

# EXPERIENCIAS E IDEAS PARA EL AULA

## MEDIDA DEL RADIO DE LA TIERRA DESDE LA CIMA DE UNA MONTAÑA *Mesure of the Earth's radius from the top of a mountain*

Josep Casadellà Reig (\*).

### RESUMEN

*Se propone en este artículo un método de medida del radio terrestre con finalidades didácticas. Se basa en la observación de la línea del horizonte sobre el mar y desde la cima de una montaña. La dirección de observación se aparta de la horizontal un ángulo que es función de la altura del punto de observación y del diámetro de la Tierra. Conocida dicha función se puede medir el ángulo y la altura de la montaña, calculándose el radio terrestre.*

### ABSTRACT

*I propose a method of measure the Earth's radius with didactic aims. It is based on the observation of the horizon line on the sea from the mountain's top. The observation's line come away from the horizontal line an angle which is function of observation's point's height and the Earth's radius. Knowing this function it can measure the angle and the mountain's height, and to calculate the Earth's radius.*

**Palabras clave:** radio terrestre, didáctica  
**Keywords:** Earth's radius, didactic

### INTRODUCCIÓN

Una de las principales dificultades para el aprendizaje significativo de conceptos y modelos consiste en la reconciliación integradora de la información aprendida con la representación previa existente en la estructura cognoscitiva. El término "reconciliación integradora" está tomado de Ausubel (1983). Viene a sugerir la existencia de conflictos solucionables entre distintos significados, así como la posibilidad de suma de información en el caso de aclararse las contradicciones. Un buen ejemplo de lo que se discute es el modelo de Tierra y su relación con el entorno astronómico: Sol, Luna, estrellas, etc. No hay estudiante que finalice la enseñanza primaria que no sepa que la Tierra es esférica, que gira sobre si misma y que da vueltas alrededor del Sol. Sin embargo la forma en que se saben tales hechos se muestra corrientemente en contradicción con otros supuestos aprendidos espontáneamente, que son más coherentes con un modelo de Tierra plana y estática. Gunstone (1980).

La medida del radio terrestre desde la cima de una montaña es una de estas actividades que puede favorecer los cambios de mentalidad necesarios para superar las contradicciones entre la información añadida y los conceptos previos. La

razón de ello es que pone en conjunción la observación directa con modelos geométricos y razonamientos matemáticos, que permiten discutir y reflexionar sobre el modelo de Tierra y poner de relieve algunas concepciones contradictorias.

### APROXIMACIÓN AL MÉTODO

Debe observarse el mar desde la cima de una montaña de altura conocida, cuanto más alta mejor. Lo primero que se destaca es lo "bajo" que se ve el mar. Uno podría preguntar-se si de ser su superficie infinitamente grande y plana debiera verse tan baja. La playa sí, efectivamente, pero la línea del horizonte debiera verse en la dirección horizontal. Parece una redundancia que el horizonte sea horizontal, pero no lo es. Un plano horizontal puede definirse como perpendicular a la vertical en un punto dado. En el caso de la cima de la montaña la dirección en que se observa la línea del horizonte se aparta de la horizontal un cierto ángulo que es función de la altura de la montaña y también del tamaño de la Tierra.

La superficie del mar se adapta mejor a la forma de la Tierra que la superficie de los continentes arrugada y accidentada. Nuestra percepción continental amplifica los defectos al no poderlos comparar a escala suficiente. Pero este inconveniente se elimina al

(\*) Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les CCEE, UAB, Cerdanyola (Barcelona).

observar el mar. Salvo el oleaje, que no se percibe desde la cima de una montaña, la forma de la superficie del agua permite ver directamente el aspecto de la superficie ideal de la Tierra. Una consecuencia de la esfericidad debe ser que la línea del horizonte no sea recta sino un arco de circunferencia. Las dificultades de apreciación del hecho ponen en evidencia el inmenso tamaño de la superficie comparado con las dimensiones de nuestra montaña de observación.

