García de Galdeano (1846-1924) y la modernización de la Geometría en España

MARIANO HORMIGON*

1. *INTRODUCCION*

El presente trabajo pretende aportar algunos datos sobre el proceso de introducción en la comunidad matemática española de ideas modernas en el terreno de la Geometría antes de Rey Pastor (1). La poderosa personalidad de éste ha condicionado enormemente las posteriores valoraciones sobre el proceso de modernización de la matemática española en los años finales del siglo XIX y primeros del XX, marginando de hecho la importancia de la obra del que fuera su profesor en la Universidad de Zaragoza, Zoel García de Galdeano y Yanguas (2).

1.1. *La Geometría oficial*

Las primeras pautas de desarrollo de la Geometría —todavía en el marco del Paradigma Lagrangiano (3)— fueron dadas, por caminos diferentes, por Monge y Poncelet. Sus concepciones, vinculadas a

(1) Julio Rey Pastor (Logroño, 1888-Buenos Aires, 1962) va a ser estudiado en profundidad con motivo de la celebración del I Simposio sobre Julio Rey Pastor que ha de celebrarse en Logroño entre el 28 de octubre y el 1 de noviembre de 1983. Hasta tanto se publiquen las Actas de este Simposio la más completa aproximación a su vida y obra se encuentra en el libro RIOS; SANTALO; BALANZAT (1979), *Julio Rey Pastor, matemático.* Madrid, 328 pp.

(2) Una breve introducción biográfica a García de Galdeano puede encontrarse en *La Gran Enciclopedia Aragonesa* (1980-82), vol. 6, pp. 1495-6, Zaragoza, Unali. Para una aproximación más detallada a su obra científica véase HORMIGON, M. (1982), *Problemas de historia de las Matemáticas en España (1870-1920). Zoel García de Galdeano,* Madrid, Universidad Autónoma de Madrid, 545 pp.

(3) Se denomina Paradigma Lagrangiano el modelo matemático construido sobre la síntesis que Lagrange realizó en sus obras de los años finales del siglo XVIII; elaboración sustentada en los trabajos de Euler y d'Alambert directamente y de toda la corriente que partiendo de Leibniz recorre las Matemáticas del XVIII.

* Departamento de Ecuaciones Funcionales, Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza. España.
DYNAMIS
Acta Hispanica ad Medicinae Scientiarumque Historiam Illustrandam. Vol. 3, 1983, pp. 199-229.
ISSN: 0211-9536

planteamientos técnicos, se estructuran sobre representaciones geométricas de relaciones consolidadas en el plano y espacio físicos. Estas geometrías, aun teniendo en cuenta sus poderosos desarrollos en el siglo XIX, no supusieron ruptura teórica alguna con los modelos matemáticos anteriores. Hay que entender los trabajos de los matemáticos franceses de la Revolución y del período inmediatamente posterior como un proceso acumulativo de tipo cuantitativo que, además, tenía hundidas sus raíces en desarrollos geométricos marginales del siglo XVII plenamente inmersos en el modelo geométrico eucliciano.

Esta Geometría generó una cierta reacción anticartesiana que tomó cuerpo a lo largo del siglo XIX. Fue un proceso dialéctico de reacción *natural* ante los esquemas rotundamente establecidos en el siglo precedente. La Geometría cartesiana, como todas las grandes vías de trabajo surgidas en el XVII, fue agotando con el paso del tiempo el filón de enigmas abiertos por la síntesis de Descartes. Y en ese proceso de reacción surgió la obra de K. G. C. von Staudt y su *Geometría de la Posición*. K. G. C. von Staudt (1798-1867) publicó en 1847 *Geometrie der Lage* en la que se construye una Geometría Proyectiva sin referencias a magnitudes métricas ni aritméticas. La idea, que cargaba la *culpa* de todas las zozobras geométricas al álgebra, no fue seguida con mucho entusiasmo en la Europa matemáticamente desarrollada, aunque sí influenció de manera significativa la exposición sintética posterior a la Geometría Proyectiva (4). En esta escuela *sintética*, la hostilidad al álgebra llegó a alcanzar cotas tales que, como señala Bourbaki (5), el empleo de coordenadas llegó a ser considerado como una deshonra. Mas Staudt, no contento con eso, llegó incluso a prescindir en los fundamentos de la Geometría de los números reales. A pesar del fervor alborozado de sus partidarios, este tipo de geometría sintética fue abandonado porque sus posibilidades de aplicación fructífera resultaron muy escasas (6).

Este es el primer aspecto a estudiar sobre la Geometría en España en el entorno de 1900. La acomodación rígida a una manera parcial de

Para más información sobre este tema se pueden consultar mis trabajos: (1980), Paradigmas y Matemáticas. VII Jornadas de Matemáticas Hispano-Lusitanas, Sant Feliú de Guíxols, 1980. *Publicacions de la Secció de Mathematiques de la Universitat Autònoma de Barcelona,* núm. 20, pp. 51-54. HORMIGON, M. (1981), Un modelo teórico para la investigación de la modernidad en Historia de las Matemáticas, *I Simposium sobre Metodología de la Historia de las Ciencias,* Madrid, pp. 19-27; y HORMIGON, M. (1982), El Paradigma Hilbertiano en España, *II Congreso de la SEHC,* Jaca (en prensa).

(4) Véase COOLIDGE, J. L. (1963), *A History of Geometrical Methods,* Dover.

(5) BOURBAKI, N. (1972), *Elementos de Historia de las Matemáticas,* Versión española de Jesús Hernández, Madrid, Alianza Editorial, p. 182.

(6) *Ibid.,* p. 186.

contemplar y entender la Geometría impidió, de hecho, la existencia de una vía más rápida y eficaz de acortar distancias entre España y Europa. He aquí una de las lecciones más provechosas que pueden extraerse de esta historia, porque en este campo se podía haber caminado más deprisa en España. En efecto, el *Dios geometriza* platónico era un axioma muy sentido por los matemáticos españoles ilustrados. De sus escarceos mínimamente creadores, buena parte se desarrolló sobre elementos geométricos e, incluso, entrado el siglo XIX, la receptividad respecto a las construcciones más acabadas en materia de Geometría fue bastante fina. La calidad de la obra de Chasles era un primer punto de apoyo sobre el que sustentar la actualización de los conocimientos geométricos en España. Y así lo vio Echegaray, cuando publicó entre 1865 y 1867 sus *Problemas de Geometría Analítica* y la *Introducción a la Geometría Proyectiva Superior.* En ese momento, la distancia cronológica con la línea de trabajo de los geómetras franceses no era muy grande, el idioma de expresión de las investigaciones originales más asequible —factor nada desdeñable en el siglo XIX— y su vertiente aplicada la hacían enormemente sugestiva. Y aunque no significasen ruptura del Paradigma Lagrangiano, las investigaciones en Geometría Proyectiva en la línea de Poncelet y Chasles eran, cuando menos, modernas (7).

