un atac sistemàtic del problema que s'ha de resoldre, aquí ens trobem sovint amb un oceà de possibilitats i molt d'assaig i error. De fet, està demostrat que resoldre'ls, en general, és un problema computacionalment intractable (Demaine *et al.*, 2015).

Per exemple, quan mirem de cobrir una silueta particular amb les peces del tangram, sempre és una bona idea cercar o bé les parts més amples de la silueta (per tal d'encabir-hi els triangles grans), o bé les parts més estretes (que necessàriament s'hauran de cobrir amb les peces més petites). Aquesta manera sistemàtica d'atacar un trencaclosques ''començant per les cantonades'' gairebé mai no es pot aplicar als jocs de simetria i, per tant, la seva resolució acostuma a ser més difícil del que es podria pensar a primer cop d'ull.

De fet, és precisament aquest contrast entre la simplicitat de les regles i la dificultat de la resolució el que fa especialment atractiu aquest tipus de jocs i permet trobar reptes interessants amb només dues peces. Per exemple, el dissenyador japonès Hiroshi Yamamoto va assenyalar que amb la peça més gran (pentàgon) i amb la peça més petita (triangle) del famós trencaclosques de la T es poden formar dues figures diferents amb simetria axial (Demaine *et al.*, 2015).

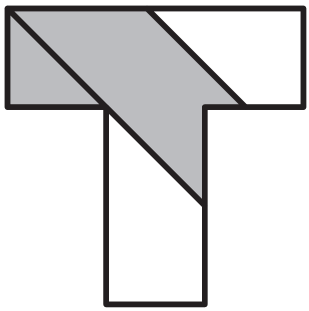

Figura 2. El trencaclosques de la T, amb el pentàgon i el triangle destacats.

A la figura 2 podeu veure les quatre peces del trencaclosques de la T amb les dues peces que heu de fer servir destacades. Al final de l'article trobareu les dues solucions d'aquest joc de simetria, però us recomanem que intenteu resoldre'l abans de seguir llegint per tal que pugueu entendre com de difícils poden ser aquest tipus de reptes i com de necessàries són les adaptacions que proposem de cara a fer-los servir en entorns educatius. De la resta de jocs que apareixen en aquest article, no en donarem cap solució per respecte als seus autors i per tal de donar al lector l'oportunitat de trobar-les pel seu compte.

Jocs de simetria a casa

El gran atractiu intel·lectual dels jocs de simetria fa que hagin tingut força èxit en concursos internacionals de jocs d'enginy, com ara la Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition, on cada any acostuma a presentar-se'n algun de nou. Malauradament, però, encara avui dia és difícil trobar-los a les botigues i sovint no queda més remei que visitar pàgines web especialitzades o contactar directament amb els dissenyadors per adquirir-ne una còpia.

Per sort, la gran majoria d'aquests jocs consten de poques peces, que a més a més tenen una natura geomètrica senzilla (fragments de quadrat, fragments de triangle equilàter, cercles...). En conseqüència, resulta raonablement fàcil fabricar-les a casa amb cartró o goma EVA o, si disposem d'eines més sofisticades, fer servir una talladora làser o una impressora en 3D per fer-ne una còpia. En qualsevol cas, qui vulgui provar immediatament algun dels jocs presentats en aquest article, pot fer servir els retallables que trobarà a: http://mmaca.cat/docs/simetriesretallables.pdf.

Així, si el nostre objectiu és, simplement, passar una estona entretinguts a casa, hem d'escollir jocs de simetria que siguin fàcils de construir i molt difícils de resoldre. Un dels millors exemples és l'**Ex 3**, del mateix Hiroshi Yamamoto, que va guanyar una menció d'honor del jurat a la Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition del 2010 (Rausch, 2010).

Figura 3. Ex 3 (©Hiroshi Yamamoto).

Un altre punt que cal tenir en compte és que el joc que fabriquem proporcioni més d'un repte i, per tant, més enteteniment pel mateix preu. Aquest és el cas del **Think Twice**, de Vladimir Krasnoukhov (Rausch, 2016), que té dues solucions que són prou diferents entre si perquè trobar-ne una no doni gaires pistes sobre com serà l'altra.

