ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 33.3 (2015): 99-116
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1594
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de *rayo* al hacer operativa su definición

Semiotic mediation in the meaning-making of *ray* through the operationalization of its definition

Leonor Camargo, Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co, pperryc@gmail.com, csamper@pedagogica.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co

Adalira Sáenz-Ludlow
University of North Carolina at Charlotte, Estados Unidos de América
sae@uncc.edu

RESUMEN • El significado de un objeto geométrico se va consolidando en el uso que se hace de su definición y de los enunciados que establecen sus propiedades; también, en el uso que se hace del objeto mismo como herramienta. Así, entender un objeto geométrico involucra, entre otras cosas, hacer operativa su definición. Es decir, el estudiante debe poder llegar a usar de manera pertinente la definición, en calidad de garantía, en el marco de la producción de demostraciones. En este artículo se analizan aspectos de la construcción del significado de *rayo* asociados al uso de la definición como garantía. Este análisis tiene sus raíces en el signo triádico de Peirce y en la evolución de los interpretantes del profesor y de los estudiantes mientras se esfuerzan por hacer operativa tal definición. Además, ilustra la articulación de las nociones «construcción de significado» y «mediación semiótica del profesor».

PALABRAS CLAVE: construcción de significado; mediación semiótica del profesor; análisis semiótico peirceano; objeto dinámico didáctico; aprendizaje de la geometría.

ABSTRACT • The meaning of a geometric object is consolidated through the use of its definition and of the statements that establish its properties; also in the use of the object itself as a tool. So, understanding a geometric object involves, among other things, operationalizing its definition. That is, the learner should be able to pertinently use the definition as a warrant for statements when producing a proof. This article analyzes aspects of meaning-making of *ray* associated to the use of the definition as warrant. This analysis is rooted in the Peircean triadic sign and in the evolution of the teacher and learners' interpretants while they made the effort to operationalize such definition. Also, it illustrates the articulation of the notions «meaning-making» and «teacher semiotic mediation».

KEYWORDS: meaning-making; teacher semiotic mediation; a Peircean semiotic analysis; didactic dynamic object; learning geometry.

Recepción: octubre 2014 • Aceptación: octubre 2015 • Publicación: noviembre 2015

INTRODUCCIÓN

En el sistema educativo colombiano, el objeto geométrico rayo o semirrecta se introduce en los primeros años de educación primaria, se menciona ocasionalmente en secundaria y se usa como herramienta teórica en cursos universitarios de geometría euclidiana. En primaria, por lo regular, se presenta mediante una representación icónica; se describe como porción de una recta que tiene «un punto inicial y [otros puntos] que siguen indefinidamente en una dirección» (Camargo, Castiblanco, Leguizamón y Samper, 2003) y se establece visualmente su distinción con una recta y con un segmento. En secundaria, se avanza en la conceptualización más allá de su representación icónica y descripción informal; se introduce la definición y se proponen ejercicios para interpretar los términos involucrados. Por ejemplo, se define el rayo *AB* como el segmento *AB* unido al conjunto de puntos *P* de la recta *AB* tales que *B* está entre *A* y *P*. A partir de la definición, se proponen ejercicios de reconocimiento y diferenciación de rayos. Con ello parece suponerse que el rayo ha sido conceptualizado completamente. Sin embargo, desde nuestro punto de vista, es problemático suponer que la conceptualización de un objeto geométrico, por elemental que sea, se reduce a conocer su descripción y su definición. Esta mirada trivializa la actividad matemática y también su enseñanza y aprendizaje. Por el contrario, la conceptualización demanda un proceso complejo de interpretación que incluye usar la definición en la solución de problemas y en la aplicación de teoremas en cuyos enunciados o demostraciones intervenga el objeto.

Las preguntas que movilizan nuestro ejercicio investigativo se sintetizan así: ¿En qué consiste la construcción de significado de un objeto geométrico, ligada al uso de su definición en una demostración? ¿Cuál es una posible ruta didáctica que puede seguir el profesor en la mediación semiótica para promover tal construcción? En este escrito se ilustra el proceso analítico que realizamos sobre la conceptualización del objeto geométrico rayo. Queremos destacar que incluso objetos geométricos que podrían ser considerados elementales requieren un tratamiento cuidadoso en busca de su conceptualización matemática.

En particular, en el nivel universitario, y especialmente en cursos de geometría para profesores en formación, la definición de *rayo* es un recurso para garantizar afirmaciones sobre la pertenencia de un punto a un rayo, o sobre la relación de interestancia que existe entre un punto de un rayo y los dos puntos que lo determinan. A partir de estas afirmaciones se definen ángulo y bisectriz, y se demuestran teoremas centrales de la geometría euclidiana, como la congruencia de triángulos y el teorema del ángulo externo. En estos casos, se avanza en la conceptualización de *rayo* al hacer operativa su definición, es decir, al lograr su expresión en términos pragmáticos de manera que junto con el significado de la unión entre conjuntos sea posible usarla en un paso de una demostración para garantizar que se tiene una cierta interestancia. Según Bills y Tall (1998, citado en Selden, 2012), un estudiante maneja una definición de manera operativa si es capaz de usarla creativa y significativamente en un argumento deductivo.

Para interpretar en detalle la construcción de significado de objetos geométricos centrada en el proceso de hacer operativas las respectivas definiciones, recurrimos a la perspectiva semiótica de la enseñanza y el aprendizaje, inspirada en la idea peirceana de signo triádico (Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2012). Esta perspectiva es útil no solo para describir el aprendizaje de las matemáticas en términos de construcción de significados, sino también para explicar la gestión del profesor cuando propicia dicha construcción. Esta gestión es lo que consideramos mediación semiótica.

La noción de *construcción de significado* la entienden diversos autores (Godino y Llinares, 2000; Radford, 2000; Robles, Del Castillo y Font, 2010) como la búsqueda de compatibilidad entre las ideas individuales acerca de un objeto matemático y las de la comunidad cultural de referencia. Sobre la base de esa idea, el proceso de construcción del objeto puede conceptualizarse usando el signo tríadico de Peirce, que obliga a poner el acento en las diversas interpretaciones del objeto que coexisten en el aula de clase. Además, la noción de *mediación semiótica del profesor* (Salinas, 2010; Mariotti, 2012; Samper, Camargo, Molina y Perry, 2013) es un constructo cuyo origen en la perspectiva sociocultural también puede precisarse en el marco peirceano. Estas nociones han sido útiles para describir y explicar fenómenos de aprendizaje. El análisis aquí presentado se refiere a un episodio de aula en el que se avanza en la construcción del significado de *rayo* con la mediación semiótica del profesor, donde se manifiestan las interpretaciones de los estudiantes relacionadas con hacer operativa la definición de *rayo*.

MARCO DE REFERENCIA

Construcción de significado y mediación semiótica del profesor desde una perspectiva semiótica

Desde el punto de vista de Peirce,[1] la *semiosis* es la actividad comunicativa en la que se crean o se usan signos. En un SIGNO se ponen en relación tres componentes: *objeto*, a lo que se alude en la comunicación; *signo vehículo*, representación con la que se alude al objeto (por ejemplo, palabras, gestos, gráficos, combinación de estos tres elementos, etc.), e *interpretante*, lo que produce el signo vehículo en la mente de quien lo recibe, lo percibe y lo interpreta (figura 1).

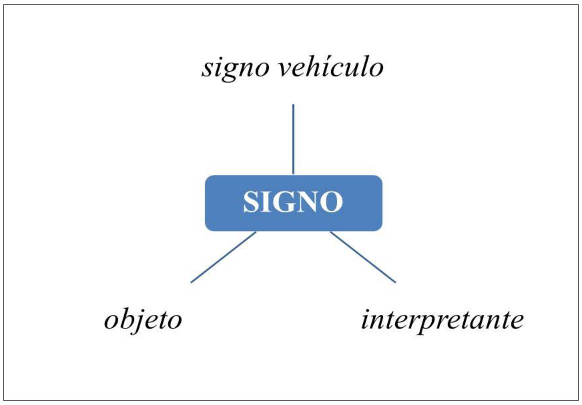


Fig. 1. Visión peirceana de SIGNO.