Así lo entendieron García de Galdeano y Eduardo Torroja cuando comenzó su carrera como geómetra. Pero en uno de los acostumbrados bandazos de las instituciones científicas españolas, Chasles fue sustituido por von Staudt por parte de Torroja. Y aquí hay que considerar como casi siempre la incidencia que en la Historia de la Ciencia española ha tenido la peculiar organización y funcionamiento de la institución universitaria. La ausencia de autonomía en la Universidad, su ordenancismo reglamentario, la fijación de los Planes de Estudio por decreto y el carácter funcionarial del profesorado fueron factores que propiciaron esta situación. Una buena gestión a nivel ministerial era, en esa situación, más eficaz que el más riguroso y tenaz razonamiento estrictamente científico. La Matemática española se llenó de Geometría, lo cual no hubiera sido malo, mas se llenó en concreto de un solo tipo de Geometría, la *geometría de la posición,* y esto sí que lo fue. Y véase por qué.

En 1912, Jiménez Rueda, como delegado en España de la Comisión Internationale de L'Enseignement Mathématique, publicó las memo-

(7) Sobre este tema son muy interesantes los comentarios de BARINAGA, J. aparecidos en la revista *Matemática Elemental.* En particular, puede leerse el que figura en el tomo IV (1935), pp. 1-3.

rias presentadas al Congreso de Cambridge sobre *L'Enseignement des Mathématiques en Espagne* (8). Este tomo de 140 páginas recogía ocho trabajos sobre diferentes aspectos de la implantación institucional de las Matemáticas en las Facultades de Ciencias, Escuelas Especiales, Normales y Militares. La primera de dichas memorias titulada *M(onsieur) Torroja et l'évolution de la Geometrie en Espagne* (9), era obra de Miguel Vegas y Puebla-Collado, distinguido discípulo de Torroja y a la sazón «savant confrère» —modesto calificativo profusamente utilizado en las citadas memorias.

Merece la pena detenerse en el análisis que uno de los próceres de la Geometría oficial en España hacía de la situación. Su comienzo no podía ser más eficaz para llamar la atención de los colegas extranjeros en el Congreso: «Jusq'au 1878, l'étude de la Géometrie Descriptive en Espagne était passée par les même moules qu'en France» (10). Además de los factores científicos que representaba el inicio de la memoria y que se van a considerar a continuación, resalta el hecho de que el catedrático y académico Vegas como diplomático no tenía precio, porque incidía, en un rasgo, ya no tan premonitorio, en la disputa entre germanófilos y aliadófilos que iba a operar decisivamente sobre la intelectualidad española en esa década, aunque él lo hiciera desde el terreno de la Geometría. Mas Vegas razona las negativas *moules* que se importaban de Francia: «Les procedés employés dans la résolution des problemes et même dans les systèmes de répresentation surtout dans l'étude des lignes et des superficies (*sic*), étaient basés sur les propietés métriques des figures, l'Analyse algébrique remplissait un role trés importante dans les procedés de démonstration, á un tel point que l'on pouvait considérer la Géometrie descriptive, dans cette partie, comme une prolongation ou une amplification de la Géometrie analytique» (11). Y Vegas alude aquí al ya mentado enemigo mortal de la Geometría de la Posición: el Algebra. El año de ruptura corresponde como se puede presumir al de toma de posesión de Torroja como catedrático de Geometría de Madrid, procedente de Valencia, donde, por cierto, era profesor de Geometría Analítica y Algebra Superior.

Y con la llegada de Torroja a Madrid comienza para Vegas la transformación de la Geometría, hasta tal punto que le permite concluir: «On peut affirmer qu'en ce qui concerne a la Géometrie,

---

(8) JIMENEZ RUEDA, C. (1912), *L'Enseignement des Mathématiques en Espagne. Mémoires presentés au Congrès de Cambridge,* Madrid, 140 pp.

(9) VEGAS, M. (1912), M. Torroja et l'évolution de la Géometrie en Espagne. En: JIMENEZ RUEDA (1912), pp. 5-19.

(10) *Ibid.,* p. 5.

(11) *Ibid.,* p. 5.

l'Espagne se trouve parmi les nations qui marchent á la tête du mouvement scientifique» (12). Esto lo escribió Vegas en una memoria dirigida a un Congreso Internacional de Matemáticos y en 1912. Y lo decía sin la menor consideración a las ideas que bullían y preocupaban a los matemáticos en casi todo el mundo. Lo decía sin la menor referencia a los trabajos sobre geometrías no euclídeas, ni a la evolución del concepto de espacio (y su correlativo de Geometría), despreciando los desarrollos de la Geometría algebraica y sin mentar una palabra del problema de los fundamentos. Lo decía Vegas cuando Hilbert, al señalar en 1900 las posibles vías de trabajo futuro, no mencionó siquiera esta rama, al igual que en el Congreso de Roma de 1908 tampoco aparece por ninguna parte la geometría de la posición, señalándose, por el contrario, que los rumbos geométricos del siglo XX son la Geometría Algebraica, la Infinitesimal y el Análisis Situs (13).

La valoración no podía dejar de justificarse. Y así, después de explicar al Congreso Internacional de Matemáticos el contenido de la asignatura, Vegas señala un hito en la historia de la Ciencia Española: «La forme que M. Torroja donna au cours de Géometrie Descriptive fut le premier essai fait dans notre pays pour reduire cette science à un véritable systeme scientifique, pas gigantesque de la régéneration de la science de l'espace *arrachée desormais des serres de l'Analyse*» (14).

---

(12) *Ibid.*, p. 6.

(13) Por lo que hace al IV Congresso Internationale dei Matematici, Roma, 1908, se puede señalar que Volterra en su conferencia sobre *Le matematische in Italia nella seconda metá del secolo XIX*, amplía y prolonga la dada por él mismo en el Congreso de París, ocho años antes, sobre aspectos de tipo general. Los elementos fundamentales de la situación y perspectivas geométricas fueron establecidos por Darboux que disertó sobre *Les origines, les méthodes et les problemes de la Géometrie infinitésimal* (volumen I de las Actas, pp. 105-122); Veronese desarrolló el tema de la *Geometria non-archimedea* (vol. I., pp. 197-208) y Poincaré, al hablar de *L'Avenir des Mathématiques* (vol. I., pp. 167-182) también consideró el tema de la posible evolución de la Geometría. Un dato significativo es la concesión de la medalla Guccia del Círcolo Matematico di Palermo, por parte de una Comisión formada por Noether, Poincaré y Segre a Francesco Severi por sus trabajos publicados entre 1904 y 1907 sobre *superficies u otras variedades algebraicas*.
En la mencionada conferencia de Poincaré, inexplicablemente poco conocida por la comunidad matemática —no sólo española—, se plantea claramente la evidencia de que la estrecha relación de la geometría con el álgebra o el análisis parece que no deje campo libre de expresión a la *geometría pura*. «Il semble —dice Poincaré— .. que les faits géometriques ne soient autre chose que les faits algébriques ou analytiques exprimés dans autre langage.» Sin embargo, matiza muy bien la *apariencia*, para señalar los rumbos que tras la obra de Riemann (Analysis Situs), Noether (grupos de puntos sobre una curva algebraica), Darboux y Bianchi (geometría infinitesimal) va a tomar el lenguaje geométrico.
El agua pasada de la geometría de la posición, por lo tanto, ya no movía ni iba a mover ningún molino matemático en Europa.

