

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE LÍNEAS DE COSTA: ESPIRALES LOGARÍTMICAS

Mathematical modelling of shorelines: logarithmic spirals

M.A. de Pablo Hernández^{1,2} y A. Pacifici²

RESUMEN

Las líneas de costa modifican su trazado con el tiempo, tanto de manera natural, como debido a la actividad antrópica (construcción de puertos, diques, espigones,...). Por otra parte, la presión urbanística hace que estas modificaciones en la línea de costa puedan producir importantes pérdidas económicas. En Ingeniería Geológica y en ingeniería de costas es importante conocer cuál será la evolución de una línea de costa con el fin de rediseñar las obras costeras, mitigar el impacto de las ya construidas, y gestionar el uso del suelo. Las modelizaciones matemáticas son por tanto una interesante herramienta en el estudio de la evolución de este ambiente geológico, y su relativa sencillez una interesante herramienta didáctica para el estudio interdisciplinar de las costas y su acercamiento a los estudiantes desde un punto de vista matemático.

ABSTRACT

Coastlines changes along the time due to both natural and anthropical activity (ports, coastal dikes, etc.). On the other hand, the urban grown trigger and increase the modifications on the coastlines, what could produce important economic, natural, and biological losses. In Geological and Coastal Engineering and Coastal Management is important to know which will be the evolution of the coastlines in the future in order to re-design the coastal constructions, to mitigate the impact of the already constructed ones, and to manage the use of the land. The mathematical modelling is therefore an interesting research and educative tool in the study of the evolution of this geological environment, and a simple approach of coastal geology to the students, since a mathematical point of view.

Palabras claves: Costas; Modelización; Espirales logarítmicas; Geología; Matemáticas.

Keywords: Coasts; Modelling; Logarithmic spirals; Geology; Mathematics.

INTRODUCCIÓN

En Ingeniería de Costas se realizan modelizaciones de distinto tipo con el fin de estudiar, analizar y predecir el comportamiento de los sistemas y ambientes costeros. Por otra parte, la ocupación de dichos ambientes costeros, su modificación y la construcción de obras de ingeniería en ellos producen importantes modificaciones en su dinámica. A su vez, estas modificaciones pueden producir pérdidas económicas debidas al deterioro de las infraestructuras, a la pérdida de superficie de tierra, y a las obras de mantenimiento necesarias para el control de dicho deterioro. Además, estos cambios también pueden producir importantes problemas medioambientales debido a los cambios en la dinámica costera, la destrucción de ecosistemas costeros,... Por todo ello, la realización de modelizaciones matemáticas permite conocer de antemano cuál podrá ser la evolución natural de un sistema costero y de la evolución posible en el caso de realizar modificaciones en dicho ambiente. Estos estudios permiten establecer las actuaciones más adecuadas que deberían ser tenidas en cuenta en las políticas medioambientales

y de actuación sobre el territorio a distintos niveles administrativos y políticos.

Algunas de las modelizaciones matemáticas de ambientes costeros se han centrado en el estudio de la evolución de la línea de costa, especialmente en aquellos casos en los que un obstáculo produce la difracción del oleaje. Estos obstáculos pueden ser naturales (por ejemplo afloramientos rocosos costeros) o artificiales (por ejemplo diques o espigones). La difracción del oleaje en estos obstáculos produce una variación en la incidencia del oleaje sobre la costa, llevando a una variación en su dinámica de erosión y sedimentación, y en la morfología y traza de la línea de costa. En estos casos, las playas afectadas por esta difracción adquieren, a lo largo del tiempo, de una morfología en concha. Este tipo de playas han recibido distintos nombres (Halligan, 1906; Krumbein, 1944; Silvestre, 1960; Ho, 1971; Silvestre & Ho, 1972; Yasso, 1965; Rea & Komar, 1975; Le Blond, 1979; Wong, 1981; Phillips 1985; Silvestre *et al.*, 1980), pero han sido modelizadas a través de dos ecuaciones matemáticas sencillas en coordenadas polares correspondientes a una curva espiral logarítmica (Figura 1).

(1) Departamento de Geología. Universidad de Alcalá de Henares. 28871 Madrid, España. e-mail: miguelangel.depablo@uah.es

(2) Internacional Research School of Planetary Sciences. Università d'Annunzio. 65127 Pescara, Italia.



