Els problemes del Fem Matemàtiques a l'aula

Mireia López Beltran
ICE Universitat Politècnica de Catalunya
i Universitat Pompeu Fabra (Barcelona)
mireia.lopez@gmail.com

Cyntia Riquelme Carvallo
Mestra especialista en matemàtiques i ciències
criquelmecarvallo@gmail.com

Resum

En aquest treball us presentem el blog del Banc de Recursos del Fem Matemàtiques, creat a partir dels problemes de les diferents fases de l'activitat. Començarem pels motius que ens han portat a la creació del blog i les seves característiques principals. Per acabar, presentarem un parell d'exemples dels recursos que hi podeu trobar. En cada exemple s'inclouen, entre d'altres, produccions d'alumnes per a facilitar la tasca del professorat a l'hora de treballar la resolució de problemes a l'aula.

Abstract

In this paper we present the blog «Banc de recursos del FEM Matemàtiques», which arose from the problems experienced in different stages of the activity. We begin with the reasons that led to the creation of the blog, and its main features. Following this we present several examples of the resources you can find. Each example includes, among other things, student initiatives to assist in the teachers tasks related to problem-solving in the classroom.

1. Introducció

Durant més de vint anys, el Fem Matemàtiques (http://fm.feemcat.org/) ha acumulat una bona col·lecció de problemes de les tres fases de què consta l'activitat. Un dels reptes pendents del Fem Matemàtiques era poder donar forma a aquest material i, juntament amb el treball realitzat per l'alumnat participant, convertir-lo en un recurs per a l'aula. El 2015 i dins del grup de treball de l'activitat de l'Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM) es va engegar el blog Banc de Recursos del Fem Matemàtiques per donar resposta a la demanda històrica del professorat de trobar publicades les resolucions dels problemes de l'activitat.

En aquest article presentem els recursos del blog i una selecció de dos dels seus elements amb propostes per ajudar a dur aquests problemes a l'aula. Fem també un resum de les característiques dels problemes de la primera fase del Fem Matemàtiques i una breu descripció del que hi ha a la fitxa de cada problema. Atesa la riquesa de l'activitat, també hem cregut convenient exposar les característiques pròpies dels problemes de la segona fase. Finalment, s'exposen i s'analitzen els dos exemples seleccionats: un problema de la primera fase i un de la segona fase que trobareu intercalats en el text. La resta de materials publicats es troben en el blog http://bancfm.blogspot.com.es.

2. Característiques dels problemes de la primera fase del Fem Matemàtiques

Segons les orientacions de les *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic* (Burgués i Sarramona, 2013a i 2013b), els problemes del Fem Matemàtiques s'adapten plenament a les característiques d'activitats que permeten un treball competencial perquè: proposen reptes i jocs que engresquen els alumnes; permeten reflexionar, prendre decisions i dissenyar estratègies; s'allarguen en el temps; afavoreixen l'intercanvi d'idees i la discussió de les propostes.

Són «activitats competencialment riques» (CESIRE-CREAMAT, 2014) en què l'alumne pot demostrar tot el que sap i fer nous aprenentatges, ja que:

- Són problemes *contextualitzats* amb propostes properes als alumnes i *reptes* que engresquen fàcilment.
- Treballen més d'un *procés* o una *dimensió* alhora.
- Poden *ser resoltes amb diverses estratègies* o possibilitats d'atac.
- Fomenten l'*autonomia* i la *iniciativa* de l'alumnat.
- Requereixen el *treball en grup*, on l'alumne dialogui, prengui decisions i apliqui connexions.
- Requereixen també un informe on l'alumne demostri la seva capacitat de *comunicar* idees *justificant* els processos emprats i les solucions *argumentades* i comprovades.
- Tots els problemes consten d'unes primeres activitats que poden començar a fer tots els alumnes. A partir d'aquí, hi ha diferents maneres de resoldre l'activitat en funció de l'estadi de cada alumne, totes vàlides. Aquesta *diversitat de respostes* dona riquesa al problema i mostra *estratègies* que, de vegades, els professors no haurien anticipat.
- Promouen la *representació* i l'*ús progressiu del llenguatge matemàtic*.
- En molts casos, proposen la utilització de *recursos* i *materials manipulatius* per ajudar al pensament diversificat proporcionant visions noves i diferents de la representació gràfica o del pensament abstracte.
- Permeten el *paper dinamitzador del mestre* en les diferents fases de treball del problema. En l'abordatge del problema, el professor proposa i anima a fer les primeres investigacions. Després pot fer el paper de *guia* per mitjà de «bones preguntes» quan els alumnes estiguin encallats en alguna fase o encoratjant-los a mostrar un nivell competencial més ric, fins i tot tendint a l'excel·lència amb els alumnes que puguin accedir-hi. És

molt important que el mestre transmeti la importància de la bona comunicació en l'elaboració de l'informe amb respostes ben justificades i argumentades. També ha d'ajudar a establir connexions obrint noves línies d'investigació amb noves preguntes per enllaçar temes o guiant en les possibles generalitzacions.