Esquemáticamente, en un intercambio verbal exitoso se suceden ciclos de interpretación que se inician cuando una persona A elige un determinado aspecto de un *objeto*, lo codifica y expresa en un *signo vehículo* dirigido a una persona B. En el marco del conocimiento y la experiencia de B, este interpreta y decodifica el *signo vehículo* emitido por A, y surge en la mente de B un *interpretante*, que determina su *objeto* y que puede estar en mayor o menor consonancia con el *objeto* al que hace referencia el *signo vehículo* de A. En su turno, B centra la atención en un aspecto de su *objeto* y lo codifica en un *signo vehículo* dirigido a A. Ahora es A quien decodifica el *signo vehículo* emitido por B y surge en A un *interpretante* que determina un nuevo *objeto*. El intercambio continúa hasta que A o B introducen otro *objeto*, cerrando el ciclo.

De acuerdo con la descripción esquemática, en una clase la interpretación es impulsada por el profesor con su mediación semiótica, y tiene como fin la construcción de significado del objeto de enseñanza. En este proceso se distinguen y coexisten tres tipos de *objetos*, que concretamos para las matemáticas: el *objeto real* (*OR*) matemático es el objeto aceptado por la comunidad matemática de

1. El fundamento teórico expuesto en este artículo acerca de la teoría del signo triádico de Peirce se basa en la interpretación que hacen Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) para la enseñanza y el aprendizaje.

referencia hacia el cual tiende el proceso de construcción de significado; el *objeto inmediato del emisor* (*oi*) es el constituido por el aspecto específico del *OR* que el emisor, generalmente el profesor, interpreta y representa en un *signo vehículo*, y el *objeto dinámico del receptor* (*od*) se refiere a un aspecto de lo interpretado por el receptor, generalmente el estudiante,[2] a partir del *signo vehículo* del emisor. Esta coexistencia pone en evidencia la complejidad de la interpretación en la comunicación, principalmente porque el *objeto inmediato del emisor* está presente (implícita o explícitamente) en el *signo vehículo* que lo acarrea, mientras que el *objeto dinámico del receptor* es generado en su *interpretante*, no es público, y debe ser inferido sobre la base de uno o más *signos* vehículos cuando asume el papel de emisor.

La construcción de significado ocurre en ciclos de interpretación, individuales y colectivos, que atienden a asuntos de la actividad semiótica. A través de los ciclos el significado puede evolucionar. La interacción genera una secuencia de SIGNOS en la que las partes (profesor y estudiantes que se involucran en el diálogo) tienen diferentes niveles de conocimiento con respecto al *OR* matemático y diferentes propósitos iniciales. El profesor apoya a los estudiantes en la construcción de significado del *OR* y los estudiantes participan de manera genuina en el proceso de construcción de significado. Los *objetos inmediatos* del profesor son aspectos del *OR* que quiere representar en sus *signos* vehículos. La meta de la enseñanza es lograr la convergencia de los *objetos dinámicos* de los estudiantes hacia el *OR*, vía un acercamiento al *objeto inmediato* pretendido del profesor.

En un intercambio en el aula, los *interpretantes* del profesor pueden generar que él active sus significados sobre los objetos en estudio para usarlos como punto de referencia para acciones específicas, identifique aspectos del *OR* sobre los que se debe enfocar para aclarar o ampliar la construcción de significado y tome decisiones sobre cómo continuar guiando la conversación con un propósito didáctico. Por ello, en un acto de interpretación el profesor atiende al *OR* desde dos perspectivas: una, la matemática (entendiendo que el objeto matemático del profesor está cerca del objeto que acepta la comunidad del discurso), y otra, la del objeto en construcción, en la que el foco de mayor interés es la enseñanza y el aprendizaje (perspectiva didáctica del objeto matemático en construcción). Naturalmente, todas las acciones del profesor están influidas por sus creencias, conocimientos y experiencias previas.

Llamamos *mediación semiótica del profesor* a las acciones interpretativas y deliberadas que realiza con el propósito de lograr la convergencia mencionada. Las acciones son respuesta a efectos en sus *interpretantes*, generados al inferir los *interpretantes* de los estudiantes. En el intercambio comunicativo, el profesor ajusta sus *objetos inmediatos* a aquellos aspectos interpretados por él, cuando actúa como receptor, que considera útiles en la evolución que pretende. Así, se produce la integración en objetos dinámicos del profesor que dependen de los objetos inmediatos de los estudiantes, de los aspectos más relevantes que considera necesarios en la evolución. Por esta razón, en el aula de clase, la mayoría de los *objetos dinámicos del profesor* no son *objetos dinámicos* matemáticos «genuinos». Los hemos denominado *objetos dinámicos didácticos del profesor* (*odd*) (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014). El calificativo *didáctico* alude a que son el resultado de decisiones tomadas para facilitar la evolución de los objetos dinámicos de los estudiantes hacia el objeto inmediato pretendido. En la figura 2 representamos la dinámica explicada.

2. Debe entenderse que el profesor se dirige a todos los estudiantes de una clase y que con la expresión «el estudiante» nos referimos a aquel o aquellos que reaccionan comunicativamente.

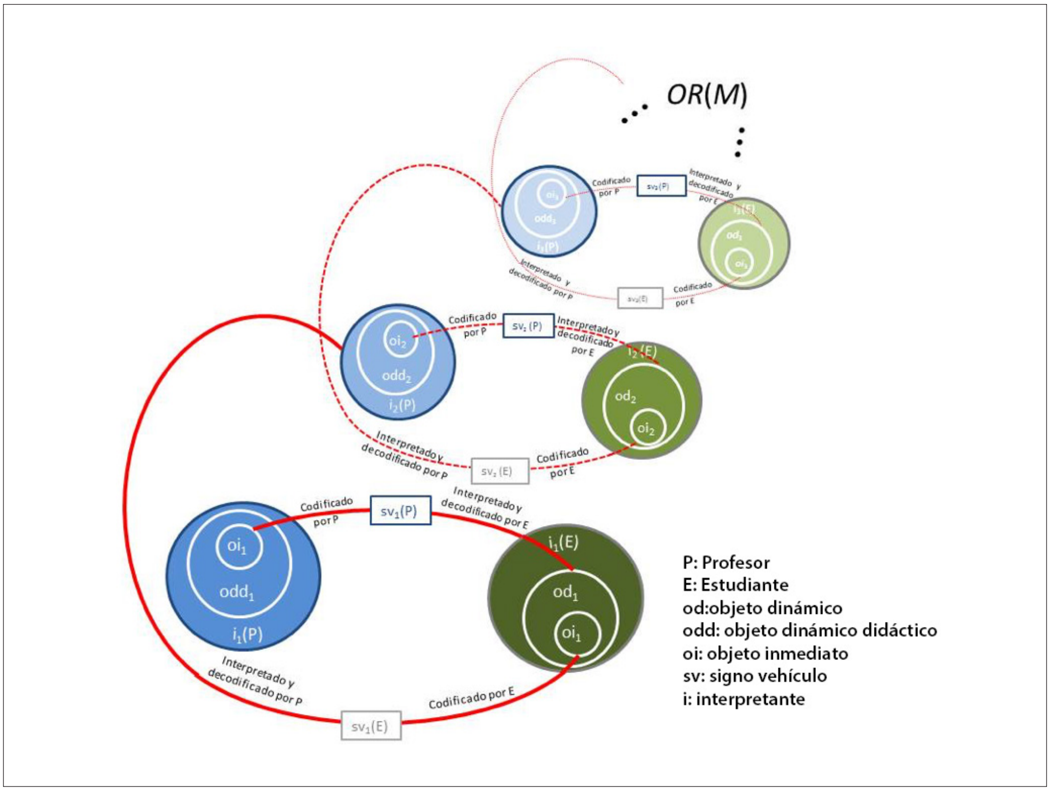


Fig. 2. Esquema del intercambio comunicativo en el aula de clase

Hacer operativa la definición de *rayo*

En el sistema teórico que sirve de contexto matemático al episodio analizado, hacer operativa la definición de *rayo* involucra tres instancias de intervención sobre la definición:

(1) A partir de la definición $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{P \mid A - B - P\}$, la pregunta acerca de la pertenencia de un punto a un rayo conduce a reconocer que la definición está dada en términos de la unión de dos conjuntos disyuntos. Es decir: $X \in \overrightarrow{AB} \leftrightarrow X \in \left[\overline{AB} \cup \{P|A-B-P\}\right]$.