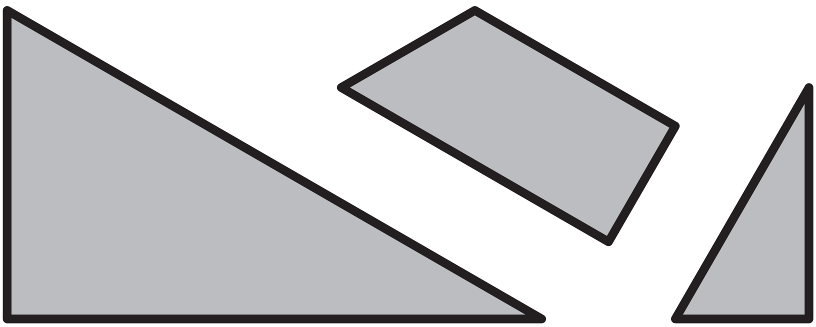

Figura 4. Think Twice (©Vladimir Krasnoukhov).

Encara millor és el **Symmetrix**, de Tadao Kitazawa, que l'any 2003 va inaugurar aquesta família de trencaclosques (Demaine *et al.*, 2015) i que proporciona tres reptes diferents:

- Fer una figura simètrica amb dues de les quatre peces.
- Fer una figura simètrica amb tres de les quatre peces.
- Fer una figura simètrica amb totes quatre peces.

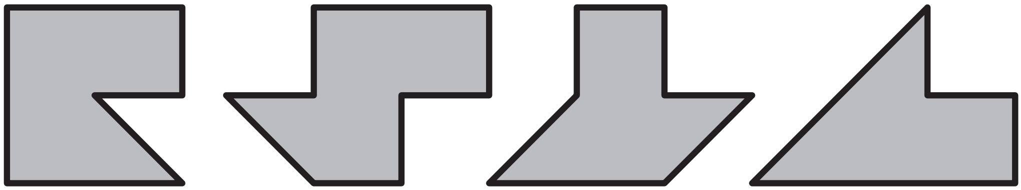

Figura 5. Symmetrix (©Tadao Kitazawa).

El fet d'haver d'escollir quines peces necessitem per resoldre els problemes *menors* compensa amb escreix que facin servir menys peces, i tots tres reptes acaben resultant igualment interessants.

Jocs de simetria al Museu

Si l'objectiu no és entretenir-se (o fer un regal enverinat a un conegut), el criteri canvia. Al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA), per exemple, no ens podem permetre fer una exposició en què cada persona dediqui una hora a cada mòdul i seleccionem els materials de manera que els visitants puguin aprendre matemàtiques (sovint sense adonar-se'n) alhora que es diverteixen. Així doncs, els criteris canvien i cal adaptar els trencaclosques al nostre llenguatge expositiu.

Per exemple, quan vam descobrir el **3-4-5 Symmetry**, de Donald Bell (Bell, 2015), vam estar d'acord que era un trencaclosques molt interessant perquè ens permetia treballar no només la simetria axial, sinó també el teorema de Pitàgores i el càlcul mental.

Malauradament, es tracta d'un trencaclosques força difícil i calia adaptar-lo abans de fer-lo servir. Per això vam afegir unes marques als costats dels cinc triangles. L'objectiu és doble: d'una banda, evidenciar les mides de cada peça per donar pistes sobre com s'ha d'atacar el problema i permetre a l'usuari comprovar si una determinada figura és simètrica o no; d'altra banda, transformar un problema continu (com encaixar dos triangles) en un problema discret (com encaixar dos triangles de manera que les marques quedin alineades) per reduir la complexitat del repte.

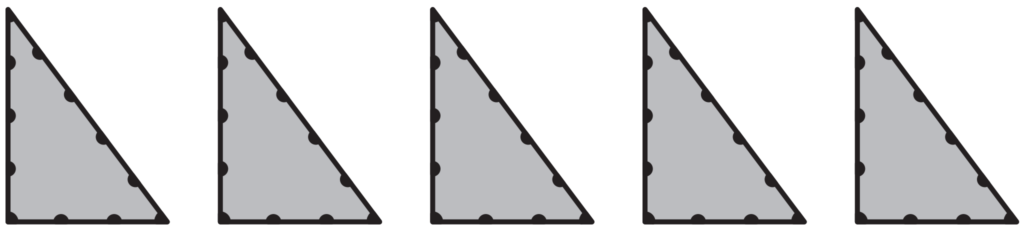

Figura 6. 3-4-5 Symmetry (©Donald Bell), amb marques afegides als costats.