Figura 1: Ejemplo de una zona costera en la que la línea de playa puede modelizarse matemáticamente de acuerdo a una espiral logarítmica (Estepona, Málaga, España). Imagen: Google Earth.

En este trabajo, se describen brevemente las espirales logarítmica, y algunas de las aplicaciones ingenieriles y geológicas en las que se han empleado. El objetivo de este trabajo es mostrar cómo mediante expresiones matemáticas sencillas es posible analizar el entorno natural, y cómo la información que se obtiene de estas modelizaciones puede ser empleado en el estudio de cuestiones tan dispares como la ingeniería costera o la investigación sobre el paleoclima de Marte.

Desde el punto de vista didáctico, este trabajo muestra un enfoque más matemático y multidisciplinar que el meramente geológico de los ambientes costeros, y representa un acercamiento a las Ciencias de la Tierra desde las matemáticas, por lo que este tipo de modelizaciones pueden llevarse a cabo, tanto en asignaturas de Geología, Medio ambiente, o Matemáticas.

ESPIRALES LOGARÍTMICAS

La espiral logarítmica, también conocida como espiral equiangular o espiral de crecimiento, fue descrita por primera vez por Descartes en el año 1638. Años más tarde, Bernouilli, continuó los estudios de este tipo de curvas y descubrió numerosas propiedades matemáticas de estas espirales a las que él denominaba “*espira mirabilis*” (la espiral maravillosa). Estos científicos se dieron cuenta de que muchas de formas de la naturaleza tenían forma espiral, aunque no podía ser descrita matemáticamente mediante expresiones conocidas como la denominada espiral de Arquímedes. La espiral logarítmica se caracteriza porque la distancia entre sus brazos se incrementa siguiendo una progresión geométrica, mientras que, por ejemplo, en la espiral de Arquímedes esta distancia es constante. Expresada matemáticamente en coordenadas polares, la ecuación de una espiral logarítmica es la siguiente:

$$R = a \cdot \exp(\Theta \cdot \cotg \alpha)$$

donde R es la coordenada radial (la distancia del origen de coordenadas a un punto de la espiral), Θ es la coordenada angular (el ángulo que forma dicho radio con el eje de abscisas), α el ángulo entre el radio de espiral en dicho punto y la tangente a la espiral, y a un parámetro (Figura 2A). La forma de la espiral está controlada por los valores de a y α . El valor del ángulo α controla el enrollamiento o el aspecto de la espiral. Cuando α vale cero la espiral se transforma en una línea recta. Por otra parte el valor de a establece el tamaño de la espiral. Cada espiral logarítmica tiene un valor determinado de a y α que son constantes para cualquier punto.

Así, para un punto 1 cualquiera de la espiral, la ecuación queda de la siguiente manera: $R_1 = a \cdot \exp(\Theta_1 \cdot \cotg \alpha)$. Para otro punto 2, la ecuación se expresa como: $R_2 = a \cdot \exp(\Theta_2 \cdot \cotg \alpha)$. Con el fin de simplificar el cálculo de la ecuación, se recurre a la siguiente expresión:

$$R_2 / R_1 = \exp(\Theta \cdot \cotg \alpha)$$

siendo $\Theta = \Theta_2 - \Theta_1$, es decir, el ángulo entre los radios de dos puntos cualesquiera de la espiral (Figura 2B).

Existen múltiples aproximaciones matemáticas e informáticas para la resolución de las ecuaciones necesarias para la obtención de los ángulos α y Θ característicos de cada una de las espirales logarítmicas posibles (por ejemplo: Kimberley, 1989; Baumgarten & Farin, 1997; Mishra, 2006). Entre otras muchas cosas, estas espirales han sido aplicadas para el estudio de algunas líneas de costa. Sin embargo, en los últimos años ha sido necesario realizar aproximaciones más complejas en determinadas zonas costeras como puertos o diques. En estos casos, las aproximaciones matemáticas se realizan mediante ecuaciones de parábolas logarítmicas en coordenadas polares, algo más complejas, y que no serán tratadas en este trabajo.