(14) VEGAS (1912), p. 8. El subrayado es mío. M.H.

Vegas señala a continuación la fuente de inspiración de la producción de Torroja, quien «cherchant dans la savante Allemagne, quelque chose qui pourrait être utile pour le but qu'il poursivait, il découvrit l'ouvrage classique et transcendental de von Staudt intitulé: Geometrie der Lage» (15).

Tras esta cita no cabe ya duda de la profundidad del método científico de Torroja y de su valor didáctico para los jóvenes investigadores españoles de todas las generaciones, porque lo que Vegas pretende trasmitir en 1912 se especifica en los siguientes extremos: 1.º) la investigación debe ser de tesis previa para lo cual hay que buscar alguna cosa que sea útil; 2.º) la elección del rumbo no se hace por un camino bibliográfico de problemas, escuelas o autores, sino geográfico; y 3.º) el fin de la investigación es encontrar un libro clásico. La verdad es que la propia confesión de Vegas indica el nivel de perspicacia de Torroja a la hora de buscar en la «savante Allemagne», porque pudiendo llegar a los desarrollos de Moebius o Plücker, o de Gauss, o de Grassman o de Riemann, por señalar puntos de futuro geométrico en el entorno de 1850, se quedó con von Staudt. Y con tal inspiración comenzó Torroja a redactar apuntes de clase, que son para Vegas «véritables bijoux scientifiques». Claro que Vegas podía decirlo porque lo conocía bien, ya que además de alumno había sido colaborador suyo, y por ello manifiesta al V Congreso Internacional de Matemáticos: «d'ésprit de M. Torroja oú brille sans nul doute la lumière étincelante de la science est entouré de la belle auréole de la vertu la plus pure, résultat de la Foi Catholique qu'il professe» (16).

Pasa Vegas a extenderse sobre la magnitud del trabajo sobre la Geometría de la Posición y sobre su incidencia institucional y esto es lo verdaderamente grave y elocuente: «Les efforts et les travaux réalisés par M. Torroja trouverent écho parmi ses élèves en obtenant la formation d'une véritable école de Géometrie en Espagne ou *l'Etat a été obligé de modifier le plan d'études de la Faculté des Sciences en 1900 et de diviser les cours de Géometrie Génerale en Géometrie Métrique et en Géometrie de la Position*» (17).

Esta es, en apretada síntesis, la Memoria que el catedrático y académico Miguel Vegas presentó a la audiencia internacional. La Memoria —habida cuenta que se publicó cuando Torroja estaba en el cénit de su poder— apenas tuvo contestación en España. Sólo dos de sus más destacados matemáticos, García de Galdeano y Rey Pastor, se

(15) VEGAS, *ib.*, p. 9.
(16) VEGAS, *ib.*, p. 11.
(17) VEGAS, *ib.*, p. 13. El subrayado es mío. M. H.

atrevieron a discutirla. La intervención del primero fue súbita e inmediata, la de Rey Pastor tuvo lugar en el Congreso de Valladolid de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias de 1915 (18).

La respuesta de García de Galdeano fue, además de elegante, dura y precisa. Decía en 1913 (19):

> «Hace muchos años que damos preponderante importancia a la Geometría y de ésta a un método especialísimo, descubierto por Staudt, que es precisamente la rama de *menor alcance* (el subrayado es de García de Galdeano) para los conocimiento generales; y la obra de Staudt se redujo a enriquecer la Geometría con un *método* (subrayado de G. de G.) puramente gráfico y lógico, que prescinde del número, verdaderamente curioso e interesante. Y también es algo, aunque no extraordinariamente interesante, que los geómetras aficionados a este particular punto de vista empleen su esfuerzo en obtener resultados especiales alcanzados más fácilmente por otros métodos.
>
> Pero esto desvía de la corriente general y es contrario al espíritu sintético de la Matemática actual, donde todas las teorías se compenetran y auxilian mutuamente. Basta conocer este método en sus líneas generales, en los cursos universitarios, pues falta hace el tiempo para conocer otras disciplinas más fecundas, sin perjuicio de que los aficionados a estas lucubraciones, como a otras, puedan dedicarse a ellas durante su vida como entretenimiento; pues la ciencia, en todas sus ramas, es entretenimiento agradable; pero dicha Geometría no podrá nunca entrar en el consorcio de las demás teorías matemáticas pues, como hemos indicado, no es más que un método especial y no manantial de ideas. Puede constituir directamente lo que ya se sabe y exponerlo con claridad intuitiva y con rigorismo perfectamente lógico; pero son conocimientos infecundos, y sobre todo incapaces de dar nueva vida.
>
> Prueba de ello es que los descubrimientos de Poncelet, Chasles, Steiner, Clebsch y otros, y aun los de Monge, cuando se dirigió a la Geometría Analítica, han engranado en todo orden de conocimientos de carácter analítico, combinatorio y orgánico, lo que no es dable a un método especial, por más que sea altamente ingenioso y apreciable, pues ciertamente que esta Geometría, como la Geometría descriptiva, tendría un lugar importantísimo, como medio educativo, en los cursos de segunda enseñanza, según se practica en otras naciones y en los primeros cursos de Facultad, pues ejercita la vista, la imaginación y el gusto a los alumnos de pocos años, como preparación para elevarse desde lo intuitivo y concreto a lo racional y abstracto de la Combinatoria y el Análisis.
>
> El que estudien estas asignaturas, como se hace entre nosotros, en los últimos cursos de la Facultad, es nocivo y contraproducente, pues ya los

(18) REY PASTOR, J. (1915), Conferencia inaugural de la sección de Ciencias Matemáticas, *Congreso de Valladolid de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias,* vol. 1, 7-25.

(19) GARCIA DE GALDEANO, Z. (1913), *Sumario de mis cursos de Cálculo Infinitesimal con arreglo al Nuevo Método de Enseñanza,* Zaragoza, pp. 14-16.

alumnos han debilitado sus facultades perceptivas para favorecer las reflexivas y no sienten afición por aquéllas, pues la influencia arrolladora del Análisis barre como el huracán las tenues briznas de los conocimientos prácticos.»

Rey Pastor tampoco quedó atrás en la respuesta al trabajo de Vegas. Así en el discurso con que se abrió el Congreso de Valladolid de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, manifestaba textualmente (20):

«Hasta ha llegado a afirmar, en ocasión análoga a ésta, uno de nuestros más distinguidos consocios, que "en cuanto a Geometría, es tan grande el desarrollo adquirido, que en la actualidad figuramos en primera línea del concierto mundial". Y esta visión tan general como equivocada, según hemos de demostrar, es, sin duda, una de las causas del estancamiento de nuestra cultura durante un cuarto de siglo. Naturalmente no mejora quien se cree perfecto.»

La sangrienta ironía de Rey Pastor y la poderosa argumentación de García de Galdeano son suficientes para demostrar que los elementos más lúcidos de la comunidad matemática española no aceptaban las excelencias gratuitas de la rama particular patrocinada por el grupo dominante en ella (21).