(2) En términos de disyunción de proposiciones, la pertenencia de un punto a un rayo puede expresarse así:

$$X \in \left[\overline{AB} \cup \{P|A-B-P\}\right] \leftrightarrow \left(X \in \overline{AB}\right) \vee (X \in \{P \mid A-B-P\}).$$

(3) Las posibilidades de interestancia surgen con la identificación de la pertenencia de X a uno de los conjuntos:

(i) $X \in \overline{AB} \leftrightarrow X \in \left(\{Q|A-Q-B\} \cup \{A,B\}\right)$ lo que a su vez se puede expresar en términos de disyunción de proposiciones, dando lugar a:
$X \in \left(\{Q|A-Q-B\} \cup \{A,B\}\right) \leftrightarrow \left(X \in \{Q|A-Q-B\}\right) \vee \left(X \in \{A,B\}\right)$.

(ii) En $X \in \{P \mid A-B-P\}$, la interestancia está explícita.

Recapitulando, la expresión de pertenencia de un punto a un rayo se ha transformado así:

$X \in \overrightarrow{AB} \leftrightarrow X \in \{Q|A-Q-B\} \vee X \in \{A,B\} \vee X \in \{P|A-B-P\}$. En términos de interestancia: (A–X–B) o (A–B–X) o X puede ser A o X puede ser B.

Este recorrido deja ver el significado de *rayo* derivado de su definición y el posible uso de esta como garantía en un paso de demostración. En síntesis, el uso de la definición lleva a identificar las dos posibles interestancias que existen entre un punto cualquiera del rayo y los dos puntos que lo determinan.

Dado el carácter bicondicional de las definiciones, es posible hacer el proceso en la vía contraria. Si se tienen las dos posibilidades de interestancia $A-X-B$ o $A-B-X$, con X diferente de A y de B, se puede afirmar que X pertenece a uno de los dos conjuntos: $\overline{AB}$, $\{P|A-B-P\}$. Con ello se asegura que $X \in \left[\overline{AB} \cup \{P|A-B-P\}\right]$, por lo que se puede asegurar que $X \in \overrightarrow{AB}$.

En la experiencia que describimos a continuación pusimos en juego la hipótesis de que la construcción del significado de *rayo* puede incentivarse comparando la situación de pertenencia a la recta con la de pertenencia al *rayo* . En el caso en que el punto pertenezca a la recta, las tres opciones de interestancia que pueden analizarse ($A-X-B$, $A-B-X$, $X-A-B$) tienen como garantía el teorema tres puntos[3] y no la definición de *rayo* o *semirrecta* $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{P \mid A-B-P\}$.

Para estudiantes que están aprendiendo a demostrar puede no ser evidente esta diferenciación y puede parecerles análoga la ruta de un proceso deductivo si se parte de una recta o de un rayo como lugar de ubicación de los puntos sobre los cuales se va a estudiar la interestancia, pero si la definición de *rayo* se hace operativa, no solo se aclara la diferenciación de las rutas, sino que se gana en significado del objeto geométrico como herramienta deductiva.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

El episodio con el que ejemplificamos el potencial analítico de la perspectiva semiótica forma parte de un conjunto de episodios que recogen la interacción comunicativa alrededor del teorema de localización de puntos[4] (TLP) en una implementación del curso de geometría euclidiana plana de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).[5] Este teorema se trató con la suficiente riqueza en relación con la construcción de significado. La interacción comunicativa sucedió en una sesión de clase en la que se institucionalizó la definición de *rayo*, se hizo operativa y se motivó la introducción del TLP.

El curso, constituido por 14 estudiantes con edades entre 18 y 24 años, se ubica en el segundo semestre del programa. Tiene como propósito que los estudiantes aprendan a demostrar deductivamente, participando en la resolución de problemas geométricos abiertos, a partir de los cuales formulan conjeturas y las validan. A medida que se resuelven los problemas, se va conformando un sistema teórico en el que se van introduciendo definiciones, postulados y teoremas. Los estudiantes usan el programa de geometría dinámica Cabri para resolver los problemas y proponer conjeturas. Aquellas que se admiten como ciertas, son demostradas deductivamente para constituirse en los teoremas del sistema. La articulación entre la exploración empírica para descubrir y formular conjeturas y la elaboración de demostraciones deductivas para incorporar teoremas al sistema teórico permite a los estudiantes vivir experiencias significativas de participación en la construcción de conocimiento. El profesor, coautor de este artículo, tiene experiencia en gestionar la clase combinando ambos acercamientos.

3. Si A, B y C son puntos colineales, entonces uno de ellos está entre los otros dos.
4. Dado el rayo CT y un número real z, $z > o$, entonces existe un único punto X que pertenece al rayo CT tal que la distancia de C a X es igual a z.
5. La investigación fue financiada por Colciencias y el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá-Colombia). En este artículo nos centramos en el objeto rayo, pues nos parece que ejemplifica la complejidad que demanda la construcción de significado, incluso de objetos que parecerían elementales.

Registro de información

La información sobre la actividad semiótica provino de: (i) videograbaciones de las clases del curso, (ii) grabaciones de audio, (iii) notas de clase elaboradas a diario por grupos de estudiantes, quienes debían reconstruir los principales aspectos tratados en la clase y enviarlas al profesor (este las revisaba y las ubicaba en una carpeta virtual para uso de todos), (iv) notas tomadas por miembros del equipo de investigación que acompañaban las clases y (v) reconstrucción narrativa hecha por el profesor en las reuniones de investigación semanales de evaluación y definición del rumbo de nuevas acciones.

Construcción de datos experimentales

La construcción del episodio que fue objeto del análisis que se presenta en este artículo se hizo revisando las videograbaciones, las grabaciones de audio y las notas de clase del 5, 11 y 12 de septiembre. De acuerdo con la estrategia pedagógica, los estudiantes se involucraron en un proceso de resolución de un problema y formularon conjeturas que se expusieron ante el grupo. Una de ellas se demostró colectivamente y la demostración de otra se esbozó con referencia a la anterior. La segunda sirvió de base para motivar la formulación del TLP y su demostración.

A continuación presentamos una síntesis de las tres clases, aunque el episodio que se analiza se construyó solo con fragmentos de la clase del 12 de septiembre. Lo sucedido el 5 y el 11 contextualiza el episodio. La clase del 5 de septiembre comienza con la exposición de las producciones de dos grupos de estudiantes, fruto de la resolución del problema de los cuatro puntos propuesto por el profesor en una clase anterior: «Dados tres puntos *A*, *B* y *C*, nos preguntan si es posible construir un punto *D* tal que [los segmentos] *AB* y *CD* se bisequen». El problema buscaba que los estudiantes tuvieran la experiencia de construir un punto con dos condiciones específicas: en una interestancia[6] dada y a una distancia específica de otro punto. Para su construcción casi todos los grupos se valen de una circunferencia con centro en el punto medio *M* del segmento *AB* y radio *CM*[7] (tabla 1). Pero como el objeto geométrico *circunferencia* no forma parte del sistema teórico conformado hasta el momento,[8] el profesor motiva la introducción del TLP que justifica el procedimiento para determinar el punto *D* a una distancia de *C* igual a dos veces *CM* sin recurrir a la circunferencia.

El grupo de Juan expone la construcción realizada (tabla 1). En su relato verbal y en la interacción con el profesor, Juan incurre en algunas imprecisiones de lenguaje, «Construimos la semirrecta desde el punto *C* hasta el punto *M* […] el vector *CM*, digo… el rayo *CM* […] Es que aquí [en Cabri] se llama semirrecta, pero pues… rayo», y refiriéndose a la notación de *rayo*, «Origen, destino… origen, rumbo», situación que el profesor aprovecha para llamar la atención sobre la necesidad de introducir la definición del objeto *rayo* en el sistema teórico. Cuando lo hacen, queda establecido que $\overrightarrow{CM} = \overline{CM} \cup \{X \mid C - M - X\}$. El profesor hace notar que otros grupos hicieron una construcción muy similar cuya diferencia es que en vez de construir el rayo *CM* construyen la recta *CM*.