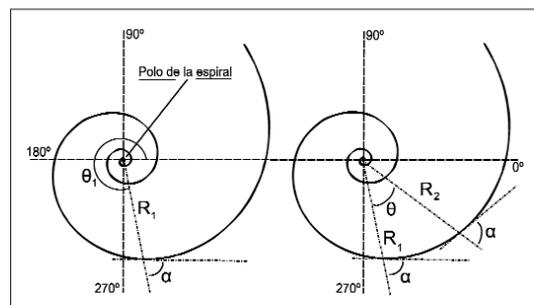


Figura 2: (A) Un punto cualquiera de una espiral logarítmica, situado a un ángulo Θ desde el centro, está caracterizado por un radio R y un ángulo α entre dicho radio R y la tangente a la curva en dicho punto. En general se estudia la relación entre dos radios cualesquiera de la espiral logarítmica (R_1 y R_2), separados entre sí un ángulo Θ (B). En ambos puntos, el ángulo α debe permanecer constante porque es característico de cada espiral logarítmica.

ESPIRALES LOGARÍTMICAS EN LA NATURALEZA Y EL ARTE

Son muchas las formas de la naturaleza que tienen formas de espiral, desde algunas galaxias hasta las conchas de los caracoles (Figura 3), y son estudiadas por muy diversas ramas de la ciencia, como la Geología, la Botánica, la Zoología, etc. (San Miguel, 1990). Sin embargo, no todas estas espirales son del mismo tipo, aunque las espirales logarítmicas son muy frecuentes. Las espirales logarítmicas

más grandes estudiadas son las que forman los brazos de algunas galaxias. Las conocidas como galaxias espirales pueden modelizarse de manera sencilla mediante este tipo de ecuaciones. De menor tamaño son las espirales logarítmicas que forman los complejos de nubes de algunos ciclones, huracanes y tormentas alrededor del centro de la tormenta o el huracán. Por otra parte, la forma que tienen algunas playas arenosas en distintos lugares del mundo también tiene este tipo de morfologías. Final-



Figura 3: Distintos ejemplos de espirales logarítmicas en la naturaleza. Desde las galaxias hasta las conchas de algunos animales tiene un patrón similar al de este tipo de espirales. El ser humano ha empleado estos patrones para elaborar distintos motivos decorativos a lo largo de la historia.

mente, y de mucho menor tamaño, las conchas de algunos moluscos, como el *Nautilus*, cuya forma es clásicamente empleada para ilustrar la existencia de espirales logarítmicas en la naturaleza. Pero otras muchas formas naturales emplean este patrón morfológico, como la coliflor o las semillas del girasol.

Aunque la expresión matemática que define a las espirales logarítmicas no fue conocida hasta el siglo XVII, la belleza de estas formas espirales ya inspiró a romanos y griegos, quienes las emplearon para el diseño de algunos mosaicos que recubrían los suelos de casas y palacios. Pero estos diseños no acabaron con el fin del imperio, sino que a lo largo de la historia moderna y reciente se han empleado este mismo tipo de patrones para decorar paredes, suelos y techos, como el de algunas iglesias. Y hasta el arte abstracto ha llegado la espiral logarítmica, en cuya expresión matemática se basan algunos diseños elaborados mediante fractales.

COSTAS ESPIRALES Y SU MODELIZACIÓN

La morfología de una costa depende de múltiples factores desde la dirección e intensidad del oleaje, hasta el tipo de material que constituye la propia costa, pasando por la cantidad de sedimentos disponibles, el régimen de mareas, la presencia de deriva litorales,... La interacción entre todos estos factores da lugar a una configuración de las líneas de costa. Un caso especial es el de las costas cuya morfología en planta puede describirse matemáticamente como una espiral logarítmica (Figura 4). Este tipo de playas se producen cuando el oleaje es difractado por un obstáculo, haciendo que este cam-

bie su dirección de incidencia sobre la playa. Estos obstáculos son muy variados, afloramientos rocosos en la costa, existencia de cabos, o presencia de obras de ingeniería civil. Cuando el oleaje choca con alguno de estos obstáculos, se produce la difracción del oleaje, modificando la dinámica costera en las proximidades. Esta variación de la dinámica costera produce que se acumulen más sedimentos en unos lugares y se erosionen en otros, dando poco a poco una morfología de espiral logarítmica a la playa. Aunque esto ocurre de manera natural en muchos lugares de la Tierra (hay múltiples ejemplos en las costas españolas), los efectos son más importantes cuando se producen debidos a las construcción de obras de ingeniería civil como puertos, diques, malecones,... Estas construcciones producen un cambio en la dinámica costera en las zonas próximas, cambiando la configuración de las playas cercanas, e incluso llegando a hacerlas desaparecer en algunos casos. La problemática ambiental, social y económica que esto puede llegar a producir llevó a la necesidad de modelizar la evolución de una playa tras la construcción de una obra de ingeniería costera, con el fin de conocer las áreas afectadas y mejorar el diseño más adecuado que permita minimizar los efectos nocivos de dicha intervención en el medio natural (Garau, 1981; Garau, 1982).