De vegades no n'hi ha prou amb discretitzar un problema i cal simplificar-lo encara més. Per exemple, el **Bitten Biscuits**, de Jin-Hoo Ahn, és un joc de simetria molt difícil que admet dues solucions i que va guanyar una menció d'honor del jurat a la Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition del 2016 (Rausch, 2016).

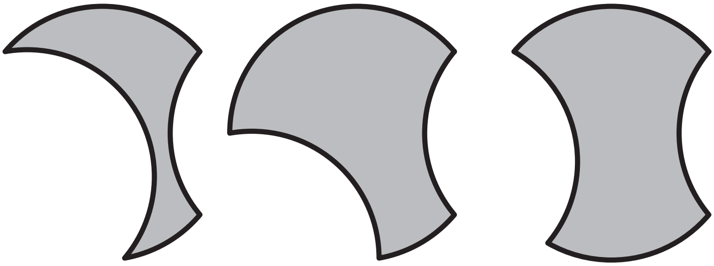

Figura 7a. Bitten Biscuits (©Jin-Hoo Ahn).

La clau per resoldre'l és adonar-se que tots els arcs de circumferència implicats són múltiples de 20°. A partir d'aquesta dada no és difícil obtenir una versió molt més tractable i fàcil de fabricar simplement transformant els arcs de circumferència en arcs d'octadecàgon regular.

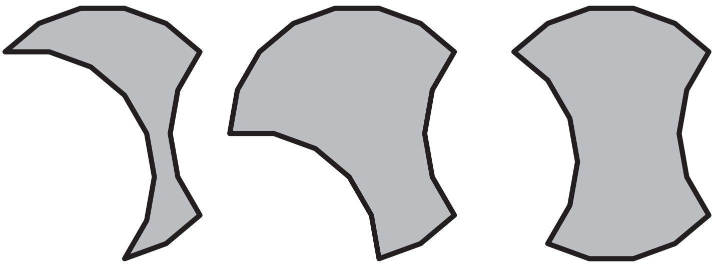

Figura 7b. Bitten Biscuits (©Jin-Hoo Ahn), discretitzat.

El problema, però, segueix sent força difícil i la geometria de l'octadecàgon no ens interessava prou, de manera que vam decidir simplificar-lo encara més fent una nova versió basada en dodecàgons regulars, aquests sí, molt més familiars i interessants per al nostre públic.

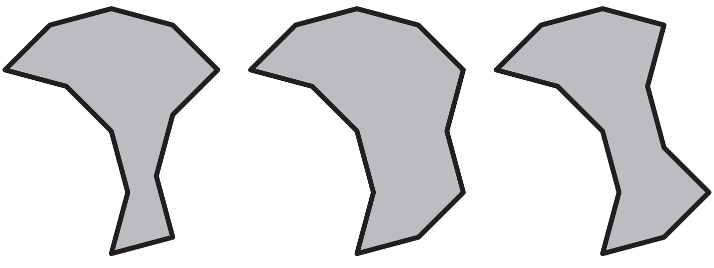

Figura 7c. Bitten Biscuits (©Jin-Hoo Ahn), discretitzat i simplificat.

Una manera diferent de simplificar el problema és la que vam fer servir amb el **SYM-353**, de Jerry Loo i Stanislav Knot (Rausch, 2017), un joc format per tres peces que admet quatre solucions diferents. Afegint unes marques addicionals a la peça pentagonal podem regular la dificultat del repte: si no donem cap altra informació, les marques ajuden el visitant a entendre les dimensions i la natura geomètrica de les peces (que estan formades per fragments de triangles equilàters), mentre que si afegim que les quatre línies són, precisament, els quatre eixos de simetria de les quatre solucions d'aquest joc, aconseguim simplificar prou el repte perquè tothom el pugui afrontar amb èxit.

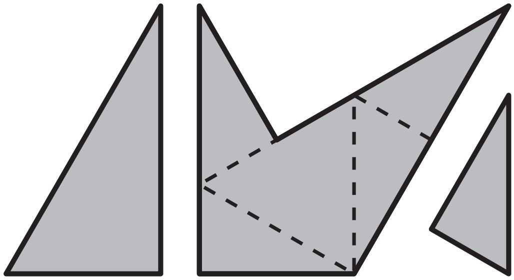

Figura 8. SYM-353 (©Jerry Loo & Stanislav Knot), amb marques afegides al pentàgon.