- Permeten *atendre la diversitat de l'alumnat*, ja que, encara que no tots els alumnes arribin a la solució completa, tots els alumnes en treuen profit. Per una banda, sempre hi ha apartats que tots els alumnes poden fer i, per l'altra, cal destacar la *importància de la posada en comú*, on els alumnes poden mostrar diverses estratègies i respostes a un apartat, i és en l'aprenentatge entre iguals on es fan més passos en la comprensió i la incorporació de noves estratègies.
- Permeten insistir en la *comprovació de la coherència de la resposta* amb la situació plantejada, que ha de ser possible encara que sigui aproximada, i en la correcció de la resposta o les respostes en el cas que n'hi pugui haver més d'una. És important que el mestre transmeti que el procés és tan o més important que la solució numèrica.[1]

3. Què podem trobar en el blog del Banc de Recursos?

Les característiques dels problemes del Fem Matemàtiques els fan un bon recurs per als professors de matemàtiques que vulguin treballar les activitats competencials a l'aula. El nostre repte ha consistit a crear materials amb què el professorat pugui treballar a l'aula. Per fer-ho vam creure que, a més de l'enunciat i la solució, havíem de proporcionar: una sèrie d'orientacions relacionades amb el propòsit de cada problema; els continguts, conceptes i processos que intervenen en treballar-lo; les competències que s'hi veuen més implicades; les propostes d'una avaluació competencial i les valoracions dels nivells. Per exemplificar els nivells competencials vam considerar fonamental mostrar produccions dels alumnes extretes de les respostes lliurades en la primera o la segona fase del concurs. Les indicacions del document de Burgués i Sarramona (2013b) ens van servir de guia per organitzar aquesta part. Atesa la riquesa dels problemes, no hem volgut parlar d'una única resolució i per això es procura sempre mostrar respostes diverses extretes dels informes dels alumnes participants en el concurs. Pensem que així donem una visió de l'ampli ventall de respostes, estratègies i processos que l'alumnat d'aquest nivell pot donar, moltes vegades sorprenents i diferents de les que la nostra visió d'adult donaria. A partir del problema i de les respostes dels alumnes, hem seleccionat les competències que creiem que han estat treballades amb més protagonisme d'aquests o bé les que han rebut les respostes més riques. Amb els diferents problemes hem procurat donar exemples de diferents competències.

En cada fitxa també hem inclòs quines estratègies de resolució de problemes es poden treballar en cada proposta seguint el document del CESIRE-CREAMAT (2015). Per acabar, en molts casos hem afegit també recursos TIC i materials per abordar el treball a l'aula i propostes d'ampliació que connecten i interrelacionen conceptes i processos matemàtics que no surten en l'enunciat original dels problemes del concurs. El fet d'incloure propostes d'ampliació fa que aquests problemes ampliïn els cursos a què va destinada l'activitat, de manera que abasten des dels darrers cursos de primària (amb versions simplificades d'alguns problemes) fins al quart d'ESO i fins i tot el batxillerat (per exemple, amb algunes de les propostes d'ampliació o bé reduint la temporització de l'activitat).

1. http://bancfm.blogspot.com.es/p/blog.html.

En tots els casos les respostes dels alumnes han estat extretes d'una selecció d'aproximadament trenta informes de la primera fase o de les proves de la segona fase lliurats per a la participació en el concurs, cosa que ens ha permès disposar d'una bona mostra de respostes de diferents centres de la província de Barcelona.

A continuació us presentem el problema de la primera fase seleccionat: «L'alçada de la torre».

4. L'alçada de la torre

Tal com podem trobar a la introducció de la seva fitxa,[2] en aquest problema es treballa la cerca de divisors d'un nombre d'una manera productiva i exhaustiva. La cerca dels divisors d'un nombre és un contingut curricular de primer d'ESO i, per tant, tenir bones propostes per treballar-lo a l'aula ens sembla d'especial interès. En aquest problema es fa un treball productiu seguint la proposta del PuntMat (2013a), ja que es proposa una cerca per a l'automatització de la destresa bàsica i, a més, s'ambienta amb la resolució d'un repte que resulta molt més motivador per als alumnes. També hi ha un treball exhaustiu perquè és necessari trobar una estratègia per saber que es tenen tots els divisors que es busquen (PuntMat, 2013b). També impulsa la investigació en la cerca de regularitats i patrons que permetin saber el nombre de divisors d'un nombre sense trobar-los explícitament i les característiques dels nombres amb un cert nombre de divisors. Aquest problema va ser proposat per l'Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals (APMCM) en la primera fase del Fem Matemàtiques 2014.

Per dur-lo a l'aula, proposem que es treballi amb grups heterogenis per fer un treball cooperatiu. El primer apartat és especialment adequat per poder repartir entre els diferents membres del grup la investigació de les torres amb nombres entre 20 i 30. Fins i tot es pot fer un treball cooperatiu entre els grups de la classe investigant més intervals de nombres. En els dos casos, el professor pot deixar a criteri dels integrants del grup la repartició dels nombres a investigar o els pot assignar el professor segons el que consideri pel que fa al tractament de la diversitat.