Kimberley (1986) creó un sencillo programa informático para la modelización de estas líneas de costa a partir de las coordenadas de una serie de puntos a lo largo de la playa, y las coordenadas del punto que actúa como polo de la difracción del oleaje. Un algoritmo matemático similar ha sido re-



Figura 4: Distintos ejemplos de costas con morfología de espiral logarítmica de las costas españolas. Aunque la morfología general se conserva, las distintas características del entorno hacen que sean más o menos alargadas, o más o menos enrolladas. Imágenes: Google Earth.

cientemente propuesto por Mishra (2006), que calcula las coordenadas del polo o centro de la espiral mediante cálculos iterativos. En la actualidad, los autores de éste trabajo se encuentran creando un programa informático cuyo fin es el de facilitar el estudio sistemático de numerosas líneas de costa a partir de fotografías aéreas, imágenes de satélite o las coordenadas de la costa, empleando los algoritmos de Kimberley (1986) y Mishra (2006)

La modelización de líneas de costa mediante el análisis de espirales logarítmicas ha permitido, no sólo analizar la morfología de la playa en planta, sino que en los últimos años se están aplicando modelizaciones similares al perfil de las playas (Medina *et al.*, 2001). Este tipo de ecuaciones y formulaciones matemáticas también se aplican al estudio de estabilidad de taludes (Melis, 2004).

A pesar de las excelentes aproximaciones que han dado las modelizaciones de líneas de costa mediante análisis de espirales logarítmicas, cuando las condiciones de la costa o las obras de ingeniería civil son complejas, se pueden producir dobles, triples o múltiples difracciones del oleaje antes de que éste toque la costa. Por ello, las espirales logarítmicas no sirven en todos los casos. Recientemente, investigadores españoles han presentado una nueva metodología para la modelización de playas en las que el oleaje llega a la costa tras sufrir múltiples difracciones (Iglesias *et al.*, 2002). Esta metodología se basa en la aproximación de la morfología de la línea de costa a ecuaciones de curvas parabólicas en coordenadas polares. Aunque un poco más complejas que las espirales logarítmicas, resuelven muchos de los casos en los que las playas no pueden ser representadas mediante sencillas ecuaciones de espirales logarítmicas.

LINEAS DE COSTA EN MARTE

En los últimos años, estas modelizaciones matemáticas para el estudio de la morfología de líneas de costas han sido aplicadas al estudio paleogeográfico y paleoclimático del planeta Marte. La localización de rasgos geomorfológicos relacionados con zonas costeras ha sido uno de los principales objetivos de numerosos trabajos de investigación durante las últimas décadas. Estos rasgos han llevado al planteamiento de la existencia de océanos, lagos y mares en la superficie de Marte en el pasado. Estos rasgos morfológicos se han localizado gracias a las imágenes de media resolución (de hasta 150 metros por píxel), y a los datos topográficos obtenidos por diversas sondas planetarias durante las últimas décadas del siglo XX. Las últimas sondas planetarias han facilitado imágenes de alta resolución (de hasta 1,5 metros por píxel) de la superficie de Marte, y con ello el descubrimiento de nuevos rasgos geomorfológicos relacionados con ambientes costeros. En algunas de estas imágenes se han observado rasgos que podrían interpretarse como líneas de costa. Con el fin de comprobar estas hipótesis, se han aplicado modelizaciones matemáticas basadas en ecuaciones logarítmicas y parabólicas polares. Este es el