Els jocs de simetria que tenen un excés de solucions presenten un problema ben diferent. En aquests casos acostuma a haver-hi un grapat de solucions més o menys òbvies i d'altres extremament difícils de trobar. Així doncs, no és satisfactori demanar al visitant que en trobi només una (seria massa fàcil) o que les trobi totes (seria massa difícil).

Una manera tradicional de resoldre aquest problema consisteix a acompanyar el joc d'un cartell on apareixen algunes solucions que no ens interessen (o bé perquè són massa fàcils o bé perquè són massa difícils) i demanar al visitant que en trobi alguna de diferent (i, per tant, alguna del rang de dificultat que volem treballar). Una altra manera, molt més elegant i temàtica, és la que va fer servir Vladimir Krasnoukhov en el seu joc **Symm-Aster** (Stegmann, 2019).

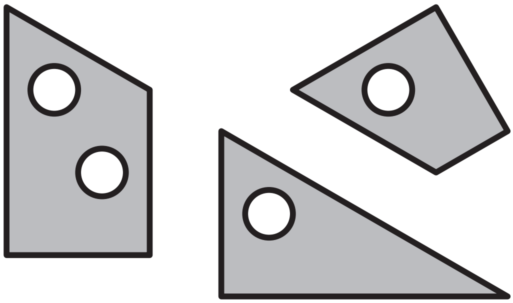

Figura 9. Symm-Aster (©Vladimir Krasnoukhov).

En aquest joc s'afegeixen una sèrie de forats a les peces i es demana trobar solucions que també respectin la simetria d'aquests forats. D'aquesta manera, el **Symm-Aster** va passar de tenir nou solucions amb simetria axial i tres més amb simetria rotacional, a tenir-ne només cinc i una, respectivament.

Nosaltres hem aplicat la mateixa filosofia al **Multi-Symmetrics-2**, del mateix Vladimir Krasnoukhov (Krasnoukhov, comunicació personal, 10 de juny de 2019), afegint un únic forat i imposant que l'eix de simetria de les figures hi passi per sobre. Amb aquesta senzilla modificació s'eliminen dos terços de les solucions possibles, però es conserven les que ens semblen més interessants (dos heptàgons, un octàgon, un enneàgon, un decàgon, un dodecàgon i un tridecàgon). Addicionalment es dona un punt de partida sòlid al visitant, "l'eix de simetria creua aquest punt", a partir del qual pot construir alguna d'aquestes solucions de manera sistemàtica.

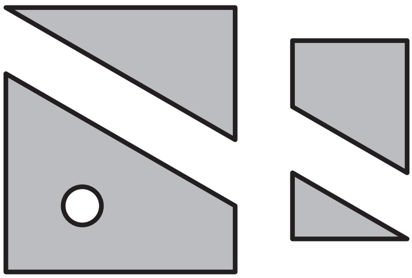

Figura 10. Multi-Symmetrics-2 (©Vladimir Krasnoukhov), amb un forat afegit.

Jocs de simetria a l'aula

Finalment, si l'objectiu és treballar a l'aula amb jocs de simetria, haurem de tenir en compte altres criteris. Un dels més determinants serà el preu del material i el temps que tardarem a fabricar el joc, ja que serà imprescindible que cada alumne (o petit grup d'alumnes) disposi de la seva còpia del trencaclosques durant tota l'activitat.

Una possible solució és fer servir materials didàctics que ja tinguem al nostre centre, com ara els pentòminos. Si disposem d'un joc de pentòminos per a cada grup, podem improvisar (potser dins d'una activitat més àmplia que faci servir aquest material) un parell de jocs de simetria *ready-made*: el **Crab Puzzle**, de Vladimir Krasnoukhov (Stegmann, 2019), i el **Symptomino**, de Peter Gal (Rausch, 2014).

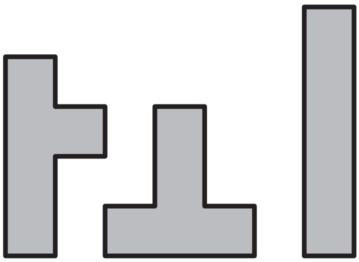

Figura 11. Crab Puzzle (©Vladimir Krasnoukhov).

En el primer cas, es tracta de fer una figura simètrica amb els pentòminos I, T i Y, mentre que en el segon es fan servir els pentòminos W, X, Y i Z per oferir tres reptes:

- Fer una figura simètrica amb dos d'aquests quatre pentòminos.
- Fer una figura simètrica amb tres d'aquests quatre pentòminos.
- Fer una figura simètrica amb tots quatre pentòminos.