Un dels recursos que proposem per treballar aquest problema a l'aula és l'ús de l'arbre de factors tal com ho proposa el PuntMat[3] (també disponible en una miniaplicació o *applet*), ja que facilita l'observació de la descomposició factorial dels nombres i l'obtenció de la clau del patró que es demana en els darrers apartats de l'activitat.

A continuació adjuntem l'enunciat del problema:

En un joc cal fer torres amb peces cúbiques que tenen cadascuna un nombre. Cada torre es construeix amb els divisors del nombre que hi ha a la part superior (tots i sense deixar-se'n cap).

Vegeu-ne un exemple:

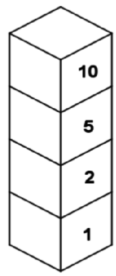


Figura 1

2. http://bancfm.blogspot.com.es/2015/05/lalcada-de-la-torre.html.
3. http://puntmat.blogspot.com.es/2011/12/mes-sobre-larbre-de-factors.html.

La torre coronada pel nombre 10 té quatre pisos.

a) *Investigueu una mica i construïu les torres dels nombres entre 20 i 30.*
b) *Quins nombres hi ha al capdamunt de les torres de dos pisos?*
c) *Quins són els nombres que coronen les torres de tres pisos? Digueu també tres nombres que coronin una torre de tres pisos. Trobeu-ne un de quatre xifres.*
d) *Creus que hi haurà nombres que tinguin la torre de cinc pisos? Com hauran de ser aquests nombres? Trobeu-ne un de cinc xifres.*
e) *Quin nombre menor de 100 corona la torre més alta? De quants pisos és? Expliqueu clarament el procés que seguiu fins a trobar-lo.*
f) *Creieu que hi haurà torres de totes les alçades? Expliqueu la vostra resposta.*

En aquest problema es treballen continguts dels blocs «Numeració i càlcul» i «Canvi i relacions». Hem considerat que les estratègies de resolució de problemes que poden treball principalment són: fer dibuixos i esquemes, provar ordenadament, organitzar la informació, fer taules i cercar regularitats i patrons.

Com en la majoria dels problemes del Fem Matemàtiques, les primeres tasques són sempre de presa de contacte i assequibles perquè tots els alumnes puguin començar la investigació.

A l'apartat *b* («Quins nombres hi ha al capdamunt de les torres de dos pisos?») es pregunta per una de les regularitats que ells observen ràpidament: «Els nombres primers són els que tenen dos divisors».

D'aquests nombres són el 23 i el 29
perquè són els únics nombres primers
que hi ha entre el 20 i el 30, és a dir,
que només tenen dos divisors, l'1 i ells mateixos.

Figura 2. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

En demanar per les torres de tres pisos (apartat *c*, «Quins són els nombres que coronen les torres de tres pisos?»), apareixen els nombres quadrats perfectes. En aquest cas, cal, a més, que combinin els dos conceptes, ja que els quadrats perfectes han de ser-ho de nombres primers per tal que tinguin exactament tres divisors:

El 9, el 49 i el 121.

9	49	121	Quadrats dels nombres primers
3	7	11	Nombres primers
1	1	1	

Figura 3. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

En la pregunta *d* («Creus que hi haurà nombres que tinguin la torre de cinc pisos?») els alumnes comencen a necessitar trobar el patró, cosa que comporta una tasca de més complexitat que les anteriors:

Hauran de ser el resultat de multiplicar un número primer a la 4ª potència, com per exemple:

2 elevat a 4 = 2 × 2 × 2 × 2 = 16

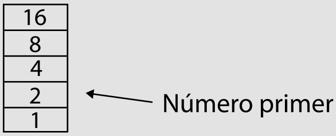


Figura 4. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

Un altre raonament:

Sí que hi ha nombres de 5 divisors, però també han de cumplir unes normes que són que tots els nombres que coronen una torre de cinc pisos ha d'estar composta per l'u, dos nombres diferents que es multipliquin entre ells, un nombre que es multipliqui per ell mateix (com en les torres de 3 pisos) i el nombre que corona la torre, el nombre principal.

Figura 5. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

La pregunta *e* («Quin nombre menor de 100 corona la torre més alta?») demana un procés exhaustiu que ens permeti comprovar que no ens hem deixat cap nombre i que abasti totes les possibilitats. Per resoldre el problema de l'exhaustivitat, alguns alumnes han establert filtres previs per no haver de buscar els divisors de tots els nombres:

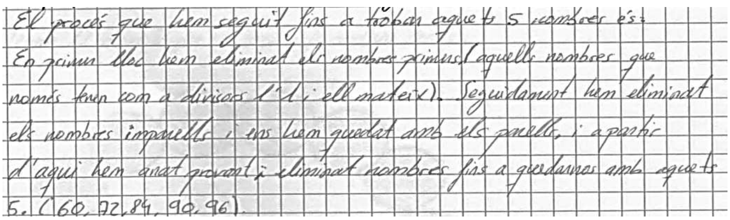

El procés que hem seguit fins a trobar aquets 5 nombres és:
En primer lloc hem eliminat els nombres primers (aquells nombres que
només tenen com a divisors l'1 i ell mateix). Seguidament hem eliminat
els nombres imparells i ens hem quedat amb els parells, i a partir
d'aquí hem anat provant i eliminat nombres fins a quedarnos amb aquets
5. (60, 72, 84, 90, 96).