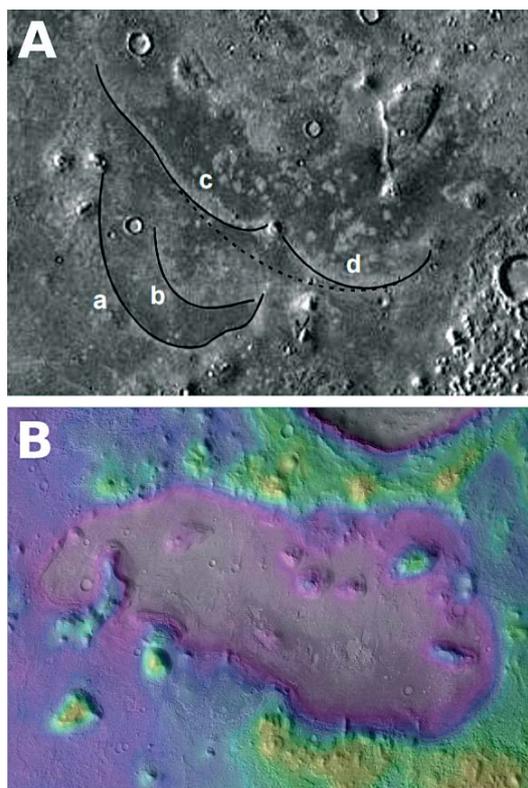


Figura 5: Algunas posibles líneas de costa de la superficie de Marte (A) también pueden modelizarse como espirales logarítmicas (Pranzini and Zeoli, 1999). Las imágenes más recientes muestran nuevas posibles costas marcianas (B) que tal vez podrían seguir este tipo de patrón (De Pablo and Pacifici, 2006). Fuente: (A) Imagen viking; (B) Imagen HRSC.

caso de una posible línea de costa asociada a relieves localizada en la región de Cydonia Mensae (Figura 5A). Esta posible línea de costa, al estar asociada a un obstáculo, debería poder modelizarse con una ecuación de espiral logarítmica. Los trabajos llevados a cabo por Pranzini y Zeoli (1999) para esta línea de costa dan como resultado valores de los parámetros compatibles con líneas de costa modelizadas por oleaje difractado, lo que les permite establecer la existencia de una lámina de agua en esta zona de Marte, y la posible dirección del oleaje principal. Otras líneas de costa han sido recientemente descritas (por ejemplo, De Pablo y Pacifici, 2006) en otros lugares de Marte (Figura 5B), por lo que será interesante su modelización para conocer si su morfología se adapta a este tipo de espirales.

CONCLUSIONES

Las modelizaciones mediante curvas espirales logarítmicas y parabólicas en coordenadas polares son matemáticamente sencillas, y requieren de pocos parámetros y datos de entrada, pero permiten conocer la morfología de las líneas de costa afectadas por oleaje difractado. Esta sencillez permite realizar estudios costeros con coste muy bajo puidien-

do emplearse imágenes de satélite, fotografías aéreas o mapas topográficos sin necesidad de realizar costosas campañas de campo para la adquisición de datos.

El origen de la difracción del oleaje puede ser natural (como afloramientos rocosos) o artificial (como puertos o espigones), pero producen importantes cambios en la dinámica costera y en el movimiento de los sedimentos. Estas variaciones pueden tener importantes consecuencias económicas, por lo que conocer de antemano las posibles implicaciones de la construcción de obras de ingeniería costera o la modificación de las condiciones naturales, permitirá conocer las posibles implicaciones y consecuencias futuras.

Por otra parte, estas modelizaciones matemáticas de este tipo de líneas de costa son compatibles y complementarias con otras del movimiento de sedimentos en el fondo marino que predicen cuál es la dinámica del sedimento bajo el agua antes y después de la construcción de obras de ingeniería costera como diques, espigones, puertos, ... lo que ayuda a mejorar los diseños de estas obras con el fin de reducir los inconvenientes de su construcción y mejorar las ventajas de los mismos.

El uso de expresiones matemáticas sencillas puede ser una herramienta de lo más versátil en el estudio de aspectos tan dispares como la dinámica costera, el diseño de obras de ingeniería civil, o el diseño de planes de actuación ambiental sobre áreas de la costa.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen los comentarios para la mejora del planteamiento matemático y didáctico aquí presentado a los revisores anónimos de este trabajo.