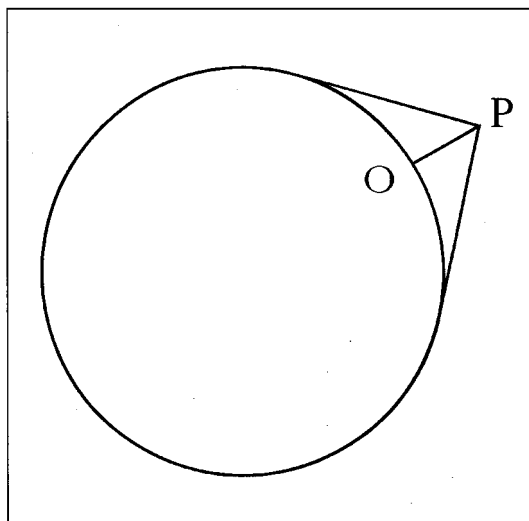


Figura 1

Para esclarecer un poco nuestras observaciones desde la cima de una montaña frente al mar, uno puede tomar como modelo una esfera. Su perfil es siempre circular y el conjunto de direcciones con que observamos ese perfil desde un punto fijo exterior determina un cono (Fig. 1).

¿Es esto lo que se puede apreciar desde la cima de una montaña? Justamente. Sea cual sea la dirección en que se observe la línea del horizonte sobre el mar la dirección de observación se aparta de la horizontal el mismo ángulo. Si la superficie del mar fuera plana y finita, a menos que fuera en forma de disco y diera la casualidad de que nuestra cima estuviera justo en el centro, el ángulo de las distintas direcciones con que se observa la línea del horizonte debiera ser variable.

En resumen, las direcciones con que observamos la línea del horizonte sobre el mar son rectas tangentes a la superficie terrestre. Desde una altura conocida la medida del ángulo que forman la tangente y la dirección radial o vertical permite determinar el tamaño de la esfera o de un círculo máximo de la esfera, como se verá más adelante. Para medir dicho ángulo se puede utilizar un clinómetro. El autor construyó un instrumento mediante un transportador semicircular que fue unido a un listón de madera de un metro de longitud, de cuyo centro colgaba una plomada.

## EL PROBLEMA MATEMÁTICO

En esencia, para determinar el radio de la Tierra dados la altura de una montaña  $i$  la dirección con que se observa la línea del horizonte, se traduce a un problema de geometría. La altura de la montaña es un segmento y la dirección del horizonte una semirrecta cuyo origen comparte con el segmento. El ángulo que forman la semirrecta y el segmento es conocido. El problema consiste en construir una circunferencia que sea tangente a la

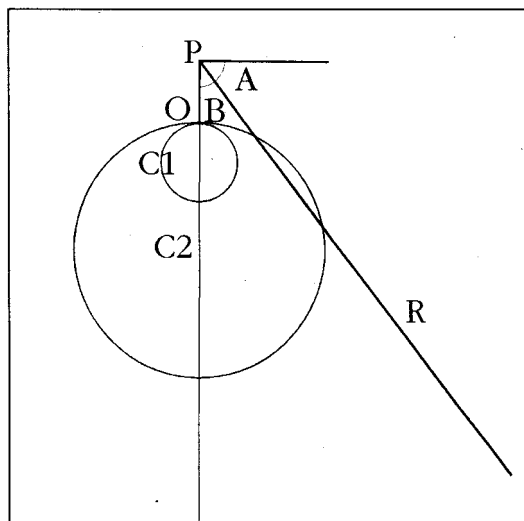


Figura 2

semirrecta y cuyo centro se encuentre en la prolongación del segmento. Otra condición a cumplir por la circunferencia es que toque el segmento por el otro extremo, el no compartido por la semirrecta.

Por el método de ensayo y error o quizás mejor, por sucesivas aproximaciones uno podría efectuar lo siguiente. Construir una semirrecta auxiliar que prolongue el segmento, PO en la fig. 2. Se elige un punto cualquiera C1 de la semirrecta y se construye una circunferencia de radio OC1. Si no toca a la semirrecta R no es el resultado esperado. Se toma otro punto C2 a doble distancia de O que el anterior y se repite la construcción de la circunferencia. El método se reitera hasta que la circunferencia toque a la recta R, normalmente en dos puntos. La solución exige un solo punto de contacto. Entonces se podría tomar como centro un punto a menor distancia de O que el último, por ejemplo la media aritmética entre el último y el penúltimo. En fin, este tipo de solución es solo aproximada, aunque tan próxima a la solución correcta como uno quisiera. En todo caso permite ver que solo existe una circunferencia que reúna las condiciones exigidas.