Figura 6. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

En aquest cas, adjuntem la transcripció de la proposta de solució per facilitar-ne la lectura:

El procés que hem seguit fins a trobar aquests 5 nombres és: En primer lloc hem eliminat els nombres primers (aquells nombres que només tenen com a divisors l'1 i ell mateix). Seguidament hem eliminat els nombres imparells i ens hem quedat amb els parells, i a partir d'aquí hem anat prenent i eliminant nombres fins a quedar-nos amb aquests 5 (60, 72, 84, 90 i 96).

La major part dels treballs presentats pels alumnes no arriben a trobar la resposta a l'última pregunta («Creieu que hi haurà torres de totes les alçades?») i el seu raonament es resumeix en aquesta frase:

> Hem arribat a la conclusió que hi ha torres de totes les alçades, ja que existeix un infinit de nombres naturals. Com a conseqüència un infinit de nombres divisors.

Figura 7. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

Sembla que en aquest cas la intuïció ha guiat adequadament la majoria dels alumnes, però per poder donar una resposta fonamentada cal una investigació que vagi més enllà. Cal trobar regularitats i patrons que permetin deduir amb antelació, observant el nombre, el nombre de divisors que tindrà i d'aquesta manera poder justificar que efectivament podrem trobar torres de totes les alçades. Aquesta és realment una bona proposta i, com que no és fàcil que els alumnes la resolguin, serà feina del professorat guiar-los amb «bones preguntes» en la cerca d'aquest patró. En aquest punt, dotar els alumnes amb alguns dels recursos com l'arbre de factors pot ser clau perquè els alumnes acabin la tasca amb èxit.

En el cas de l'activitat del concurs, només dos equips dels trenta de la mostra donen una resposta adequada, tot i que amb matisos, a aquesta pregunta final:

> Només hi ha una torre d'un pis: la del número 1. Creiem que sí hawrá torres de totes les alçades perquè si hi ha nombres infinits també hi podrien haver torres d'infinites alçades.
>
> Un nombre amb la torre de 4 pisos serà el resultat d'un nombre primer al cub; un nombre amb la torre de 5 pisos serà el resultat d'un nombre primer a la quarta potència; un nombre amb la torre de 6 pisos serà el resultat d'un nombre primer a la cinquena potència...

Figura 8. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

Sí, perquè quan eleves un número primer a una potència n s'obté una torre de $n + 1$ nivells.

Ex.: $2^2 = 2 \times 2 = 4$ $\quad$ $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ $\quad$ $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

4
2
1

8
4
2
1

16
8
4
2
1

Per tant, sempre podrás elevar un número primer a una potència més i així obtenir una torre también d'un pis o d'un nivell més.

Figura 9. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

Creiem que val la pena, com a proposta d'ampliació per a primer, segon i tercer d'ESO, completar la feina per veure, a més del patró dels nombres primers, com fan els alumnes en els exemples anteriors, que per als nombres compostos també hi ha una regularitat. Si considerem la descomposició factorial del nombre n:

$$p_1^{n1} \cdot p_2^{n2} \cdots p_k^{nk}$$

amb p_i nombres primers i n_i nombres naturals, aleshores el nombre de divisors de n serà:

$$d(n) = (n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1) \cdots (n_k + 1)$$

Per exemple: $420 = 2^2 3^1 5^1 7^1$ i, per tant, tindrà $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ 24 divisors.

Per a l'*avaluació competencial*, ens hem fixat en les primeres preguntes que demanen pel patró numèric: les preguntes *c* i *d*, que demanen pels nombres que coronen les torres de tres i cinc pisos, on hi ha un major nombre de respostes. En proposar que l'alumne argumenti una regularitat numèrica trobada prèviament, hem considerat que la competència que es treballa de manera principal en aquest problema és la competència 5, «Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques», i els diferents nivells competencials s'establiran atenent la complexitat de l'argumentació, les estratègies que posen en joc i la capacitat per explicar el procés seguit (Burgués i Sarramona, 2013b).

Hem seleccionat les respostes dels alumnes que hi ha a continuació per exemplificar els diferents nivells competencials mostrats.

Nivell 1

> c) En l'apartat "c" ens demana que diguem els nombres que coronen les torres de tres pisos. Nosaltres hem esbrinat que els nombres que coronen les torres de 3 pisos són apart de tenir el divisor 1 i ell mateix, tenen el divisor que es multiplica per si mateix, i ja no en té més. Per exemple, els divisors de 25 són: 1, 5 i 25. Perquè $1 \cdot 25 = 25$ i $5 \cdot 5 = 25$.

Figura 10. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

En aquest cas, els alumnes mostren un nivell 1, ja que realitzen afirmacions i utilitzen exemples per a una millor comprensió. No obstant això, no fan cap generalització i no mencionen de manera explícita que el «divisor que es multiplica per si mateix» cal que sigui un nombre primer.