REFERENCIAS

- Baumgarten, C., and Farin, G. 1997. Approximation of logarithmic spiral. *Computer Aided Geometric Design*, 14. 515-532.
- De Pablo, M.A. and Pacifici, A. 2006. Lakes, delta and volcanism at the Martian dichotomy. The case of Ne-penthes Mensae. *1st Europlanet Meeting*. Abstract #EPSC2006-A-00447.
- Garau, C. 1981. Condicionantes de la estabilidad de las playas. Análisis de la función polar de los salientes. *Revista de Obras Públicas*, Enero 1981. 29-48.
- Garau, C. 1982. Algunas consecuencias y aplicaciones del conocimiento de la función polar de los salientes. *Revista de Obras Públicas*, Julio 1982. 463-478.
- Halligan, G. H. 1906. Sand movement on the New South Wales coast. *Proc. Limn. Soc. N. S. W.* 31: 619-40.
- Ho, S. K. 1971. Crenulate shaped bays. *Asian Institute Tech., Master Eng. Thesis*, No. 346.

Hsu, J. R., and Evans, C. 1989. Parabolic bay shapes and applications. *Proc. Institutions of Civil Engineers*, London, England, Vol. 87 (part 2), 557-570.

Iglesias, C., Martínez, J. and López, C. A planform model for bayed beaches shaped by multiple diffraction. *Litoral 2002, The changing Coast*. Ed. EUROCOAST, Portugal. 391-397.

Kimberley, M.M. 1989. Fitting a logarithmic spiral to the shoreline of a headland-bay beach. *Computer and Geosciences*, 15. 1089-1108.

Krumbein, W. C. 1944. Shore processes and beach characteristics. *U. S. Corps of Engrs., Beach Erosion Board, Tech. Mem. No. 3*.

Le Blond, P. H. 1972. On the formation of spiral beaches. *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE* 2: 1331-45

Mashima, Y. 1961. Stable configuration of coastline. *Coastal Eng. in Japan*, 4. 47-59

Phillips, D. A. 1985. Headland-bay beaches revisited: an example from Sandy Hook, New Jersey. *Marine Geology*, 65. 21-31.

Medina, R., Vidal, C., González, M., Bernabeu, A.M., & Galofré, J. 2001. Modelado de la morfodinámica de playas por medio de formulaciones de "Equilibrio". *Física de la Tierra*, 13. 95-115.

Melis Maynar, M. 2004. El colapso del tunel ferroviario por inestabilidad del frente en suelos y rocas blandas o muy diaclasadas. *Revista de Obras Públicas*, 151 (3450). 34-64.

Mishra, S.K. 2006. Fitting an Origin-Displaced Logarithmic Spiral to Empirical Data by Differential Evolution Method of Global Optimization. *Munich Personal RePEc Archive*. Paper n°: 2509. (<http://mpra.ub.uni-muenchen.de/2509/>).

Pranzini, E., & Zeoli, A. 1999. Spiral beaches in Mars: evidence for a long lasting liquid ocean. *XXX Lunar and Planetary Science Conference*, Houston, USA. Abstract #1178.

Rea, C. C. & Komar, P. D. 1975. Computer simulation models of a hooked beaches shoreline configuration. *Journal of Sedimentary Petrology*, 45. 866-72.

San Miguel, M. 1990. Un nuevo símbolo de la ciencia integrada: la figura helicoidal. *VI Simposio de Enseñanza de la Geología*, 391-403.

Silvester, R. 1960. Stabilization of sedimentary coastlines. *Nature* 188, 467-69.

Silvester, R. and Ho, S. K. 1972. Use of crenulate shaped bays to stabilize coasts. *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE*, 2. 1347-65.

Silvester, R., Tsuchiya, Y., & Shibano, Y. 1980. Zeta bays, pocket beaches and headland control. *Proc. 17th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE*, 2. 1306-19.

Wong, P. P. 1981. Beach evolution between headland breakwaters. *Shore and Beach*, 49(3). 3-12.

Yasso, W. E. 1965. Plan geometry of headland-bay beaches. *Journal of Geology*, 73. 702-14. ■

Fecha de recepción del original: 10 octubre 2007.

Fecha de aceptación definitiva: 4 diciembre 2007.

ANEXO I UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Introducción:

Un sencillo ejercicio puede ayudar a entender las aplicaciones e interés del análisis matemático de las líneas de costa, especialmente aquellas cuya morfología se corresponde con la de espirales logarítmicas. Unos sencillos materiales permiten realizar una actividad didáctica en el aula en una hora de clase, aunque las modelizaciones matemáticas reales son mucho más complejas. Los pasos 1 y 2 pueden ser elaborados por los profesores de manera previa al desarrollo de la actividad por parte de los alumnos con el fin de aumentar el tiempo que los alumnos pueden dedicar al análisis de los resultados. Esta actividad puede ser realizada con alumnos de universidad debido a la carga de conocimientos matemáticos y geológicos necesarios, aunque es el profesor el que debe adecuar la actividad en función del nivel de conocimientos matemáticos, geológicos, informáticos, etc. e incluso adaptarse a niveles educativos inferiores (Educación Secundaria).