Hay otro elemento elocuente que se puede traer a colación aquí. Dieudonné (22), en el prólogo de su *Algebra lineal y Geometría Elemental* escribe:

«Otra característica del método matemático contemporáneo (sin duda demasiado conocido para que sea necesario insistir sobre ello) es que permite reagrupar, según sus profundas afinidades, teorías de aspecto superficial.»

Párrafo en el que se repite la argumentación de García de Galdeano. Pero no es eso, sólo. Tras criticar la enorme cantidad de ciencias en que se desglosan los actuales estudios matemáticos todavía: «Geometría

---

(20) El discurso de Rey Pastor está recogido en la antología sobre *La Polémica de la Ciencia Española* de Ernesto y Enrique García Camarero (1970), Madrid, Alianza Editorial. La cita del texto corresponde a la p. 460 de este texto de más fácil localización.

(21) No obstante, sigue siendo ilustrativo que la capacidad para *obligar al Estado* no dependa estrictamente de razones científicas.

(22) DIEUDONNE, J. (1964), *Algèbre linéaire et géometrie élémentaire,* París, Hermann. Hay traducción castellana de A. Pardo (1971), Madrid. El prólogo está reproducido en PIAGET *et al.* (1978), *La enseñanza de las matemáticas modernas.* (Selección de textos de William Schaaf, Marshall Stone, Rolf Nevanlinna, René Thom, Jean Diudonné, Hans Freudenthal, Jean Gray, Jean Piaget, A. Z. Krygovska, A. Markusievitch, Georges Glaeser, Gustave Choquet, R. Godement, E. Artin, André Revuz.) Selección y prólogo de Jesús Hernández, Madrid, Alianza Universidad, pp. 270-284. Las citas están referidas a esta última versión.

pura, Geometría Analítica, Trigonometría, Geometría Proyectiva, Geometría Conforme, Geometría no euclídea, Teoría de los números complejos», señala en una nota a pie de página: «No he incluido la *Geometría Descriptiva,* simple técnica de dibujo que afortunadamente ha sido por doquier reducida a sus verdaderas proporciones» (23).

Hay que señalar con franqueza, por tanto, que la obra y la escuela de Eduardo Torroja no ayudaron a la matemática española a avanzar hacia la modernización (24) y que más bien supusieron primero un frenazo y luego un retroceso, dado que sus secuelas pervivieron mucho tiempo todavía en la formación de los matemáticos españoles. Sin embargo, la poca densidad de la cultura matemática española hizo que su papel supuestamente renovador alcanzara una influencia y crédito que ha llegado hasta nuestros días.

1.2. *Los rumbos de la modernización*

Los conceptos geométricos modernos se fueron importando paulatinamente en el siglo XIX y entraron en tromba en los últimos años del siglo y en los primeros del XX. Pero sólo pudieron ser eficaces cuando fueron defendidas por un hombre de fuerte personalidad alternativa a Torroja y Vegas, a nivel social y a nivel matemático. Ese hombre fue Rey Pastor.

Echegaray y García de Galdeano trabajaron, en sus primeros años de geómetras, sobre la línea proyectiva francesa representada por la obra de Chasles. Sus obras, aunque discretas, son estimables desde el punto de vista de la importación. Y si Echegaray se quedó ahí no fue ése el caso de García de Galdeano, que en la segunda edición de su *Geometría Elemental,* en las dos partes de la *Geometría General,* en los tomos correspontientes a las aplicaciones geométricas del cálculo infinitesimal y en algún otro trabajo, introdujo casi todas las ideas fundamentales del bagaje geométrico del siglo XIX. Igualmente, debido a su asistencia personal a los Congresos internacionales de matemáticos, pudo oír y

(23) PIAGET *et al.* (1978), p. 275.

(24) Aunque la figura científica de Eduardo Torroja y Caballé está todavía por estudiar con la adecuada extensión y profundidad, con objeto de ser colocado en el lugar que verdaderamente le corresponde en la historia de las matemáticas en España, se pueden consultar diversos apuntes biográficos realizados por ALVAREZ UDE, J. (1919), Don Eduardo Torroja, *Revista Matemática Hispano Americana, 1,* 1-13. VEGAS, M. (1921), Don Eduardo Torroja, *Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, 17,* 136-141. REY PASTOR, J. (1943), Don Eduardo Torroja, *Revista Matemática Hispano Americana, 3,* 333-337.

utilizar inmediatamente las visiones de síntesis que Hilbert, Poincaré, Darboux y otros realizaron en los Congresos de la primera década del siglo XX.

2. *LOS TRABAJOS DE GEOMETRIA DE GARCIA DE GALDEANO*

El primer trabajo de geometría de García de Galdeano es *Complemento de la Geometría Elemental o Crítica geométrica* (25) aparecido en 1881, que fue inmediatamente ampliado y publicado al año siguiente con el escueto título de *Geometría Elemental.* De esta obra volvió a aparecer una edición muy aumentada en 1888. Ya como catedrático de Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias de Zaragoza, dio a luz los dos tomos correspondientes a la Geometría General que fueron publicados los años 1892 y 1895, respectivamente. De esta obra, el primer tomo corresponde al estudio de los «Teoremas, problemas y métodos geométricos» y el segundo, a la «Sistematización de la Geometría». Ambas partes aparecieron como serie de artículos en la primera época del *El Progreso Matemático* (26).

Habida cuenta que los dos aspectos centrales de la discusión geométrica en el siglo XIX son el concepto de espacio y el de geometría, las preguntas claves a contestar serían las siguientes —admitida la uniformidad conceptual sobre la Geometría y el objeto fundamental de su definición: estudio de las propiedades del espacio en los Paradigmas Griego y Lagrangiano—; ¿cuándo se inicia el proceso de ruptura de esos conceptos?; ¿cuándo se incorpora en la comunidad internacional la nueva perspectiva? ¿Cómo incide en España ese proceso y cómo se incorpora esa casilla del nuevo Paradigma? El tema es profundo y en absoluto se puede esquematizar. Un abordaje simplista, desde la óptica del último cuarto del siglo XX, sólo permite reducir a slogans la reconstrucción rigurosa de los procesos históricos.

---

(25) Las obras de García de Galdeano que se van a comentar son las siguientes:
— (1881), *Complemento de geometría elemental o crítica geométrica,* Madrid, 92 págs.
— (1882), *Geometría elemental,* Madrid, 236 págs.
— (1888), *Geometría Elemental,* 2.ª ed. considerablemente aumentada y corregida, Toledo, 371 págs.
— (1892), *Geometría General, Parte 1.ª,* Zaragoza, 152 págs.
— (1895), *Geometría General, Parte 2.ª,* Zaragoza, 152 págs.
— (1896), *Las modernas generalizaciones expresada en el álgebra simbólica, las geometrías no euclídeas y el concepto de hiperespacio,* Madrid, 142 págs.

(26) Véase HOMIGON, M. (1983), «El Progreso Matemático». Un estudio sobre la primera revista matemática española, *LLULL, 4,* 87-115.