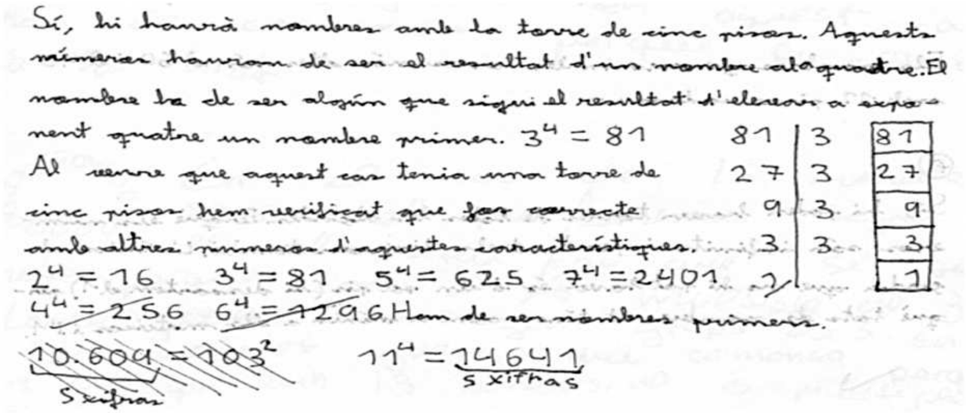
Nivell 2

> Encara que sigui poc probable, hi ha números que només tenen cinc pisos i es poden obtenir fent els quadrats dels nombres primers, com per exemple, el número 81 ($3^2 = 9$; $9^2 = 81$). Aquests números són imparells, és a dir, no són divisibles entre dos.

Figura 11. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

En aquest cas, els alumnes fan una generalització o una conjectura fent comprovacions que permetin justificar o rebutjar les seves afirmacions matemàtiques. Es troba a faltar una argumentació de la conjectura feta. També falta rigor i precisió per veure que no tots seran nombres imparells, com comenten a la darrera frase (16 és la quarta potència d'un nombre primer, 2^4, té cinc divisors i és un nombre parell).

Un altre exemple de nivell 2 seria:


Sí, hi haurà nombres amb la torre de cinc pisos. Aquests números hauran de ser el resultat d'un nombre ala quatre. El nombre ha de ser algún que sigui el resultat d'elevar a exponent quatre un nombre primer. $3^4 = 81$
Al veure que aquest cas tenia una torre de cinc pisos hem verificat que fos correcte amb altres números d'aquestes característiques.

81	3	81
27	3	27
9	3	9
3	3	3
1		1

$2^4 = 16$ $3^4 = 81$ $5^4 = 625$ $7^4 = 2401$
~~$4^4 = 256$~~ ~~$6^4 = 1296$~~ Han de ser nombres primers.
~~$10.609 = 103^2$~~ 5 xifras $11^4 = 14641$ 5 xifras

Figura 12. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

En aquest cas, notem que els alumnes han generalitzat però sense explicar el procés deductiu que han seguit per arribar a aquest resultat. S'observa un ús sistemàtic dels exemples per avançar en l'argumentació. I, a més d'exemples, en el procés de raonament també han usat contraexemples per trobar que els nombres han de ser primers. Aquesta resposta, dins del nivell 2, estaria més a prop del nivell 3 que l'anterior.

Nivell 3

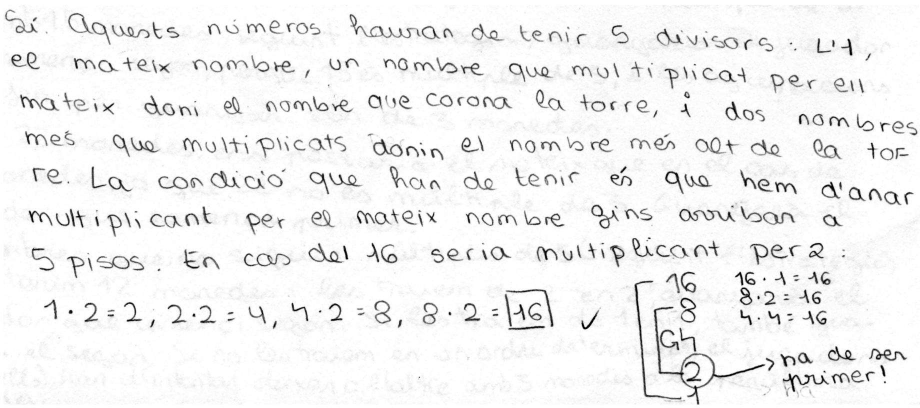

Sí. Aquests números hauran de tenir 5 divisors: L'1, el mateix nombre, un nombre que multiplicat per ell mateix doni el nombre que corona la torre, i dos nombres més que multiplicats donin el nombre més alt de la torre. La condició que han de tenir és que hem d'anar multiplicant per el mateix nombre fins arribar a 5 pisos. En cas del 16 seria multiplicant per 2:
$1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$, $4 \cdot 2 = 8$, $8 \cdot 2 = \boxed{16}$
16, 8, 4, 2, 1
$16 \cdot 1 = 16$
$8 \cdot 2 = 16$
$4 \cdot 4 = 16$
2 → ha de ser primer!