Paso 1: Materiales

Para llevar a cabo esta actividad tan solo es necesario disponer de una o más imágenes de satélite o fotografías aéreas de una línea de costa con morfología de espiral logarítmica. En el siguiente apartado se explica donde obtener estas imágenes. Además es necesario papel para la realización de una gráfica en coordenadas polares. Este puede hacerse a mano, o descargarse de manera gratuita de la página: <http://www.printfreegraphpaper.com/>. Recomendamos el uso de una malla polar centrada. Además los alumnos deben disponer de una regla y un transportador de ángulos, así como lápices de colores y una calculadora (Figura 6A).

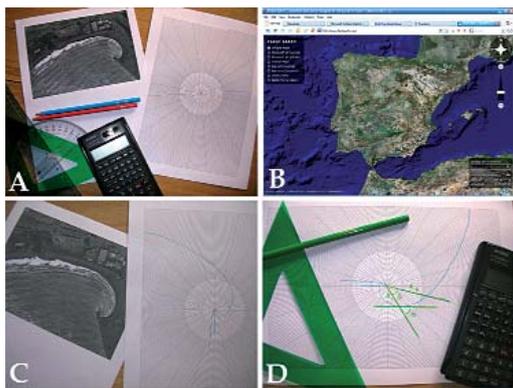


Figura 6: Pasos para una actividad didáctica: (A) material necesario: lápices de colores, papel graduado, imagen de satélite, reglas y calculadora; (B) Ejemplo de programa para la obtención de una imagen de satélite; (C) Trazado de la curva espiral logarítmica; y (D) cálculo de los parámetros de la curva. Con todo ello se calcula la ecuación de la espiral para su posterior análisis.

Paso 2: Búsqueda de imágenes

La búsqueda de imágenes puede hacerse en clase con los alumnos o previamente por el profesor, aunque ésta última es la opción más sencilla debido a que no requiere que los alumnos usen un ordenador con conexión a Internet para la descarga de las imágenes. Se pueden encontrar imágenes de satélite mediante el uso de página web como Google Maps (<http://maps.google.es/>), o Flash Earth (<http://www.flashearth.com/>). El uso de los programas Google Earth (<http://earth.google.com/intl/es/>) y World Wind (<http://worldwind.arc.nasa.gov/>) también son herramientas de gran utilidad (Figura 6B). Una vez localizada una línea de costa de interés, esta se puede copiar (usar las teclas Ctrl+Alt+Imp. Pant para copiar la imagen de la pantalla o cualquier programa para la captura de pantalla) para después guardarla (por ejemplo con un sencillo programa como Paint) e imprimirla y fotocopiarla para los alumnos. Se recomienda el uso de distintas imágenes con el fin de analizar las diferencias entre ellas (Figura 4). Se recomienda el uso de al menos una línea de costa, por ejemplo la de la playa de Estepona, Málaga (Figura 1, 4C y 6C).

Paso 3: Localización del polo de la espiral

El primer paso para el análisis de una curva espiral es la localización de su centro, denominado polo. En el caso de las líneas de costa, generadas por la acción del oleaje, el polo se localiza (aproximadamente) en el lugar donde se produce la difracción de las olas que se acercan a la costa. Estos lugares coinciden con los extremos de los espigones de los puertos, espigones, diques, etc. En otras ocasiones el punto de difracción es una zona de rocas en el mar, acantilados, etc. La localización del polo de la espiral es el punto más complejo en el análisis manual de las espirales debido a que en la naturaleza, suelen existir múltiples puntos de difracción. En otras ocasiones la actuación antrópica sobre la línea de costa hace difícil reconocer estos puntos. En el ejemplo usado en este trabajo, la playa de Estepona, Málaga, el punto de difracción se localiza en el extremo del dique del puerto (Figura 1).