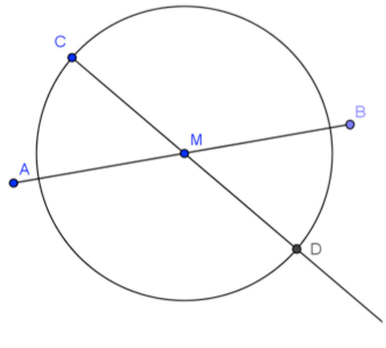
En la clase del 11 de septiembre se demuestra la siguiente conjetura: «Dados tres puntos no colineales *A*, *B* y *C*, si *D* pertenece a la recta *CM*, *D* es diferente de *C*, *M* punto medio del segmento *AB* y *MD* igual a *MC*, entonces el segmento *AB* y el segmento *CD* se bisecan». Para ello, demuestran que *M* también es punto medio[9] del segmento *CD* determinando un punto *D* en la recta *CM* con la condición de que *CM* =*MD* [parte (ii) de la definición de punto medio] y garantizando la existencia de

6. El punto *B* está entre los puntos *A* y *C* (*A-B-C*) si: i) *A*, *B* y *C* son colineales y ii) si la distancia de *A* a *B* más la distancia de *B* a *C* es igual a la distancia de *A* a *C* ($AB + BC = AC$).
7. Para representar la distancia de *C* a *M*, usamos la notación *CM* sin otra alusión.
8. El objeto geométrico *circunferencia* se introduce después de trabajar la semejanza de triángulos.
9. *M* es punto medio del segmento *CD* si: (i) *C-M-D* y (ii) $CM = MD$.

D gracias al postulado puntos de recta-números reales.[10] Como ya tienen un punto *D* con una de las condiciones que debe cumplir el punto medio de *CD*, ahora tienen que demostrar la otra condición, es decir, que *M* está entre *C* y *D* [parte (i) de la definición de punto medio]. Como está dado que *D* pertenece a la recta *CM*, por definición de colinealidad de puntos, deducen que los puntos *D*, *C* y *M* son colineales. Entonces, se valen del teorema tres puntos[11] para asegurar que se da alguna de las siguientes interestancias: *D-C-M* o *C-D-M* o *C-M-D*. Para finalizar, descartan dos de las interestancias posibles (*D-C-M* y *C-D-M*), dado que generan una contradicción con las condiciones que se tienen previamente aceptadas; en consecuencia, se tiene solamente la interestancia *C-M-D*.

En la clase del 12 de septiembre, el profesor pide analizar si la demostración hecha en la clase anterior cambia o no, cuando en lugar de hacer la construcción del punto *D* usando la recta *CM*, se hace usando el rayo *CM*. Los fragmentos de clase que se incluyen en la construcción del episodio contienen la reconstrucción de los primeros pasos de dicha demostración, donde se resalta la diferencia entre las garantías teóricas que permiten validar la interestancia *C-M-D* según si se usa una recta o un rayo. Es en ese momento en el que se da la oportunidad de usar la definición de *rayo* en una demostración y con ello la posibilidad de que se haga operativa en la mente de los estudiantes.

Tabla 1.
Procedimiento presentado en la construcción del problema de los cuatro puntos

Problema de los cuatro puntos: Dados tres puntos *A*, *B* y *C* no colineales, construir un punto *D* tal que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen.	
Pasos que realizaron casi todos los grupos para hacer la construcción: 1. Determinan los puntos *A*, *B* y *C* no colineales. 2. Construyen $\overline{AB}$. 3. Hallan el punto medio *M* de $\overline{AB}$. 4. Construyen una circunferencia con centro en *M* y radio *CM*. 5. Construyen $\overleftrightarrow{CM}$ o $\overrightarrow{CM}$. 6. Determinan el punto *D* en la intersección de la circunferencia con $\overleftrightarrow{CM}$ o $\overrightarrow{CM}$.	

La selección de fragmentos significativos para el análisis se hizo a partir de la trascripción completa de las clases, la cual se llevó a cabo procurando una reproducción fiel de la interacción comunicativa. Esta se revisó varias veces, cotejando los registros de audio y vídeo, y se incluyeron anotaciones entre paréntesis, «( )», para aclarar algunos aspectos del contexto de las intervenciones. Después, se hizo un primer ejercicio de análisis en el que tres miembros del equipo de investigación resaltaron los *signos* vehículos que consideraban relevantes para la reconstrucción de la semiosis, identificaron en los *signos* vehículos los *objetos inmediatos* y propusieron inferencias acerca de los *interpretantes, objetos dinámicos* y *objetos dinámicos didácticos*. Este ejercicio dio lugar a la identificación de cinco ciclos de interpretación. Los ejercicios posteriores de depuración permitieron afinar el análisis de cada ciclo.

10. Dada una recta hay una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales tal que: (i) a cada punto de la recta le corresponde exactament un número real; (ii)) a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta. El número asignado a un punto es llamado la coordenada de *A* y se denota con c(*A*).
11. Si *A*, *B* y *C* son puntos colineales, entonces uno de ellos está entre los otros dos.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS

El análisis relata e interpreta la semiosis que tuvo lugar en cinco ciclos de interpretación. El objeto real matemático del profesor (*OR*), objetivo de la semiosis analizada, es la definición de *rayo* como herramienta teórica para garantizar un paso de demostración.

Ciclo 1: Identificación del siguiente paso de la demostración, una vez se ha afirmado que el punto *D* pertenece al rayo

Como resultado de la resolución del problema de los cuatro puntos surgen varias conjeturas que se comparan para ver si refieren al mismo hecho geométrico. Una de ellas se depura en su formulación para llegar a la siguiente: dados tres puntos no colineales *A*, *B* y *C*, si *D* pertenece a la recta *CM*, *M* punto medio del segmento *AB*, $\{D\} \neq \{C\}$, *CM*=*MD*, entonces los segmentos *AB* y *CD* se bisecan. La demostración, realizada colectivamente, incluye la información que proporciona el antecedente y la afirmación: *C*, *M* y *D* son colineales. Para justificar la interestancia *C-M-D* que se requiere para afirmar que *M* es punto medio del segmento *CD*, se descartan dos de las tres interestancias posibles (*M-C-D*, *C-D-M*, *C-M-D*), garantizadas por el teorema de los tres puntos.

Una vez producida tal demostración, el profesor propone compararla con la que se haría para el caso en el que *D* perteneciera al rayo *CM* y no a la recta *CM*. Recuerdan los primeros pasos de la demostración. El profesor confirma lo dicho y escribe debajo del enunciado y en otro color «*D*, *C*, *M* son colineales» y solicita a los estudiantes pensar cómo seguiría la demostración, sabiendo que *D* está en el rayo *CM*:[12]

Tabla 2.
Interacción correspondiente al primer ciclo de interacción

		Interpretación
Profesor:	[…] Como teníamos en aquella ocasión que *D* pertenece a la recta *CM* ¿cierto? (escribe en el tablero, en rojo, debajo de la afirmación de la colinealidad: $D \in \overleftrightarrow{CM}$) entonces pudimos decir que *D*, *C*, *M* son colineales, y después […] analizábamos los tres casos que pueden pasar de interestancia entre los puntos *C*, *D* y *M* ¿recuerdan el *asunto?* Y eso lo podemos hacer dado que se sabe que *D* pertenece a la recta, pero ahora tenemos que *D* pertenece al rayo, *¿ven el asunto*? Oiga, y si *D* pertenece al rayo, ¿qué pasa?, ¿podemos afirmar esto (señala la afirmación de colinealidad de los puntos *C*, *D* y *M* que escribió antes en el tablero) o no? ¿Qué podemos hacer? Esa sería la parte donde puede cambiar la demostración, ¿ven el asunto? Entonces, pensemos el *asunto*, ahora teniendo que *D* pertenece al rayo *CM* (escribe, en rojo, en el tablero, a la izquierda y a la misma altura en que escribió la afirmación sobre la pertenencia de *D* a la recta *CM*: « $D \in \overrightarrow{CM}$ »). Teniendo esto (señala lo que acaba de escribir), ¿qué podemos decir, si *D* pertenece al rayo *CM*? (En la figura que aparece en el tablero recorre con el dedo el $\overrightarrow{CM}$) […].	oi_1: identificación del consecuente de la proposición condicional cuyo antecedente alude a la pertenencia de un punto a un rayo.
Antonio:	Que… ¿hay una interestancia?	*oi*: afirmación que debería dar como consecuencia el hecho de que *D* pertenece al rayo. *od*: disociado del oi_1 del profesor.
P:	Que hay interestancia… ¿qué interestancia?	
Antonio:	*C*, *M*, *D* o *C*, *D*, *M*.	
P:	Entonces, vamos a ver. Tú dices que puede aparecer la interestancia… dímelas otra vez.	
Antonio:	*C*, *M*, *D* o *C*, *D*, *M*.	