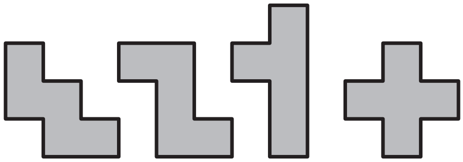

Figura 12. Symptomino (©Peter Gal).

Si disposem de diversos jocs complets de pentòminos, també podem mirar de resoldre alguna de les **Pentomino Oddities** proposades per Mike Reid (Sicherman, 1997a): formar figures amb simetria axial fent servir un nombre senar de pentòminos idèntics.

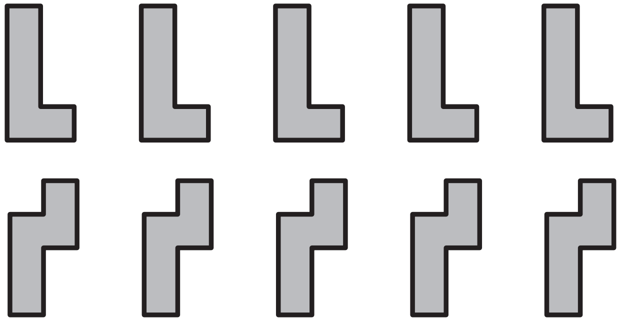

Figura 13. Dos exemples de Pentomino Oddities: 5L i 5N (©Mike Reid).

Una altra possible solució és fer servir materials de construcció (policubs) per fabricar les peces de manera temporal. Per obtenir els millors resultats, cal escollir jocs de simetria de natura quadriculada que compleixin dues condicions:

- Que facin servir un nombre reduït de cubs en total perquè puguem fabricar prou còpies amb els cubs de què disposem.
- Que puguem formar un *cicle*, de manera que cap connexió mascle sobresurti de les peces, un cop construïdes, per tal d'evitar problemes d'encaix o peces que ballin sobre la taula.

Afortunadament, aquestes dues condicions les compleixen un bon nombre de jocs de simetria. Podem trobar una recopilació especialment interessant a la pàgina que George Sicherman dedica a les **Polyomino Oddities** (Sicherman, 1997b).

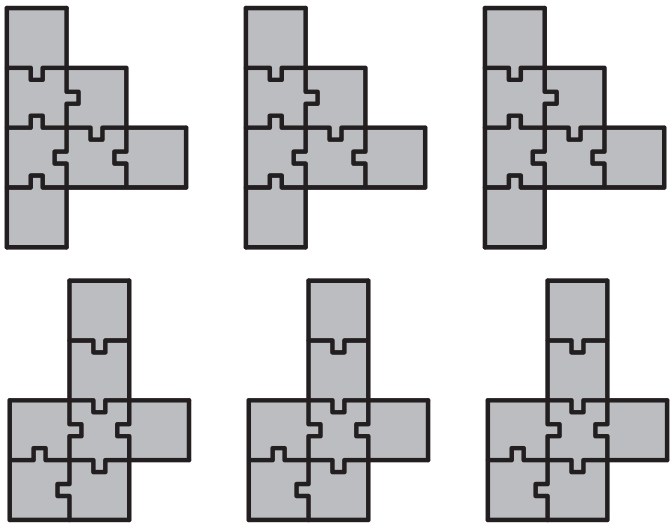

Figura 14. Dos exemples de Polyomino Oddities (©George Sicherman).

Fer servir jocs de simetria *quadriculats* no només facilita la fabricació de les peces, sinó que també ens permet treballar amb coordenades cartesianes, calcular àrees i perímetres amb facilitat, representar les solucions en una llibreta quadriculada i, fins i tot, treballar amb aquest tipus de joc sense fabricar les peces físicament. L'activitat següent exemplifica alguns d'aquests avantatges:

1. Utilitzant una graella quadriculada, dibuixeu una figura de 30 quadrats unitat d'àrea que tingui un eix de simetria (l'eix pot estar inclinat 45°). Procureu que sigui una figura relativament complicada (no feu un rectangle!).
2. Penseu com podeu dividir la figura anterior en dos trossos d'àrea 15 o en tres trossos d'àrea 10 d'una forma original i poc evident (no trenqueu la figura per l'eix de simetria!).
3. Dibuixeu les peces en un full a part, retalleu-les i passeu-les a un company, que haurà d'intentar reconstruir la figura inicial.