Figura 13. Proposta de solució d'alumnes de primer d'ESO, curs 2013-2014.

En aquest cas, trobem diferents elements que ens indiquen que es tracta d'una resposta de tercer nivell: s'usa un procés deductiu per trobar com han de ser els nombres que tenen cinc divisors; la justificació de la conjectura va més enllà d'un exemple concret; l'argumentació matemàtica està expressada amb precisió; s'usa un esquema per ajudar a la comunicació i la comprensió de la resolució.

En els apartats següents introduïm les característiques i un exemple de la segona fase per tal d'ampliar el ventall de recursos que es poden trobar en el blog.

5. Característiques dels problemes de la segona fase del Fem Matemàtiques

Els problemes de la segona fase del Fem Matemàtiques són també activitats competencialment riques. La diferència amb els problemes de la primera fase és que són problemes que en el concurs es fan de manera individual, juntament amb tres problemes més i en un temps limitat d'una hora i quart. Proposen igualment reptes que engresquen els alumnes i afavoreixen el seu raonament matemàtic, però estan pensats per ser treballats en un període de temps molt més curt que els problemes de la primera fase.

Són també activitats on es dona molta importància a la justificació dels processos, el nivell de les estratègies emprades i l'exposició de solucions argumentades, raonades i comprovades. També es valoren molt la representació i la complexitat del llenguatge matemàtic utilitzat.

En la selecció de problemes per al blog hem prioritzat els que considerem que han tingut respostes més riques per part de l'alumnat i els que poden ser pràctics per introduir, treballar o avaluar conceptes a l'aula, per establir connexions o per a la utilització dels recursos de què disposem. També es comenten exemples de respostes d'alumnes per tal de facilitar la preparació del professor.

Com en els problemes de la primera fase, també se selecciona la competència que es considera que es treballa amb més protagonisme dels alumnes o bé aquella de la qual s'han obtingut respostes més variades, i se n'exemplifiquen els diferents nivells obtinguts seguint Burgués i Sarramona (2013a i b).

En definitiva, són activitats competencials amb un plantejament més curt en el temps i que a l'aula es poden utilitzar com a recurs de treball d'equip, individual, per introduir continguts o per fer connexions i, essencialment, per raonar matemàticament.

A continuació exposarem el problema de la segona fase seleccionat, «Un decimal periòdic».

6. Un decimal periòdic

Com en «La torre de divisors», en «Un decimal periòdic» també es treballa el concepte de divisió, però amb més protagonisme de la divisió no exacta. És un problema en què els alumnes han de realitzar un treball d'investigació de les relacions numèriques que ocorren en una divisió decimal periòdica. Se'ls demana que trobin un patró amb les xifres del període i també la generalització per a qualsevol longitud que es demani. Són un tipus d'exercicis que se solen treballar poc a l'aula i que, en canvi, donen una visió més àmplia dels diferents conceptes involucrats: divisió (entera i decimal), residu i període.

Enunciat

Si calculeu, amb la calculadora, el quocient amb decimals de la divisió 9:37, la pantalla us mostrarà, com a màxim, tretze xifres decimals. Amb aquestes xifres podreu deduir la resposta a les preguntes següents:

a) Quant sumen les 14 primeres xifres decimals del quocient?
b) Quant sumen les 100 primeres xifres decimals del mateix quocient?

Notem que el problema se centra en l'obtenció d'una xifra concreta dins del període d'un decimal. L'alumne ha d'adonar-se que si planteja la divisió entera adequada, el quocient donarà informació del contingut del cicle i el residu, del lloc ocupat en el cicle incomplet. Aquest cicle forma una sèrie que ens ajuda a trobar o predir el valor d'una xifra en un lloc determinat, cosa que permetrà a l'alumne generalitzar el patró trobat.

Les respostes dels alumnes de sisè a la segona fase de l'activitat indiquen que hi ha força dificultats per passar del recompte de les xifres del període a trobar una regla que permeti la predicció demanada. És, per tant, un bon problema per iniciar-se en la generalització d'un patró numèric a partir d'un context intramatemàtic central com és el concepte de divisió.

En aquest problema, com en «La torre de divisors», també es treballen continguts dels blocs «Numeració i càlcul» i «Canvi i relacions». Hem considerat que les estratègies de resolució de problemes que es treballen principalment són: recomptar, reduir el problema o provar amb casos més senzills, mirar de quines eines disposem (sobre els conceptes clau en la divisió entera), cercar un patró.

Tot i que és un problema més concret que «La torre de divisors», també hi trobem un primer apartat de presa de contacte amb la situació. En aquest primer apartat no és necessari haver trobat el patró per respondre a la pregunta i és per això que un major nombre d'alumnes hi podrà donar resposta. El segon apartat, tot i que formalment s'hi planteja la mateixa pregunta, matemàticament és bastant diferent, ja que la magnitud de la tasca proposada no fa possible respondre-la amb les mateixes eines que s'han utilitzat en el primer apartat. Permet, però, una estratègia d'aproximació amb casos més senzills que pot ajudar al raonament. És per això que el primer apartat no només facilita l'inici als alumnes, sinó que també ajuda a la utilització de l'estratègia de *reduir el problema o provar amb casos més senzills*. Cal que l'alumne investigui la situació tot conjecturant i experimentant per poder trobar el patró que permeti generalitzar i obtenir la xifra que ocupa el lloc número 100. En aquest cas, necessiten l'eina matemàtica de la divisió entera i també la informació que proporciona el residu de la divisió proposada sobre la posició de la xifra en el cicle incomplet.