12. Hemos indicado con letra gris las partes de la intervención que corresponden a los *signos* vehículos *(sv)* que interesan en el análisis.

El interpretante del profesor, producto de lo trabajado hasta el momento respecto al problema de los cuatro puntos, incluye la asociación que se puede establecer entre las posibles interestancias que se analizan en la demostración para el caso en el que *D* está en una recta con las que se podrían analizar si *D* estuviera en un rayo. En la primera parte de su *sv*, cuando se refiere al *asunto*, se enfoca en las consecuencias, en términos de interestancias, del hecho de tener a *D* en una recta. En la segunda parte, el *asunto* al que se refiere es el planteamiento de las diferencias que puede tener la cadena deductiva por haber introducido la pertenencia de *D* al rayo.

Con la expresión «¿qué podemos decir, si *D* pertenece al rayo *CM*?» acompañada del gesto de recorrer con un dedo el $\overrightarrow{CM}$ el profesor puede estar pidiendo, o bien la identificación del consecuente de la proposición condicional cuyo antecedente alude a la pertenencia de un punto a un rayo, o bien la consecuencia de introducir la definición de *rayo* en términos de interestancias. Consideramos, por los diálogos que siguen, que el oi_1 es lo primero. Entrevemos como odd_1 el comienzo del procedimiento para hacer operativa la definición de *rayo* mediante la precisión del significado de la pertenencia de un punto a un rayo, la cual permitirá establecer dos posibles interestancias: *C-D-M* o *C-M-D*.

Antonio responde mencionando las dos posibles interestancias con las que debería culminarse, al hacer operativa la definición de *rayo*, saltándose pasos importantes en la demostración. Probablemente su *interpretante* contiene la representación del rayo *CM*, que el profesor señala, la opción de ubicar *D* en dos posibles lugares con respecto a *C* y *M*, la definición de *rayo* discutida en la clase anterior y las consecuencias de declarar que el punto *D* pertenece al rayo. Este interpretante parece incluir como *od* el significado dado a la definición de *rayo* como herramienta teórica para afirmar directamente las posibles interestancias. Su *sv* parafraseado por el profesor «Qué… ¿hay una interestancia? […] *C*, *M*, *D* o *C*, *D*, *M*» acarrea como *oi* la afirmación, en términos de interestancias que, según él, debería dar como consecuencia el hecho de que *D* pertenece al rayo. De hecho, menciona primero la interestancia que aparece casi explícita en la definición de *rayo*, *C-M-D*. En ese sentido, podemos suponer que el *od* de Antonio está disociado del *oi* del profesor, pues Antonio no usa la definición operativa de *rayo* en términos de la pertenencia del punto *D* a la unión de dos conjuntos.

La mediación semiótica del profesor, en los siguientes ciclos de interpretación, se centra en guiar a los estudiantes para que produzcan de manera deductiva la definición operativa de *rayo* y, junto con la definición operativa de la unión entre conjuntos, construyan los pasos de la demostración con el rigor esperado. En ese sentido, el trabajo se centra en construir los pasos intermedios entre la afirmación de la pertenencia de *D* al rayo y la afirmación acerca de las posibles interestancias.

Ciclo 2: Explicitación de la definición de rayo para comenzar a hacerla operativa

A partir de lo dicho por Antonio, el profesor se centra en la definición de *rayo* buscando que los estudiantes adviertan que está dada en términos de unión de dos conjuntos. Su *interpretante* parece incluir el interés de que los estudiantes se den cuenta de que las posibles interestancias no son deducción directa de la pertenencia de *D* al rayo, sino que deben construir una vía que parta de la explicitación de la definición, para hacerla operativa. Su odd_2 es la explicitación de la pertenencia de *D* al rayo en términos de la pertenencia de *D* a la unión de los conjuntos que conforman el rayo como requisito para garantizar, posteriormente, las posibles interestancias.

Tabla 3.
Interacción correspondiente al segundo ciclo de interacción

Profesor:	(En el tablero ha escrito, en rojo, debajo de la afirmación sobre la pertenencia de *D* al rayo y una debajo de la otra, las dos interestancias mencionadas *C-M-D* y *C-D-M*) ¿Por qué estás seguro de que pueden pasar estas interestancias? ¿Por qué pueden aparecer esas interestancias?	oi_2: expresión de la definición de *rayo* en términos de la pertenencia de *D* a la unión de dos conjuntos.
Antonio:	Pues… por la definición de *rayo*	*oi*: definición de *rayo* como garantía de las posibles interestancias mencionadas. *od*: explicación de por qué la definición de *rayo* garantiza de manera directa las posibles interestancias.
P:	Por la definición de *rayo* (asiente con la cabeza)	
Antonio:	(Mira con frecuencia su cuaderno) tenemos la… podemos decir que… la interestancia… que *D* puede estar después del segmento *CM* (mueve su brazo derecho extendido, hacia su derecha), o sea…	
Molly: Estud:	Por la definición de *rayo*, [podemos decir] que tenemos un segmento CM Y un punto.	
P:	Síiii (asiente con la cabeza).	
Ernesto:	Y un punto a un lado,	
Antonio:	(A la vez que Molly habla) Y un punto al lado.	
Molly:	unión… y un punto que puede cumplir con [una de] esas dos interestancias.	

El *sv* del profesor integrado por su pregunta «¿Por qué estás seguro de que pueden aparecer esas interestancias?» y sus expresiones de apoyo a los estudiantes que intentan explicitar la definición de *rayo*, acarrea como oi_2 la expresión de la definición de *rayo* en términos de la pertenencia de *D* a la unión de dos conjuntos como primer paso de una cadena deductiva que lleva a concluir las interestancias posibles.

Como reacción, entre Antonio, Molly y Ernesto construyen un *sv* colectivo cuyo *oi* es la definición de *rayo* como garantía de las posibles interestancias mencionadas. El *interpretante* de los estudiantes parece contener la confirmación de la posibilidad de usar la definición de *rayo* como garantía, la identificación en la representación del rayo *CM* de dos regiones: el segmento *CM* (mencionado por Molly en el *sv*) y los demás puntos del rayo (mencionados por Antonio y Ernesto en el *sv*) y la posible ubicación del punto *D* en cada región. No parece que los estudiantes traten de construir un paso de la demostración en el que expresen la definición de *rayo* en términos de la pertenencia de *D* a la unión de dos conjuntos, pese a que Antonio comienza por señalar dónde podría estar *D*, y Molly con sus intervenciones reconstruya la definición aludiendo a la unión. Por eso no se refieren a la posible pertenencia de *D* a cada conjunto de la unión ni asocian cada conjunto de la unión con una posible interestancia. El *od* de los estudiantes es la explicación de por qué la definición de *rayo* garantiza de manera directa las posibles interestancias. Ellos interpretan la pregunta sobre la razón por la cual pueden estar seguros de que aparecen las interestancias como la necesidad de explicitar la garantía del paso mencionado por Antonio en el ciclo 1 y, ante la sugerencia del profesor de desarrollar la idea (al repetir lo que dice Antonio y asentir con la cabeza), entienden que deben explicarla en vez de construir un paso de demostración. De nuevo el *od* de los estudiantes está disociado del *oi* del profesor.