Treballar amb la quadrícula també redueix, en general, la dificultat dels jocs per diversos motius:

- La quadrícula és un entorn familiar per a l'alumne.
- El problema queda automàticament discretitzat.
- Redueix el nombre potencial d'eixos de simetria.

Tenint en compte aquests avantatges, fins i tot ens pot interessar quadricular un joc de simetria que no ho sigui en origen. És el que vam fer amb el **SymmeTrick**, de Vesa Timonen, un dels trencaclosques més votats a la Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition del 2013 (Rausch, 2013).

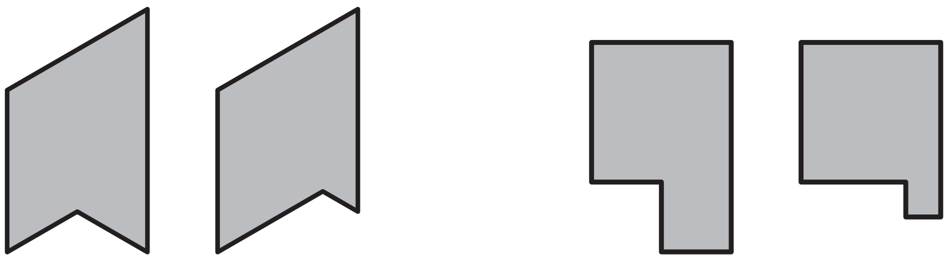

Figura 15. Esquerra: SymmeTrick (©Vesa Timonen). Dreta: SymmeTrick quadriculat.

Els jocs de simetria són un recurs més que hi ha a la nostra disposició i sempre que tinguem cura de seleccionar-los i adaptar-los a cada ús, podem fer-los servir en l'àmbit privat, en museus i a l'aula per treballar nocions geomètriques com ara els diferents tipus de simetria o el càlcul d'angles, distàncies i àrees de les peces.

Us convidem a resoldre tots els jocs proposats en aquest article, a buscar-ne de nous a la xarxa i a adaptar-los a les vostres necessitats. De ben segur que us proporcionaran moltes hores d'entreteniment i un bon grapat d'idees per aplicar a classe.

Ah! I no ens n'hem oblidat, aquí teniu la solució del primer repte:

Figura 16. Les dues solucions del repte de la figura 2.

Referències

Bell, D. (2015). *Curious and Interesting Triangles*. Disponible en línia a: https://mathsjam.com/assets/talks/2015/DonaldBell-CuriousTriangles.pdf.

Demaine, E.D.; Korman, M.; Ku, J.S.; Mitchell, J.S.; Otachi, Y.; Renssen, A.V.; Roeloffzen, M.; Uehara, R.; Uno, Y. (2015). ''Symmetric Assembly Puzzles are Hard, Beyond a Few Pieces''. A: *Revised Papers from the 18th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCGG 2015)*, p. 180-192 (Lecture Notes in Computer Science, 9943).

Ramellini, G. (2019). ''?'Con qué juega la gente del MMACA?''. *Suma*, 92, p. 61-66.

Rausch, J. (2010). ''2010 Puzzle Design Competition Entries''. A: Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition Home Page. https://johnrausch.com/DesignCompetition/2010/.

Rausch, J. (2013). ''2013 Puzzle Design Competition Entries''. A: Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition Home Page. https://johnrausch.com/DesignCompetition/2013/.

Rausch, J. (2014). ''2014 Puzzle Design Competition Entries''. A: Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition Home Page. https://johnrausch.com/DesignCompetition/2014/.

Rausch, J. (2016). ''2016 Puzzle Design Competition Entries''. A: Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition Home Page. https://johnrausch.com/DesignCompetition/2016/.

Rausch, J. (2017). ''2017 Puzzle Design Competition Entries''. A: Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition Home Page. https://johnrausch.com/DesignCompetition/2017/.

Sicherman, G. (1997a). ''Pentomino Oddities''. A: *Col. Sicherman's Home Page*. www.recmath.org/PolyCur/pentodd/.

Sicherman, G. (1997b). ''Polyomino Oddities''. A: *Col. Sicherman's Home Page*. www.recmath.org/PolyCur/oddities/.

Stegmann, R. (2019). ''Assembly''. A: *Rob's Puzzle Page*. http://robspuzzlepage.com/.