Como ya se ha apuntado antes, es constatable el interés que la obra de Poncelet tuvo e indudable su seguimiento por muchos y destacados geómetras. Pero ni por sus raíces, ni por el objeto fundamental de su estudio (el espacio *real*), ni por las innovaciones cualitativas que introduce, la Geometría Proyectiva supuso quiebras sustanciales en el marco general de las Matemáticas lagrangianas en el ejercicio de la ciencia normal. Sin embargo, la novedad del enfoque proyectivo sí que representa en el enjuiciamiento histórico del siglo XIX el prestigio de las corrientes actuales —lo que en terminología menos ennoblecedora pero, por desgracia, más habitual, se llaman *modas* o *gusto de la época*—. Ocurrió con la Geometría Proyectiva algo semejante a lo que pasó con la del Triángulo (27). Ambas pueden construirse sin un gran aparato teórico previo, permiten en alto grado la intuición y presentan la posibilidad de conseguir gran número de resultados nuevos sobre enigmas diversos, por más que éstos sean de discutible interés. Resumiendo: en el siglo XIX, mientras la Geometría Proyectiva representaba lo actual, el futuro estaba en los trabajos de Lobachevsky, Grassmann, Riemann, Cayley, Beltrami y Klein.

La primera necesidad de ampliar los conocimientos de Geometría la debió sentir García de Galdeano al tener que dar clase de matemáticas de bachillerato. Por ello, su primer texto es un escarceo *crítico* realizado sobre la base de las ideas geométricas clásicas. La *Crítica geométrica,* escrita cuando aún no era doctor, es una prolongación de sus trabajos sobre metodología y organización docente de la década anterior. En él se aprecia ya un tipo de ruptura con la forma de expresión habitual de los matemáticos españos de la época. Su énfasis sobre la importancia de la metodología: «instrumento necesario para el descubrimiento de las verdades» y «dirección seguida por la inteligencia en la investigación y exposición de la verdad» (28) lo coloca en una situación de avanzada. Porque situada como un *complemento,* la *crítica geométrica* se presenta como un texto útil y necesario para los matemáticos, a los que además de recordarles uno de los objetivos centrales de su trabajo, les explica lo que desde un punto de vista riguroso se debe entender por análisis, síntesis, teorías, demostración, definición, axioma, problema, teorema, etcétera. Las dos Secciones de la obra están dedicadas a la exposición de los diferentes métodos de demostración que se ilustran por medio de ejemplos y a la crítica de las verdades geométricas respectivamente. Para su construcción se inspira en las obras de Duhamel, Rouché y Comberousse.

---

(27) *Ibidem.*
(28) GARCIA DE GALDEANO (1881), p. 3.

Aunque la mayor parte de los elementos contenidos en la *Crítica Geométrica* volvieron a ser desarrollados por García de Galdeano tanto en su *Geometría General* como en los estudios monográficos sobre el método y la síntesis, es preciso señalar el ámbito de expresión de esta forma de desarrollo de las matemáticas. Dice García de Galdeano (29):

> «La Crítica Geométrica comprende el estudio de las cantidades geométricas bajo el punto de vista de su generación, determinación, coexistencia y sustitución.»

De la preocupación metodológica y de la creación de unos planteamientos originales en esa dirección surge una forma distinta de contemplar las matemáticas, esto es, aparece en la comunidad matemática española una posición no lagrangiana, por las siguientes razones: 1.º) Por su fe en el futuro. 2.º) Por su trayectoria hacia la búsqueda de la verdad. 3.º) Porque esa búsqueda se circunscribe a los dominios de expresión de las Matemáticas. Y esto es el espíritu de las Matemáticas de finales del siglo XIX. El papel del mundo exterior se reduce al de generador de experiencias o estímulos para la génesis, más o menos remota, de los entes matemáticos, papel muy semejante al que le fuera asignado por Hilbert en su comunicación al II Congreso Internacional de Matemáticos de París de 1900 (30).

3. *LA GEOMETRIA ELEMENTAL*

La primera consideración que cabe hacer respecto de este texto es que el calificativo *elemental* es modesto si se mide en función de los posibles lectores, aunque es correcto si se establece según los criterios valorativos emanados de los propios creadores del siglo XIX y de las separaciones en categorías sobradamente conocidas. Aunque en rigor la *Geometría Elemental* conoció dos ediciones, una de 1882, cuando García de Galdeano era catedrático del Instituto de Ciudad Real y la segunda en Toledo en 1888, en realidad el segundo libro es tan distinto del primero, que bien hubiera podido titularlo de otra manera.

La primera *Geometría Elemental* es un texto de 236 páginas, dividido en dos Secciones: la Expositiva y la Crítica. A su vez, la Sección expositiva está dividida en dos partes consagradas al estudio de las Geometrías Plana y del Espacio. La edición de 1888, por su parte, se

(29) *Ibid.*, p. 60.

(30) HILBERT, D. (1902), Sur les problemes futurs des mathématiques. En: *Compte rendue du deuxième Congrès International des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 aout 1900,* Paris, Gauthiers-Villars, pp. 58-114.

estructura en dos partes, tituladas, respectivamente, Teoría de la igualdad y desigualdad geométricas y Teoría de la proporcionalidad geométrica.

A la vista de los respectivos sumarios de las dos ediciones de la *Geometría Elemental,* que reproducimos en Apéndice, hay que contestar a las preguntas claves del tema: ¿qué innovaciones suponen en el conjunto de las Matemáticas en España? ¿Existen ideas de ruptura con el Paradigma Lagrangiano? ¿Qué vías de desarrollo normal se exponen? ¿Qué caminos de formación e investigación bibliográfica se señalan? ¿Qué fuentes se utilizan? ¿Existen precisiones modernas sobre los conceptos de espacio y Geometría?

La constante superación intelectual de García de Galdeano y su honestidad permiten desglosar, de una manera bastante atinada, los momentos claves de inspiración y las lecturas más sobresalientes a lo largo de toda su vida. Las preguntas básicas que los historiadores de las matemáticas se hacen al realizar un análisis comparado de dos ediciones diferentes de un mismo libro de un autor para averiguar su estancamiento o progresión, son, en el caso de García de Galdeano, innecesarias por evidentes.

La parte expositiva de la edición de 1882 es un tratado de 190 páginas, efectivamente elemental.

La parte de «Crítica Geométrica» es una versión resumida del *Complemento* publicado en 1881. La primera edición de la *Geometría Elemental* es, por tanto, un libro vulgar que no aporta nada nuevo, ni responde positivamente a las preguntas anteriormente planteadas. Sin embargo, en la segunda edición se aprecia claramente lo que García de Galdeano había aprendido entre los treinta y ocho y los cuarenta y cuatro años, habiendo debido superar, en ese tiempo, dos oposiciones y habiendo publicado sus tres interesantes libros de Algebra más uno dedicado a la Crítica Algorítmica.