Paso 4: Trazado de espirales

Una vez localizado el polo de la playa, los alumnos deben calcar el trazado de la línea de costa de la imagen impresa sobre el papel graduado. El único requisito es hacer coincidir el centro de la posible espiral con el centro de coordenadas del papel graduado. Cuando se estudian diversas líneas de costa para su posterior análisis comparativo, se deberían emplear distintos lápices de colores para diferenciar las distintas líneas de costa (Figura 6C).

Paso 5: Comprobación de la espiral logarítmica

El siguiente paso a realizar es comprobar que la línea de costa puede modelizarse como una espi-

ral logarítmica. Para ello, se debe trazar, para cada línea de costa, dos radios cualesquiera de longitudes R_1 y R_2 . A continuación se debe trazar la tangente a la curva en el punto donde cada radio corta la curva espiral. El ángulo entre la tangente y el radio de la espiral es el ángulo α . (Figura 6D) Si la línea de costa es una espiral logarítmica, este ángulo debería ser igual medido en los dos puntos elegidos. Debido a las irregularidades de las líneas de costa, al oleaje, a la actividad antrópica, etc. y a la propia metodología manual para el trazado de la línea de costa sobre el papel graduado, puede que el valor del ángulo α obtenido por lo alumnos no sea completamente similar. En ese caso, pueden realizarse más mediciones para comprobar este posible error, o asumir una pequeña variación en el valor de α . Sin los valores de éste ángulo son muy diferentes, es sin duda porque la línea de costa no sigue una espiral logarítmica.

Paso 6: Cálculo de la espiral logarítmica

Con todo ello, y empleando la ecuación general de las espirales logarítmicas previamente descrita, se calcula el valor de la constante a . Para ello es necesario resolver un sencillo sistema de dos ecuaciones (para R_1 y R_2 , sabiendo que $\Theta = \Theta_1 - \Theta_2$, el de los ángulos Θ_1 y Θ_2). De esta manera se obtiene la ecuación de la línea de costa, caracterizada por los valores de a , α , y Θ . Este cálculo debe realizarse para cada una de las líneas de costa empleadas en la actividad.

Paso 7: Comprobación de los resultados

Aunque implica una complejidad algo mayor, es posible comprobar los resultados obtenidos mediante la aplicación del algoritmo de Mishra (2006). Este cálculo requiere de un ordenador con un compilador de lenguaje Fortran 77 y de un listado de las coordenadas de numerosos puntos a lo largo de la línea de costa analizada. El profesor puede aplicar este algoritmo de manera previa al desarrollo de la actividad con el fin de

conocer los resultados y poder luego compararlos con los obtenidos de manera manual por los alumnos.

Paso 8: Análisis de resultados

Con los resultados obtenidos para cada una de las líneas de costa analizadas (y seleccionadas por el profesor o los propios alumnos), se pueden proponer distintas preguntas para que los estudiantes reflexionen sobre la utilidad de este tipo de modelizaciones matemáticas. Por ejemplo: El punto donde se produce la difracción (polo o centro de la espiral), ¿es natural (rocas, acantilados, etc.) o artificial (puerto, dique, etc.)? En el caso de la playa de Estepona, éste polo se encuentra en el extremo de un dique costero, luego es artificial. Si es artificial, ¿está relacionada la forma espiral de la playa y la presencia de esa obra? Si, la construcción de una obra ha llevado a un cambio en la dinámica del oleaje junto a la costa y, por tanto, a un cambio en los lugares donde se produce erosión y sedimentación, lo que conlleva a un cambio de la forma original de la playa. El profesor puede diseñar otras preguntas más complejas como la relación entre el oleaje y la situación de la obra de ingeniería costera, o los valores de a , α , y Θ con la longitud de la playa, o la obra de ingeniería, etc. Las preguntas dependerán del nivel de los estudiantes y de la asignatura en la que se desarrolle esta actividad.

Otras posibilidades:

Además de comparar distintas líneas de costa entre sí, es posible comparar la evolución de una línea de costa de este tipo a lo largo del tiempo. Para ello es necesario disponer de varias imágenes de la misma costa tomadas en momentos diferentes (en verano e invierno, con varios años de diferencia, antes y después de la construcción de un puerto, un dique o un espigón, etc.), con el fin de ver la influencia del tiempo en la evolución de las playas, así como las construcciones llevadas a cabo en la costa (urbanizaciones, paseos marítimos, etc.).