A continuació recollim algunes de les respostes dels alumnes de sisè participants en la segona fase del Fem Matemàtiques 2016, amb alumnes de vint centres diferents de la província de Barcelona.

La majoria dels alumnes resolen l'activitat *a* sense necessitat de recórrer a la divisió entera i només fent un recompte:

a) Les sumes de les 14 primeres xifres decimal del quocient 9:37 és 42.
Perquè 9:37 és 0.243 243 243 a la calculadora però si et fixes les els numeros 243 es repeteixen constantment, amb aquesta informació ho podem resoldre:

0.243 243 243 24324 =
9 + 9 + 9 + 9 + 6 = 42

Figura 14. Proposta de solució d'alumnes de siseè de primària, curs 2015-2016.

Només en algun cas trobem una argumentació fonamentada en el valor del quocient i el residu. En aquests casos, usen el raonament per resoldre tant l'apartat *a* com el *b*. Posem com a exemple la resposta de l'apartat *b*. En aquest cas, s'aplica el patró a un nombre gran sense dificultat i es dota de sentit el quocient i el residu de la divisió entera plantejada:

Primer dividim 100, que és el nombre de xifres decimals que hem de sumar ara, entre 3, que és el nombre de xifres decimals que es repeteix continuament. Aquesta divisió és igual a 33, que és les vegades que caben aquestes tres xifres en el nombre 100, però té residu 1, que vol dir que cabrà 1 nombre més, el 2. Aleshores, fem la suma dels resultats de 2 per 34, que són les vegades que cap aquest nombre, el resultat de 4 per 33, ja que no arriba a cabre 34 vegades, i el resultat de 3 per 33, perquè tampoc cap 34 vegades. Aquesta suma és igual a 299.

Figura 15. Proposta de solució d'alumnes de siseè de primària, curs 2015-2016.

En aquest problema, com en la majoria dels casos, no es treballa una sola competència. Per exemplificar el nivell competencial assolit, hem triat la competència 6 de primària (que té continuació en la competència 7 de secundària), sobre connexions on l'alumne ha d'*establir relacions entre els diversos significats d'un concepte*, en aquest cas entre la divisió decimal i la divisió entera i entre el significat del període i el del residu.

Per a l'avaluació competencial hem considerat la tasca de trobar la suma de les cent primeres xifres decimals del nombre periòdic resultant de 9:37 i la cerca del patró que porta respondre a aquesta qüestió de manera general. Per a la graduació en els tres nivells tindrem en compte Burgués i Sarramona, 2013a.

Nivell 1

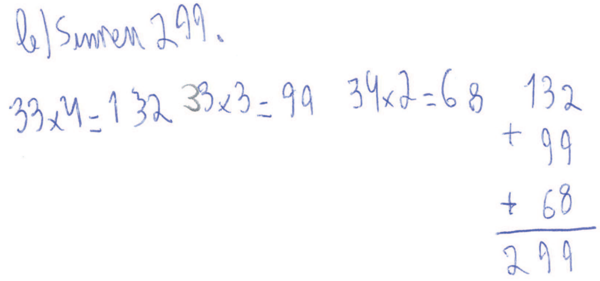


Figura 16. Proposta de solució d'alumnes de siseè de primària, curs 2015-2016.

Els alumnes han de mostrar que identifiquen els diversos significats del concepte en la situació proposada. En aquest cas, l'alumne dona significat a la divisió entera i a la divisió decimal (també a la repetició de les xifres decimals que formen el període). Pel que fa a comptar les cent primeres xifres, organitza la informació i la calcula correctament. S'observa, no obstant això, que no ha expressat com ha calculat la quantitat de xifres, és a dir, no ha expressat la divisió entera que ha realitzat ni ha donat sentit al seu residu.

Nivell 2

Els alumnes fan un altre pas endavant i descriuen la connexió feta expressant de manera explícita la divisió decimal i la divisió entera. Estableixen la connexió, però no la justifiquen. Per exemple:

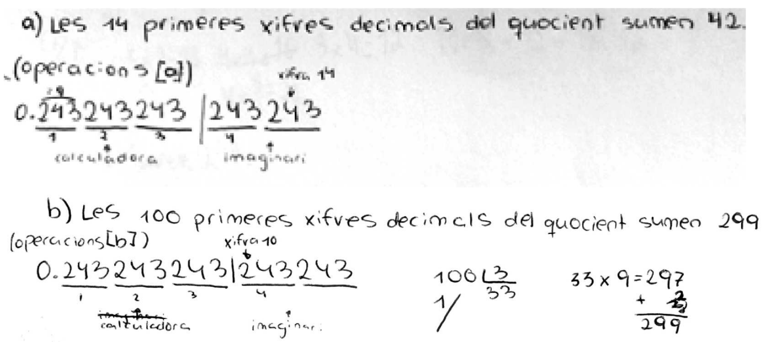


Figura 17. Proposta de solució d'alumnes de siseè de primària, curs 2015-2016.