La *Geometría Elemental* de 1888 contiene los elementos más precisos de la primera edición, pero se extiende por campos no reflejados en la misma y además lo hace con cierta profundidad y actualidad. Como se ve en el sumario del libro, la obra está dividida en dos partes. La primera de ellas consta de 126 páginas dedicadas a la exposición resumida de la doctrina reflejada en el libro de 1882. Donde se plasman las innovaciones y las ideas actuales es en la segunda parte, dedicada al desarrollo de la teoría de la proporcionalidad geométrica a lo largo de 370 páginas. La gran novedad es la presentación de la geometría no euclidiana de Lobachevsky y Bolyai. A pesar de que la referencia apenas cubre tres páginas (31), los elementos que aporta son interesantes. Afirma que esta geometría es un «sistema establecido», prescindiendo de «la verdad o no verdad del postulado». Señala la negación del postulado de Euclides, con la existencia de dos paralelas por un punto exterior a una recta dada y establece que en la Geometría de Lobachevsky la suma de los ángulos interiores de un triángulo no puede exceder de dos rectos. Define, siguiendo a Battaglini, el concepto de ángulo de paralelismo y señala que la Geometría Euclídea es un caso límite de la de Lobachevsky.

No obstante, hay que advertir que a pesar de la escueta objetividad en la presentación del tema, García de Galdeano muestra un cierto escepticismo, reflejado en expresiones como la anteriormente recogida relativa a la «verdad» del postulado de Euclides, o introducciones del tipo «de manera que, según este orden de ideas...». Tampoco recoge ni hace referencia a las construcciones *reales* de Beltrami y Klein en la Geometría de Lobachevsky. Por último, cabe señalar que su posición respecto al dilema de cuál de las dos Geometrías es la verdadera llega a una conclusión análoga a la que formuló Poincaré (32). Así, García de Galdeano señala que dado que la inexactitud de las mediciones astronómicas respecto a la suma de los ángulos de un triángulo es sumamente pequeña «la geometría práctica queda asimilada a la Geometría euclidiana; y, bajo este concepto, el postulado puede admitirse como una verdad experimental» (33). En descargo de la contradicción en que incurre García de Galdeano, dado que en Geometría no pueden admitirse «pequeñas diferencias» sino verdades o errores, cabe apuntar que el ambiente matemático de finales del XIX era proclive a semejante tipo de razonamiento. Así, Poincaré, que aunque más cauteloso señala que «la experiencia no puede decidir entre Euclides y Lobachevsky» (34), la razón fundamental para optar por una u otra geometría no es cuestionando su veracidad, sino su comodidad (35).

Otra interesante aportación de la edición de 1888 es el desarrollo de la geometría proyectiva de Chasles según su conocida obra de *Los tres libros de los porismas de Euclides* —por su importancia tanto desde el punto de vista geométrico como histórico—. Si en la introducción de la geometría de Lobachevsky se advierte un cierto distanciamiento, en el

(31) GARCIA DE GALDEANO (1888), pp. 107-109.

(32) Véase POINCARE, H. (1963), *La Ciencia y la hipótesis,* 3.ª ed. en castellano, Madrid, Espasa-Calpe, pp. 45-89.

(33) GARCIA DE GALDEANO (1888), p. 107.

(34) POINCARE, H. (1963), p. 99.

(35) *Ibid.,* p. 57.

tratamiento de este tema se nota el entusiasmo de poder construir una Geometría «actual» directamente apoyada en *Los Elementos.* A éstos dedica la mayor parte del texto. Con lo que esta *Geometría Elemental,* si no contiene sustanciales elementos de ruptura, sí que puede entenderse como un libro actual y correcto en el sentido de que establece sus proposiciones sobre los resultados de la línea Poncelet-Chasles, mucho más fructíferos que los desarrollados a partir de la obra de von Staudt.

4. *LA GEOMETRIA GENERAL*

Una vez afincado en Zaragoza —de donde ya no se movería hasta su muerte— como catedrático de Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias y en el breve lapso de tiempo que, coincidiendo con la primera serie de *El Progreso Matemático,* ocupó la mencionada plaza, publicó las dos partes de la *Geometría General.* Ambos libros, no obstante, aparecieron en uno de los habituales seriales que vieron la luz en la revista y fueron publicados en forma de volumen en los años 1892 y 1895.

La parte primera de la *Geometría General* lleva por subtítulo «Teoremas, problemas y métodos geométricos» y se desarrolla a lo largo de 168 páginas. La segunda parte, aparecida tres años después, fue subtitulada «Sistematización de la Geometría», imprimiéndose 152 páginas. Los sumarios de ambos textos se reproducen igualmente en el Apéndice.

La sede zaragozana y el comienzo de la publicación de *El Progreso Matemático* supone para García de Galdeano un enriquecimiento formativo e informativo considerable, ya que no económico. Si la segunda edición de la *Geometría Elemental* apunta ya a una posición avanzada en cuanto a la producción matemática europea y una interesante metodología discursiva, su *Geometría General* revela su atención respecto a los resultados del momento y a la encrucijada conceptual que la geometría vive en los años anteriores a la síntesis de Hilbert.

La *Geometría General* responde a un planteamiento de síntesis y aquí el buen hacer de García de Galdeano se advierte en seguida. En el camino trazado por Chasles, no sólo en lo que respecta a la construcción moderna de los porismas de Euclides, sino ampliándolo en los apoyos del *Traité de Géometrie Supérieure* y del *Aperçu historique,* García de Galdeano elabora su aproximación histórica que lo sitúa en buenas condiciones para la síntesis geométrica. La ambiciosa búsqueda de conocimientos que representa todo el proceso de aprendizaje de García de Galdeano le facilitó la asimilación de los cambios que se habían producido o se estaban produciendo en Geometría, primero en sus trabajos específicos, más tarde en sus Memorias de síntesis general, porque las ideas que se echan en falta en las publicaciones de la década de 1890 aparecen en las realizadas en el siglo XX.

Como el objetivo básico de este trabajo es el de destacar los elementos de modernización introducidos en las obras geométricas de García de Galdeano y ese seguimiento pasa necesariamente por sus compendios doctrinales, justo es advertir que los elementos de ruptura en cualquier parcela de las Matemáticas en una obra de tipo general se ven cuantitativamente disminuidos en favor de la línea de argumentación central elegida. Dicho de otra forma, un texto de Geometría *General* en la última década del siglo XIX, debía obligatoriamente primar una forma de expresión de la Geometría sobre las otras. Y así, siempre se detecta una teoría central que da soporte al texto, junto a la que se adosan —y ése es precisamente síntoma de sensibilidad— los factores nuevos voluntariamente destacados, en los que suelen aparecer los enigmas más modernos.

Esa teoría central es, en el caso de la Geometría General de García de Galdeano, la geometría proyectiva de la escuela francesa, ya enriquecida por los trabajos de Moebius, Plücker y sus seguidores alemanes. No obstante, a pesar del apogeo de esta forma de Geometría en el último tercio del siglo XIX, como señala Bourbaki (36), las nuevas ideas podían adscribirse al nombre de Riemann por la profundidad y riqueza de sus trabajos; y, en el terreno de la síntesis y de la metodología al de Klein.