Ciclo 3: El punto *D* está en uno de los dos conjuntos que intervienen en la definición de rayo

El profesor nota que los estudiantes no ven la necesidad de establecer una cadena deductiva que incluya la pertenencia del punto *D* a la unión de los conjuntos que conforman el rayo para establecer un puente que ligue la definición con las posibles interestancias. Esto lo lleva a explicitar que deben «poder deducir» las interestancias, a hacer un resumen de lo analizado hasta el momento y a señalar que en la demostración habría que expresar «qué significa que *D* pertenezca al rayo *CM*». Después, él mismo expresa tal significado: «Que *D* pertenezca al rayo *CM*, pensamos en la definición de rayo, significaría que *D* pertenece al segmento *CM* ¿cierto? O que *D* pertenece a un conjunto muy especial ¿cierto? ¿A qué conjunto? Al conjunto de los puntos *Y* tales que… ¿qué cumplen estos puntos *Y* en la definición de *rayo*? (escribe en el tablero, en rojo, y ligado a la afirmación escrita sobre la pertenencia de *D* al rayo *CM*: $D \in \overline{CM}$ o $D \in \{Y|C-M-Y\} \leftarrow D \in \overrightarrow{CM}$». Suponemos que su *interpretante* incluye que ve necesario presentar él mismo un paso intermedio del procedimiento para hacer operativa la definición y luego proponer a los estudiantes que interpreten por qué él ha escrito una «o» en la expresión que acaba de escribir en el tablero, como un paso para afirmar las posibles interestancias, para que ellos identifiquen cómo se hace operativa la unión en términos de una disyunción. Su odd_3 es la relación de la disyunción con la unión entre conjuntos que conforman la definición de *rayo*.

Tabla 4.
Interacción correspondiente al tercer ciclo de interacción

Profesor:	[…] Ahora, ¿por qué aquí aparece una «o»? Surge esta pregunta. Porque cuando analizamos la definición de *rayo*… (en la expresión escrita en el tablero encierra en un redondel rojo la notación de rayo *CM* y saca una flecha hacia arriba), solamente la definición de *rayo*, ¿qué es en términos de notación? El rayo *CM* ¿es igual a qué?	oi_3: expresión de la unión en términos de disyunción.
Antonio y otros:	Al segmento *CM*	*oi*: definición de *rayo*.
P:	Al segmento *CM*, ajá.	
Antonio y otros:	unido con los puntos Y tal que *C*, *M*, *Y*.	
P:	Unido con... los puntos *Y* tales que *C*, *M*, *Y* ¿cierto? (Ha escrito en el tablero, en rojo, y al final de la flecha que trazó: «$\overrightarrow{CM} = \overline{CM} \cup \{Y|C-M-Y\}$»). Eso es lo que significa en términos de notación. ¿Se acuerdan que yo les decía que la definición de unión en términos verbales desde la lógica tiene el conector «o»? Eso significa que si yo quiero hablar de un elemento que pertenezca a este conjunto (señala la notación del rayo *CM* en la expresión $D \in \overrightarrow{CM}$), que es el rayo, entonces tengo que decir: *D* está en este conjunto (señala $\overline{CM}$ en la expresión que indica que el rayo es unión de dos conjuntos) o *D* está en este conjunto (señala en la expresión que indica que el rayo es unión de dos conjuntos), ¿ven el asunto? Y de ahí aparece esto (señala la expresión: $D \in \overline{CM}$ o $D \in \{Y|C-M-Y\} \leftarrow D \in \overrightarrow{CM}$. En últimas de esto (señala $\overrightarrow{CM} = \overline{CM} \cup \{Y\ C-M-Y\}$) a esto (señala $D \in \overline{CM}$ o $D \in \{Y|C-M-Y\} \leftarrow D \in \overrightarrow{CM}$) estoy utilizando la definición de unión de conjuntos, nada más. Entonces, por eso aparece esta escritura. Y, ahí vamos.	

Identificamos como *sv* del profesor el signo integrado por la expresión escrita en el tablero $D \in \overline{CM}$ o $D \in \{Y|C-M-Y\} \leftarrow D \in \overrightarrow{CM}$, la pregunta «¿por qué aquí aparece una "o"?» y la aclaración «[…] en términos de notación. El rayo *CM* ¿es igual a qué?». Este signo vehículo acarrea como oi_3 la expresión de la unión en términos de disyunción. Para ello, procede «hacia atrás» expresando la disyunción y pidiendo a los estudiantes que digan la relación con la definición de *rayo*.

Los estudiantes se limitan a responder el último interrogante del profesor: «El rayo *CM* ¿es igual a qué?». En su *sv* identificamos como *oi* la definición de *rayo*. No tenemos elementos para inferir que en su *interpretante* se encuentre la asociación entre la unión y la disyunción que el profesor quiere que establezcan, pues solo podemos suponer que conocen y recuerdan la definición de *rayo*. Tampoco podemos inferir los *od* de los estudiantes con respecto al *OR* por lo que en este ciclo no identificamos algún avance de sus *od* hacia el *oi* del profesor.

Ciclo 4: Relación entre la pertenencia de *D* a cada conjunto involucrado en la definición de rayo y las interestancias posibles

El profesor supone que se ha hecho operativa la unión en términos de disyunción. Su *interpretante* parece incluir que ya está abonado el terreno para relacionar la posible pertenencia del punto *D* a cada conjunto con una de las dos interstancias posibles que Antonio mencionó al principio de la semiosis, en el ciclo 1. Además, en el caso de la pertenencia de *D* al segmento, la implicación incluye establecer la interestancia *C-D-M* y analizar si *D* puede ser igual a *C* o a *M*. Como odd_4 inferimos la necesidad de identificar qué parte de la definición de *rayo*, expresada en términos de disyunción, permite justificar cada interestancia.

Tabla 5.
Interacción correspondiente al cuarto ciclo de interacción

Profesor:	[...] Ahora, si *D* pertenece al segmento *CM*, ¿qué puedo inferir?	oi_4: implicaciones que se derivan de la pertenencia del punto *D* a cada conjunto mencionado en la disyunción.
Molly y otros:	Que *D* está entre *C* y *M*.	
P:	Que *D* está entre *C* y *M* (escribe: «C-D-M».) ¿Cierto? Oiga, pero en el peor de los casos, *si uno es muy de malas*, *D* también podría ser *C* y *D* también podría ser *M* (señala lo correspondiente en la interestancia que acaba de anotar), pero uno se va a esta situación y ¿será que *D* sí puede ser *C* y *D* sí puede ser *M*?	
María:	(Disiente con la cabeza.)	*oi*: asociación de la pertenencia de *D* a cada uno de los conjuntos de la disyunción con una interestancia. *od*: expresión de la definición de *rayo* en términos de las dos posibles interestancias, únicamente.
Ángela:	No, porque ahí [en el enunciado de la conjetura que aparece escrito en el tablero] se dijo que (no se entiende).	
P:	Aquí tenemos unas cosas distintas ¿cierto? (En el enunciado de la conjetura que aparece en el tablero, señala la condición de que *D* no coincide con el punto *C*). Eso hace que esos casos no tengan sentido. Por eso, uno solo piensa en el que le interesa en este caso (señala la interestancia que acaba de escribir), en el que le conviene. Entonces de ahí sale ello; o… (enfatiza la voz) que viene de aquí (señala la conectiva en la expresión $D \in \overline{CM}$ o $D \in \{Y \mid C - M - Y\} \leftarrow D \in \overline{CM}$), señala la pertenencia de *D* al conjunto de los puntos *Y*, (traza desde allí una flecha hacia abajo) ¿qué se puede inferir? Si *D* pertenece a este conjunto, en particular ¿qué interestancia surge de allí?	
Antonio:	Que *M* está entre *C* y *D*.	

Integramos en un *sv* aquellas intervenciones del profesor en las que pide expresar la disyunción en términos de proposiciones que aludan ya no a la pertenencia de *D* a un conjunto, sino a la respectiva interestancia entre *D*, *C* y *M*. Así, proponemos como oi_4 las implicaciones que se derivan de la pertenencia del punto *D* a cada conjunto mencionado en la disyunción. Con la expresión «*si uno está muy de malas*, *D* podría ser *C* y también podría ser *M* […]» cuestiona, de manera tácita, que la definición operativa de segmento solo incluya la interestancia, hecho que hace explícito más adelante cuando pregunta «¿será que *D* sí puede ser *C* y *D* sí puede ser *M*?».