Nivell 3

Els alumnes expliciten i connecten les dues operacions. A més, justifiquen la relació entre els dos conceptes: divisió decimal en la primera part i divisió entera en la segona (vegeu l'argumentació de la figura 15).

7. Conclusions

L'objectiu que marca el currículum d'aconseguir que els alumnes assoleixin les competències clau obliga el professorat a proporcionar als alumnes activitats que facilitin un treball competencialment ric. Els problemes de les diferents fases del Fem Matemàtiques constitueixen una molt bona font de situacions riques per dur-les a l'aula. Són activitats competencialment riques perquè: proposen reptes per tal que tots puguin començar; afavoreixen el diàleg i el treball en equip, fins i tot el cooperatiu (distribució de la feina de comprovació de la torre de divisors dels cent primers nombres); afavoreixen el treball exhaustiu i, per tant, l'organització de la informació de manera sistemàtica o cercant estratègies per fer la tasca més fàcil; afavoreixen l'ús del llenguatge matemàtic en la comunicació d'un patró o una generalització; afavoreixen el treball productiu (per exemple, en la cerca de divisors d'un nombre); treballen els diferents tipus de raonament matemàtic (deductiu, inductiu, recursiu, analògic); potencien les connexions entre les diferents parts de les matemàtiques (en el nostre cas, entre diferents significats d'un mateix concepte, la divisió); permeten mostrar diverses estratègies i enfocaments que enriqueixen la resolució de problemes.

Dins del grup de treball del Fem Matemàtiques de l'ABEAM s'ha creat el Banc de Recursos per tal de facilitar la tasca de dur aquestes activitats a l'aula. Amb les fitxes elaborades creiem que serà més senzill per al professorat la tasca de guiar l'alumnat en les seves investigacions, per exemple a partir de les produccions dels alumnes que s'hi mostren. Per a aquest article hem seleccionat dos problemes (un de la primera fase, «La torre de divisors», i un de la segona fase, «Un decimal periòdic») que treballen els conceptes de divisió i divisibilitat combinant-los amb la cerca de patrons i generalitzacions per exemplificar dues de les fitxes que es poden trobar en el blog.

Pretenem animar el professorat en la tasca, no gens fàcil, de centrar la metodologia d'aula en la resolució de problemes competencials posant l'èmfasi en els processos matemàtics. En el blog trobareu recursos per proposar la resolució de problemes com a nucli de la classe de matemàtiques (López i Riquelme, 2016a) i enllaços a reflexions més enllà dels materials (López i Riquelme, 2016b). A més de la metodologia, l'avaluació també és una part fonamental del procés d'aprenentatge i és per això que les darreres entrades estan focalitzades en l'avaluació competencial.

Des del grup de treball continuem treballant per proporcionar més eines que ajudin el professorat en aquesta tasca. Pretenem que el blog sigui una eina dinàmica on anem publicant sovint i per això us animem a seguir-nos.

Bibliografia

Burgués, C., Sarramona, J. (2013a). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació primària*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/primaria/prim-matematic.pdf

— (2013b). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic Identificació i desplegament a l'ESO*. Generalitat de Catalunya. Departament d'ensenyament. http://ensenyament.gencat.cat/web/.

content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/eso-matematic.pdf

López, M., Riquelme, C. (2016a). «Banc de recursos per a la resolució de problemes». A: *Congrés Català d'Educació Matemàtica (C^{2}EM)*. Barcelona: FEMCAT, 2016, 1-6. http://c2em.feemcat.org/esdeveniments/banc-de-recursos-per-a-la-resolucio-de-problemes/

— (2016b). «Treballar per competències a partir de la resolució de problemes». Ponència presentada a la XIX Jornada Didàctica de l'ABEAM. Barcelona. http://abeam.feemcat.org/pluginfile.php/1886/mod_resource/content/1/XIXJornadaABEAM_ES_2.3.M.Lopez-C.Riquelme_Barcelona_2016-11-05.pdf

Recursos web

CESIRE-CREAMAT (2014). *Preguntes que poden servir d'indicadors del nivell de riquesa competencial d'una activitat*. http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/images/stories/documents/indicadors_competencials.pdf

— (2015). *Estratègies per a resoldre problemes*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/file/estretegies_per_a_resoldre_problemes.pdf

Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament (2015). *Currículum educació secundària obligatòria. Àmbit matemàtic (matemàtiques)*. http://www.xtec.cat/monografics/documents/curriculum/secundaria/annex4.pdf

López, M., Riquelme, C. (2015). Banc de Recursos del Fem Matemàtiques. http://bancfm.blogspot.com.es/

PuntMat (2013a). *Pràctica productiva i pràctica reproductiva*. http://puntmat.blogspot.com.es/2013/03/practica-productiva-i-practica.html

— (2013b). *Divisors i pensament exhaustiu*. http://puntmat.blogspot.com.es/2013/09/divisors-i-pensament-exhaustiu.html.