Pues bien, tras la amplia y necesaria introducción sobre las metodologías clásicas de Euclides, Poncelet, Möebius y Chasles, García de Galdeano analiza monográficamente la *Ausdehnungslehre* de Grassmann a lo largo de veinte páginas. Las referencias a este difícil texto, que ya habían aparecido en otra obra suya (37) respecto a la renovación del instrumental y metodología algebraica, se amplían ahora al campo estricto de la Geometría, pero con la aportación de la lectura hecha por Peano en la que los segmentos dotados de dirección y sentido se convierten en vectores (38).

El paso siguiente lo constituyen los cuaternios de Hamilton, que expone de una forma exhaustiva, poniendo énfasis en la interrelación

(36) BOURBAKI, N. (1972), *op. cit.*, pp. 192 y ss.

(37) GARCIA DE GALDEANO (1888), *Crítica y síntesis de Algebra*, Toledo, 112 págs.

(38) García de Galdeano se basa primordialmente en la obra de Peano: *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnunglehre di H. Grasmann*, que vio la luz en Turín en 1893 (y en este caso las fechas entre la fuente y el texto de Galdeano son reveladoras por sí solas de modernidad); si bien hace también referencia a tres Memorias de H. Grasmann (hijo) publicadas en los años 1886, 1888 y 1893.

que existe entre las construcciones lógicas de Boole y las metodologías geométricas apuntadas.

En la parte segunda de la obra, dedicada a los sistemas, puede entrar de lleno en las innovaciones. Así, lo que era una breve referencia de tres páginas en la *Geometría Elemental* a las elaboraciones de Lobachevsky y Bolyai, ahora se convierte en un aspecto central e inmediato. Dice García de Galdeano:

> «Las definiciones primeras de la Geometría han conducido a distintas direcciones que constituyen otros tantos sistemas de Geometría ... Lobachevsky y Bolyai, prescindiendo de la exactitud del postulado euclídeo establecieron un sistema geométrico, o un encadenamiento lógico de verdades, del que resulta la existencia de dos paralelas y Riemann consideró otro sistema en el que no hay paralelas.»

Y sigue:

> «Esto ha conducido a considerar diversos géneros de espacio ... Estos curiosos resultados a que ha conducido la discusión de los primeros principios de la Geometría, han adquirido gran importancia en estos últimos años y constituyen una interesante literatura matemática enriquecida con los estudios de los espacios de más de tres dimensiones, cuyos fundamentos estableció Riemann en su Memoria *Uber die Hypotesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*» (39).

Estas ideas merecen una reflexión. No es sorprendente la referencia a la existencia de las Geometrías no euclídeas ni al nombre de Riemann que habían aparecido en la ya citada *Crítica y Síntesis de Algebra* de 1888; lo que sí resulta notable es su versión del significado de esas construcciones. Y aquí sí que se advierte un cambio en la evolución de las ideas de García de Galdeano, porque la expresión trascendente «verdad o no verdad del Postulado» se convierte en un prescindir de la exactitud en el que se subraya que es un conjunto lógico de verdades, con lo cual relativiza claramente la cuestión de la verdad en la Geometría. Considera además que este tipo de resultados *curiosos* —otro síntoma de relativismo— le lleva a romper el concepto absoluto del espacio kantiano, otro aspecto inequívoco de su hilbertianismo. Por último, la mención a la lección inaugual de Riemann del año 1854, en el aspecto de los *espacios de más de tres dimensiones* es similar a la que hace Bourbaki en el capítulo dedicado a la historia de los espacios topológicos.

Tras esta introducción pasa a desarrollar los sistemas geométricos. Expone la estructura básica de la geometría euclídea, para proceder a

(39) GARCIA DE GALDEANO (1895), pp. 7-8.

continuación al desarrollo de la Geometría de Lobachevsky-Bolyai, cuyos trabajos califica de «importantes» y por los que la «Geometría sufre una evolución importantísima». Dedica doce páginas a establecer las «proposiciones preliminares» y los resultados más sobresalientes. Pero su planteamiento es mucho más explícito. Después de referirse a los trabajos de Gauss sobre la curvatura de las superficies, subraya el carácter rupturista e innovador de este tema:

> «La célebre Memoria de Riemann ya citada, la de Helmholtz, "Uber den Ursprung und die Bedentung der geometrischen Axiome" y la del profesor de Roma Sr. Beltrami, "Saggio di interpretazione de la Geometria non-euclidea", con los trabajos de Lobachevsky y Bolyai, dilatando considerablemente el campo de los estudios geométricos, plantean problemas nuevos y aportan elementos hasta esta época fuera del alcance de las investigaciones matemáticas, ya que el sistema euclídeo era considerado como absolutamente cierto e indiscutible y muy conforme a la doctrina kantiana, como una doctrina desenvuelta a priori, al ser el espacio una forma subjetiva de nuestro modo de conocer» (40).

Visto desde las postrimerías del siglo XX, el supuesto retraso de casi cincuenta años en Geometría que pontificó Rey Pastor en 1915 suena directamente a salida de *enfant terrible.* Porque la riqueza bibliográfica de fuentes de referencia para la ampliación de temas se establece en un rango similar al que ya había aparecido en los trabajos de álgebra de la década anterior. Sólo que, además de las Memorias originales, se señalan también textos didácticos de uso en las Universidades de Europa y Estados Unidos.

Pero así como el seguimiento de las líneas de actualidad en creación matemática tiene la gloria de poder actuar en la incorporación de los aspectos innovadores y rupturistas de un Paradigma a una comunidad matemática, también tiene el riesgo de caer en la trampa de una moda *moderna,* pero poco fructífera. Esa es la cruz de la Geometría General de García de Galdeano, quien después de haber presentado un frente de trabajo tan interesante, termina exponiendo como sistema geométrico más reciente el correspondiente a la Geometría del Triángulo. Justo es señalar que en este extremo García de Galdeano se equivocó al elegir la presentación de la *Geometría del Triángulo* en lugar de los desarrollos que a partir del *Programa de Erlangen* de Klein habían realizado Lie, Poincaré y Pasch. Una primera aproximación a este campo la realizaría un año más tarde.

Coincidiendo con el cambio de la Cátedra de Geometría por la de Cálculo Infinitesimal, García de Galdeano quiso poner un estimable

(40) *Ibid.,* p. 10.

punto final a sus trabajos específicos en Geometría. Faltaba en su obra; aunque no la referencia, sí el tratamiento desarrollado del concepto de espacio y de geometría n-dimensional, como colofón y despedida de un área de trabajo en la que su esfuerzo tenía la misma repercusión que predicar en el desierto.

Así en 1896 se despide del Algebra y la Geometría con un folleto titulado *Las modernas generalizaciones expresadas por el Algebra simbólica, las geometrías no euclídeas y el concepto de hiperespacio* en el que, sin concesiones, expone de lleno las relaciones entre álgebra de n unidades complejas de Dedekind y Weierstrass y los espacios multidimensionales. En este trabajo insiste —y ello le da una inequívoca visión moderna— en el salto adelante de la Geometría Algebraica del siglo XX sobre la teoría de grupos de transformaciones, donde el concepto de proyectividad, precisamente, deviene más fructífero.