## LA SOLUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

El método de solución ensayado anteriormente es insatisfactorio, aunque puede ser bueno para hacer una inmersión en el problema. Si los estu-

diantes con los que se trabaja conocen las funciones trigonométricas una buena solución del problema sería la siguiente. En la fig. 3 se da por conocida la construcción de la circunferencia pero se desconoce el valor de su radio X.

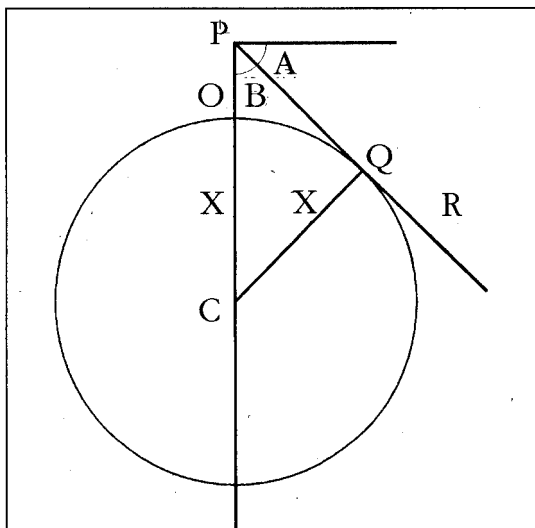


Figura 3

Puesto que el radio y la tangente forman un ángulo recto, el triángulo CQP será rectángulo, con el ángulo A dado (es el medido por observación), puesto que los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo son complementarios. Conocido A también se conoce  $\cos A$ , que por otro lado vale

$$\cos A = X/(X+H)$$

donde se ha tomado por H la longitud del segmento OP (la altura de la montaña desde la que efectuamos la observación).

Como se ve hemos construido una ecuación de primer grado con una sola incógnita, el valor de X. Debidamente aislado se puede calcular este valor, que es el radio de la circunferencia buscado.

$$X = H/(1/\cos A - 1)$$

### LA SOLUCIÓN GEOMÉTRICA

La medida del radio terrestre, tal como se propone, podría llevarse a término durante el primer ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria. A este nivel sin embargo todavía no se han introducido las funciones trigonométricas. Esto exige tratar de encontrar una solución sin recurrir a este tipo de funciones. La geometría ofrece esta posibilidad, aun en el caso de que los estudiantes dispongan de poca formación en geometría.

La solución que se ofrece parte de la siguiente suposición. Dada una circunferencia y un punto exterior a ella se pueden construir dos tangentes a la circunferencia que tengan intersección en

dicho punto. Además las distancias desde el punto dado a los de contacto con la circunferencia son iguales (ver fig. 1).

En el caso que nos ocupa se dan el segmento OP y la recta R, que es tangente a la circunferencia que se quiere construir (fig. 4). Desde O se traza una perpendicular a OP, que cortará a la recta R en un punto S. Puesto que OP se encuentra en una dirección radial a la circunferencia objetivo, dicha perpendicular será también una tan-

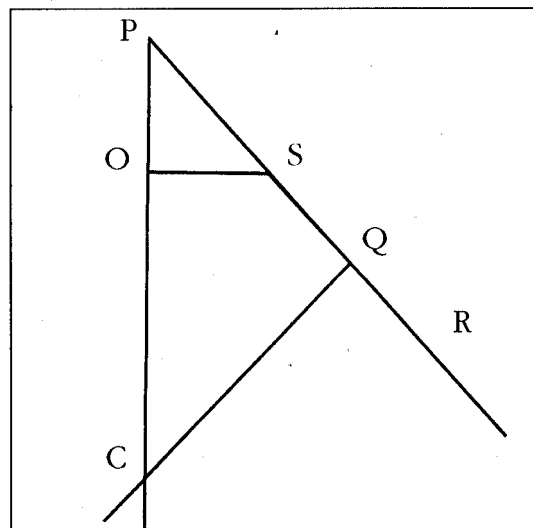


Figura 4

gente de la circunferencia. Tómese sobre la recta R un punto Q tal que la distancia SQ sea igual a la SO, con lo que el punto Q será el de contacto de la recta R con la circunferencia. Si se construye una perpendicular a R que pase por Q, esta será una dirección radial, por lo que cortará a otra dirección radial, la extensión de OP, en el centro de la circunferencia buscada. El radio será CQ o bien CO.