En los *interpretantes* de los estudiantes parece estar la definición de segmento y su relación con una de las interestancias, además de la definición de *rayo* en términos de una disyunción. También, parece que se centran en la interestancia *C-D-M* cuando *D* pertenece al segmento, y no en la posibilidad de que *D* sea *C* o sea *M*, pero tienen presente el enunciado de la conjetura y las condiciones establecidas para *D*. Como *od* identificamos la expresión de la definición de *rayo* en términos de las dos posibles interestancias únicamente. Identificamos como *oi* la asociación de la pertenencia de *D* a cada uno de los conjuntos de la disyunción con una interestancia. Su *od* se distancia un poco del *oi* del profesor puesto que él supone que los estudiantes aludirán también a la posibilidad de que *D* sea igual a *C* o a *M* pero descartarán estas opciones sobre la base de lo dado. Solo cuando el profesor les pregunta explícitamente por ese detalle que es necesario para obtener la definición operativa, María y Ángela se refieren a ello.

Ciclo 5: Diferencia de garantías para justificar la interestancia *C-M-D* cuando se tiene un rayo *CM* o una recta *CM*

El profesor retoma la comparación que inicialmente sugirió hacer y se centra en la diferencia de garantías para justificar las interestancias *C-M-D* y *C-D-M* cuando se tiene un rayo *CM* o una recta *CM*. El *interpretante* del profesor parece estar centrado en este hecho, lo que nos lleva a identificar el odd_5 como la diferencia de opciones de interestancia si se construye el punto *D* sobre un rayo o sobre una recta. En cada una de las dos circunstancias hay que identificar los posibles casos de interestancia. El *sv* con el que el profesor introduce un *oi* alusivo a esto se construye a medida que interactúa con algunos estudiantes.

Tabla 6.
Interacción correspondiente al quinto ciclo de interacción

Profesor:	[…] Y haciendo de nuevo todo el análisis que hicimos ayer pero solamente para este caso, no quedan más alternativas que quede este (*C-M-D*) y, por ende, la demostración es análoga, lo único que nos estamos ahorrando es un caso [de interestancia], teniendo el punto *D* en el rayo. ¿Ven la diferencia en la demostración? Ahora, ¿cuál es radicalmente la diferencia en la demostración con recta y en la demostración con rayo? Díganme ustedes… con lo que acabamos de hacer. […]	oi_5: cambios en las garantías en la demostración si se usa la recta *CM* o si se usa el rayo *CM* en el antecedente del enunciado del teorema.
Joaquín:	La posibilidad de los casos.	*oi*: diferencia del número de posibilidades de interestancia según cada caso.
P:	La posibilidad de los casos… Pero, más que eso es de dónde surgen los casos. Cuando tenemos la recta, ¿qué es lo que nos posibilita los casos? ¿Qué elemento teórico posibilita los casos?	
Antonio:	El teorema tres puntos.	
P:	(Asiente con la cabeza.) El teorema tres puntos. Cuando tenemos el rayo, ¿qué es lo que posibilita los casos?	
Antonio y otros:	La definición de *rayo*.	*oi*: diferencia en las garantías. *od*: variación que se produce en la demostración cuando se tiene una recta o un rayo en el antecedente de la conjetura, especialmente en las garantías.
P:	La definición de *rayo*. ¿Ven el asunto? O sea que las demostraciones son distintas… Vale, son distintas porque hay un paso en el que para sacar los casos, se están utilizando elementos teóricos distintos, pero después el resto de la demostración es igualita. […]	

Identificamos como oi_5 los cambios en las garantías en la demostración si se usa la recta *CM* o si se usa el rayo *CM* en el antecedente del enunciado del teorema. En el segundo caso, el punto *D* queda determinado a una distancia específica sobre el rayo *CM*, definida a partir de una manera de construir un real con el cual determinar el punto *D*. Este es el preámbulo para introducir el TLP, pues queda validado un proceso de determinación de puntos sobre rayos.

El *interpretante* de Joaquín parece estar centrado en el número de casos de interestancia y no en las garantías para justificarlos. Su *sv* «La posibilidad de los casos» es muestra de una interpretación que intenta responder a la pregunta del profesor. Su *oi* es la diferencia del número de posibilidades de interstancia según cada caso. Sin embargo, no logra la respuesta pretendida y el profesor se ve obligado a modificar la pregunta para referirse de manera explícita a las garantías de la interestancia. Así logra que Antonio y otros compañeros se refieran a la diferencia en las garantías, constituyendo un *oi* diferente al de Joaquín. El *od* de los estudiantes es la variación que se produce en la demostración cuando se tiene una recta o un rayo en el antecedente de la conjetura, especialmente en las garantías.

Este *od* se aproxima al *OR* matemático pretendido gracias a la comparación con la que el profesor buscó construir el significado de la definición de *rayo*. En el caso de la recta, usar como garantía el teorema tres puntos establece un nexo explícito entre las posibilidades de interestancia; en el caso del rayo, usar como garantía la definición de *rayo* requiere un trabajo de hacerla operativa para hacer explícito el nexo con las posibilidades de interestancia. El profesor menciona que ya han hecho la demostración de la conjetura y han comparado las dos vías (con la recta *CM* y con el rayo *CM*).

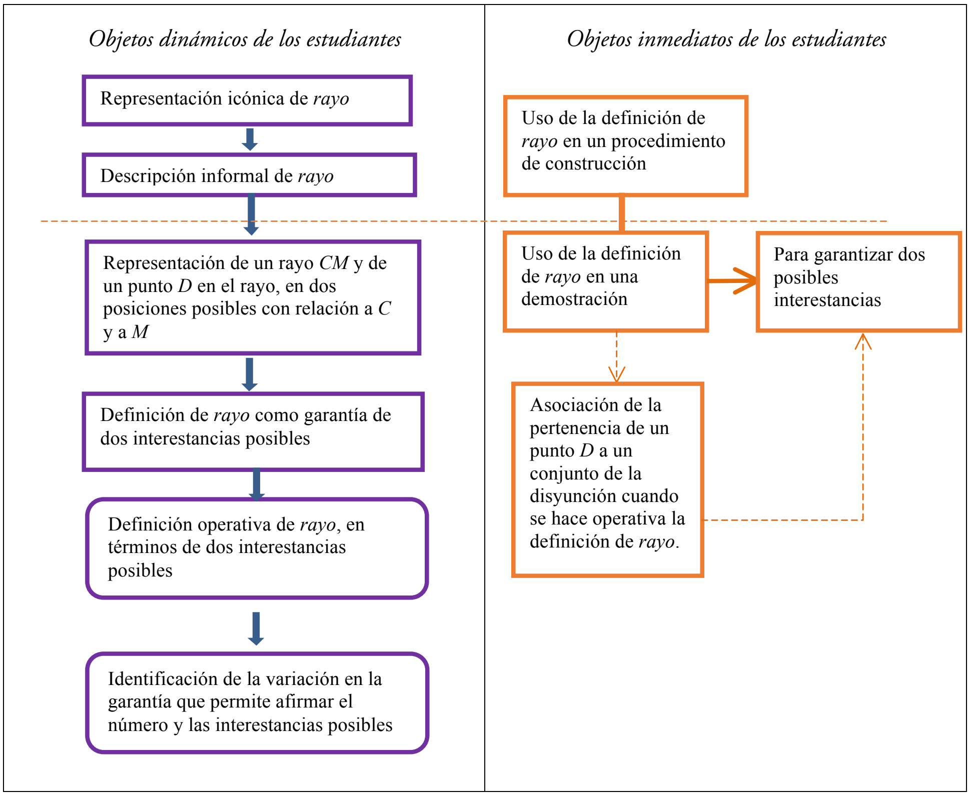
DISCUSIÓN

El significado de *rayo* es una construcción complicada, que en Colombia comienza a trabajarse desde la primaria. No termina con la definición, sino con el uso de esta en contextos matemáticos. En el análisis del episodio identificamos un avance en la evolución de significado a través de los *objetos dinámicos* generados en los *interpretantes* de los estudiantes, y expresados en los *objetos inmediatos*, fruto de la interacción comunicativa con un experto. Se logra así una evolución desde la representación icónica de un rayo, hasta la interpretación de lo que significa que un punto pertenezca a un rayo, aspecto central para hacer operativa esta definición en el contexto de una demostración. En la tabla 7 ilustramos tal evolución.

La mediación semiótica del profesor se lleva a cabo a partir de los *objetos inmediatos* representados en sus *signos* vehículos. Como representante de la comunidad del discurso matemático, el profesor tiene la responsabilidad de modular el acercamiento de los estudiantes al *objeto real* del que trata la interacción comunicativa. Un profesor que desatiende esta responsabilidad podría introducir el TLP simplemente a partir de su enunciación y su demostración. Un profesor consciente de su papel de mediador semiótico, aprovecha la oportunidad para contribuir a la evolución de los significados de los objetos matemáticos involucrados en el teorema, como el rayo. Pero esta mediación semiótica no es un asunto que pueda planearse completamente y de manera lineal, pues depende de los *interpretantes* de los estudiantes, que el profesor va infiriendo de los *signos* vehículos que ellos usan o producen. Por ejemplo, cuando Antonio se refiere a las interestancias es difícil saber si está usando la imagen conceptual o la definición operativa y quizá por eso el profesor ve necesario hacer el esfuerzo de repasar el recorrido analizado. El profesor necesita estar seguro de que es la definición lo que está soportando la respuesta de los estudiantes.

Algunos de los *objetos inmediatos* y los *objetos dinámicos didácticos* del profesor se identificaron en el análisis. El profesor introduce un primer *objeto inmediato* (oi_1) al enfocar la atención en la diferencia de garantías teóricas para justificar las posibilidades de interestancia, *C-D-M* y *C-M-D*, según si se ha construido la recta *CM* o el rayo *CM*. Casi inmediatamente se da cuenta de que su tratamiento es prematuro y, en consecuencia, decide abrir un espacio para apoyar a los estudiantes en la construcción de significado de la expresión «*X* pertenece a un rayo» apoyando, de esta manera, la reformulación de la definición de manera operativa (odd_1). A continuación, introduce otro *objeto inmediato* (oi_2) para que los estudiantes relacionen la definición de *rayo* con la pertenencia del punto *D* a alguno de los conjuntos de la unión. Ve necesario que los estudiantes expliciten la pertenencia del punto *D* al rayo en términos de la posible pertenencia de *D* a cada conjunto de la unión que integra la definición de *rayo* (odd_2). Después, con el siguiente *objeto inmediato* (oi_3) se centra en las implicaciones de la «o» en la interpretación de la definición de *rayo*; probablemente piensa que los estudiantes deben fijarse en las dos opciones que genera la disyunción (*odd*$_3$). Luego introduce un *objeto inmediato* (*oi*$_4$) que tiene que ver con las implicaciones para las posibles interestancias que se derivan de la pertenencia de *D* a cada conjunto de la disyunción. Inferimos que ve necesario considerar las opciones de pertenencia que genera la unión como una disyunción. Para finalizar, se retoma el interés por los cambios en las garantías en la demostración del enunciado de la conjetura correspondiente al problema de los cuatro puntos, según si se usa una recta *CM* o un rayo *CM* (*oi*$_5$). El profesor busca que los estudiantes identifiquen que los dos casos de interestancia que surgen cuando se construye el rayo *CM*, precisamente se deben a la unión que define *rayo* (*odd*$_5$).

Tabla 7.
Esquema de la evolución en la construcción del significado del objeto rayo



En síntesis, en busca de que los estudiantes hagan operativa la definición de *rayo* el profesor introduce *objetos inmediatos*, fruto del interés por puntualizar que la definición de *rayo* incluye la unión de dos conjuntos y que si un elemento pertenece a un rayo hay que considerar la opción de pertenencia de este a cada uno de dichos conjuntos. Pero para ello, a partir de la interpretación que hace de las intervenciones de los estudiantes, genera en su mente *objetos dinámicos didácticos* que lo llevan a ampliar los *objetos inmediatos* con fines didácticos. Cumple así su papel como mediador semiótico.

CONCLUSIONES

Con este artículo mostramos la utilidad del marco de referencia para fines investigativos. En particular, hemos podido puntualizar qué significa construir el significado de un objeto geométrico, ligado al uso de su definición en una demostración, y hemos identificado la ruta didáctica específica para hacer operativa la definición de *rayo* que siguió el profesor en la mediación. La identificación de *objetos dinámicos didácticos* apunta a identificar acciones explícitas de mediación del profesor, que asume el reto de contribuir a construir significado. Es un reto complejo pues en ocasiones algunas respuestas de los estudiantes se pueden ver como eficaces con relación a una interpretación de una pregunta del profesor, pero no capturan el objeto inmediato que el profesor pretende que se identifique. Esto impone al profesor un esfuerzo adicional por redireccionar la semiosis, en busca de un mejor resultado.

A pesar de que parecería inocuo el cambio de recta a rayo en el procedimiento de construcción correspondiente al problema de los cuatro puntos, el análisis refleja que este cambio da lugar a una rica actividad semiótica, fuente de significados relacionados con los objetos geométricos trabajados en el curso.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camargo, L., Castiblanco, C., Leguizamón, C. y Samper, C. (2003). *Espiral 2*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.

Godino, J. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática*, 12(1), pp. 70-92.

Mariotti, M. A. (2012). ICT as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. En T. Y. Tso (ed.). *Proc. 36th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 25-40). Taipei, Taiwan: PME.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (eds.) *Proc. 38th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education and PME-NA* 36 (vol. 4, pp. 409-416). Vancouver, Canada: PME.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2014). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina (eds.). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Fondo de publicaciones de la Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Revista Educación Matemática*, 12(1), pp. 51-69.

Robles, M. G., Del Castillo, A. G. y Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida, España: SEIEM.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*. Disponible en línea: <http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip>.

Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 557-568). Lleida, España: SEIEM.

Samper, C., Camargo, L., Molina, Ó. y Perry, P. (2013). Instrumented activity and semiotic mediation: Two frames to describe the conjecture construction process as curricular organizer. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (eds.). *Proc. 37th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 145-152). Kiel, Germany: PME.

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. En G. Hanna y M. de Villiers (eds.). *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 391-420). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Semiotic mediation in the meaning-making of *ray* through the operationalization of its definition

Leonor Camargo, Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co, pperryc@gmail.com, csamper@pedagogica.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co
Adalira Sáenz-Ludlow
University of North Carolina at Charlotte, Estados Unidos de América
sae@uncc.edu

In the Colombian educational system, the geometric object ray is introduced in elementary school, is mentioned occasionally in Middle and High School, and is used as a theoretic tool in university Euclidean geometry courses. Generally, it is presented through an iconic representation, and is described as the part of a line determined by two points *A* and *B*, that consists of point *A* and all of the points of the line that are on the same side of *A* as *B* is. Then, exercises that consist of the recognition and differentiation of rays are proposed. With this, it is assumed that ray has been completely conceptualized. Yet, from our point of view, believing that the conceptualization of a geometric object, no matter how elementary it is, can be reduced to knowing its definition or description and representation is problematic. Rather, conceptualization requires a complex interpretation process that includes using the definition to solve problems, to justify statements, and to use theorems in whose formulation or proof the object intervenes.

Given that in university geometry courses, the definition of ray is a resource to guarantee statements about a point belonging to a ray, or the betweenness relation of a point of a ray with the two points that determine it, the usual treatment, outlined before, is insufficient. In this article, we illustrate the analytic process that we carried out of the conceptualization of ray fostered in a university course. We want to highlight that every geometric object requires a thorough treatment to attain mathematical conceptualization. To interpret in detail meaning-making of such an object, specifically the process of operationalizing its definition, we recurred to the semiotic perspective of teaching and learning, inspired in the Peircean idea of triadic sign. This perspective is useful not only to describe mathematics learning in terms of meaning-making, but also to explain the teacher's actions when he fosters such construction. This is what we consider semiotic mediation.

We tracked the specific didactic route that operationalized the definition of ray, carried out by the teacher during the mediation, by identifying the *didactic dynamic objects.* This is a concept we added to Peirce's semiotic perspective of sign, for the specific case of classroom communication. The *didactic dynamic objects* are conformed through the articulation of the teacher's interpretation of the students' explicit signs and his knowledge of the object that is being treated. They are the result of decisions made to facilitate the evolution of the meanings the students elaborate; they permit identifying explicit actions of a teacher that undertakes the challenge of contributing to meaning-making.