### LA REALIZACIÓN PRÁCTICA DE LA EXPERIENCIA

La realización de la experiencia fue llevada a término con los alumnos de la asignatura de Física de la "Facultat de Ciències de l'Educació" de la UAB, durante el curso de 1994-95. Se subió a la montaña del Tibidabo en cuya falda se encuentra Barcelona. El punto de observación estaba acotado en 516 m sobre el nivel del mar. El límite del horizonte de las aguas del Mediterraneo se veía hundido respecto a la horizontal un ángulo de  $3/4$  de grado, con una imprecisión del orden de  $1/4$  de grado.

TABLA DE RESULTADOS

	defecto	media	exceso
ángulo	0,5	0,75	1
radio	13550,9946	6022,42538	3387,42615

Las unidades del radio están dadas en km. Como se puede apreciar un pequeño error en la medida del ángulo genera errores monstruosos en el resultado. La explicación de este comportamiento de los errores se puede encontrar al analizar la fórmula utilizada para calcular el radio en función de la altura y del ángulo. Como se desarrolló anteriormente,

$$\text{radio} = \text{altura} / (1/\cos A - 1)$$

Al ser el ángulo tan cercano a cero su coseno será muy cercano a la unidad. En consecuencia el denominador de la expresión será cercano a cero. Esto determina que los errores e imprecisiones en la medida del ángulo se vean extraordinariamente amplificadas para calcular el radio. Una solución posible a este problema consistiría en tomar las medidas desde mayor altura. A falta de montañas suficientemente altas cerca del mar se podrían realizar las mediciones desde un avión, o un globo. Desde un satélite artificial, cuyas alturas están bien determinadas, se puede observar el perfil completo de la Tierra y en este caso el ángulo y su coseno no estarían en valores tan críticos por lo que hace referencia a los errores.

## CONCLUSIONES

Aunque las imprecisiones de las medidas conllevan imprecisiones fantásticas en los resultados de los cálculos, el método de medición del radio terrestre es didácticamente interesante, creo. Algunas consideraciones se pueden hacer al respecto:

**Tratamiento de las imprecisiones:** Existe la opinión linealizante de considerar que las im-

precisiones en las medidas implican imprecisiones en los resultados de los cálculos que sea proporcionales a las primeras. El ejemplo propuesto está en abierta contradicción con este supuesto. Es de destacar que el tratamiento de la imprecisión ha sido realizado a partir de calcular los valores extremos y el medio, y por consiguiente no presenta mayor dificultad.

**Medidas adicionales:** El método que se ha expuesto precisa de la altura de la montaña. Se puede discutir por lo menos un método para determinar la altura de las montañas, edificios, aviones, etc.

**La observación directa enriquece la experiencia sensitiva:** La evidencia directa de que la Tierra no puede ser plana e infinita es gratificante y añade información sensitiva que contrapesa otras sensaciones en sentido contrario, base de algunas ideas previas, como pone de manifiesto Pozo, J. A., (1991).

**Nota:** La solución del problema de cálculo del radio terrestre por medio de la geometría clásica fue obtenida por el Dr. Jordi Deulofeu, del mismo departamento que el autor, a quien se agradece la colaboración.

## BIBLIOGRAFÍA

- +Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hnesian, H (1983). *Psicología educativa*. 2ª edición, Ed. trillas.
- +Gunstone, R. F. & White, R.T. (1980). *A matter of gravity*. Research in Science Education, 10, 36-44.
- +Pozo, J.A., Sanz, A., Gómez Crespo, M.A., y Limón, M. (1991). *Las ideas de los alumnos sobre la ciencia: una interpretación desde la psicología cognitiva*. Enseñanza de las Ciencias, v-9, nº 1, 83- 94. ■