5. *LA GEOMETRIA EN LOS TRABAJOS DE ANALISIS MATEMATICO*

A partir de 1896 la obra de García de Galdeano es esencialmente analítica. Así en el primer lustro del siglo XX aparece su *Tratado de Análisis Matemático* (41), en el que expone las ideas más importantes de la Matemática de su tiempo. Y aunque, lógicamente, la espina dorsal de la obra está formada por los cálculos diferencial, integral y por la teoría de funciones analíticas, aparecen muchos e importantes conceptos modernos en el terreno de la Geometría que es obligado señalar.

En el volumen segundo de la obra, dedicado al estudio de los *Principios Generales de la Teoría de Funciones,* el quinto y último libro en los que está subdividido lleva por título *Análisis Situs.* Este trabajo es el primer texto español escrito sobre topología.

Comienza con la definición de la superficie de Riemann, cuyo estudio fija en la superficie de dos hojas, para pasar más tarde a la definición de plano múltiple con el estudio completo de los puntos de ramificación y de las líneas de paso o puentes (Brücken). Introducido el tema, y aclarado por medio de algunos ejemplos, inicia otro importan-

(41) El *Tratado de Análisis Matemático* está formado por cinco volúmenes aparecidos en los años 1904 y 1905 en Zaragoza y que llevan los siguientes títulos:
Tomo I (1904), *Cálculo Diferencial.* Tomo II (1904), *Principios generales de la teoría de las funciones.* Tomo III (1904), *Aplicación del cálculo diferencial al estudio de las figuras planas.* Tomo IV (1905), *Cálculo integral.* Tomo V (1905), *Aplicación del cálculo diferencial al estudio de las figuras en el espacio.*

tísimo capítulo de la Matemática del siglo XX, bajo el título de *Principios relativos del orden de conexión*, en el que expresa que

> «un área es conexa (zusammenhängend) cuando se puede pasar de un punto cualquiera del área a otro punto según un camino continuo sin encontrar el contorno del área» (42).

El desarrollo de esta teoría es muy claro y en él se van perfilando, ilustrados siempre con ejemplos, los conceptos de sección transversa (Querschnitt), sección reenbrante, superficie simplemente conexa, n-nplemente conexa, que toda línea cerrada trazada en una superficie simplemente conexa pueda reducirse a un punto por deformación continua, orden y género de una superficie conexa, etc.

Las fuentes fundamentales utilizadas para el desarrollo de este capítulo son textos de Picard, Hoüel, Pascal y Poincaré.

El Capítulo II de este quinto libro del volumen segundo del tratado de Análisis está dedicado al estudio de las variedades o espacios. Es curioso contrastar la relativa cautela que García de Galdeano muestra al moverse en esta teoría, incluso después de haber escrito ya de las geometrías no euclídeas y de los espacios n-dimensionales (*vid supra*).

Parece como si García de Galdeano se diera cuenta de que al tratar de temas geométricos no concordantes con el grupo dominante en tal rama de la comunidad matemática española, hubiera de tomar ciertas medidas precautorias que recuerdan de alguna manera las posiciones de Bails al tratar del sistema heliocéntrico en los *Principios de Matemáticas* (43). Así dice García de Galdeano:

> «la Geometría o su lenguaje facilita la exposición de ciertas teorías puramente algebraicas; pero no pudiendo extenderse las consideraciones geométricas a más de tres variables, se ha creado una *geometría ficticia*, llamada teoría del hiperespacio o geometría de n dimensiones.»

El que después de sus propias elaboraciones algebraicas y didácticas, García de Galdeano todavía llame *ficticia* a la Geometría sustentada en espacios de más de tres dimensiones revela claramente que García de Galdeano quiere cubrirse del ataque fácil y grosero de los filisteos, máxime cuando trae a colación, como inestimable aliado, al mismísimo Poincaré:

> «La Geometría de n dimensiones tiene un objeto real. Los seres del hiperespacio son susceptibles de definiciones precisas, como los del espacio ordinario; y si no nos los podemos representar, podemos

(42) GARCIA DE GALDEANO (1904), *Principios generales de la teoría de las funciones*, p. 285.
(43) BAILS, B. (1799), *Principios de matemáticas*, 3.ª ed., vol. 3, pp. III-IV.

concebirlos y estudiarlos. La analogía del nuevo lenguaje geométrico puede crear asociaciones de ideas fecundas y sugerir generalizaciones útiles. Las figuras suplen la debilidad de nuestro espíritu, llamando a nuestro sentidos en su auxilio.

El empleo de las figuras tiene ante todo por objeto permitirnos conocer ciertas relaciones entre los objetos de nuestros estudios y estas relaciones, y estas relaciones son aquéllas de las que se ocupa la rama de la Geometría llamada Analysis Situs, que describe la situación relativa de los puntos, de las líneas y de las superficies, sin considerar en absoluto su magnitud» (44).

No obstante, sólo cabe calificar de cautelosa la actitud de García de Galdeano, porque su posición sigue siendo de positivo interés respecto a las especulaciones geométricas rupturistas. Su cautela es justificable en esta ocasión por cuanto se trata de una elaboración no ya de un catedrático de Geometría Analítica (que aunque no perteneciente al grupo de presión dominante en el funcionariado matemático universitario era, por oposición, cuando menos, geómetra) sino de un catedrático de otra disciplina y, por tanto, por definición, no especialista.

Como ya se ha apuntado anteriormente, el tema no era, en España, abierto y claro, por cuanto dos de los matemáticos más influyentes, tanto en la comunidad matemática como hacia los poderes públicos —como eran Echegaray y Torroja— no eran precisamente proclives hacia las posiciones más de vanguardia en Geometría.

Y justo es señalar que el tema de los espacios n-dimensionales no fue claramente admitido desde el principio en la comunidad matemática internacional. Ya en el siglo XVIII, d'Alembert y Lagrange habían utilizado una cuarta dimensión en sus trabajos de Mecánica, si bien desde un punto de vista puramente formal. Y en el siglo XIX, Cauchy y Green, en 1828, como recurso de apoyo a problemas procedentes del Análisis, habían utilizado n dimensiones e incluso el concepto de espacio de n dimensiones, pero ni unas ni otras generalizaciones habían tenido la más mínima trascendencia de tipo geométrico.

Grassmann, uno de los autores que más influyó en la obra de García de Galdeano, estudió ya la Geometría n-dimensional, en la *Ausdehnunglehre* de 1844, desde un punto de vista absolutamente abstracto y sin referencia física alguna, lo que significó un paso notable para separar el concepto de Geometría, entendida como ciencia del espacio físico, de las creaciones *matemáticas puras*. El primer trabajo sobre Geometría de n dimensiones sin implicaciones filosóficas o prácticas son los «Chapters

---

(44) GARCIA DE GALDEANO (1904), *Principios...*, pp. 302-303.

in the Analytical Geometrie of N-dimensions» publicados en el *Mathematical Journal* de Cambridge por Cayley en 1845. Posteriormente, Riemann trabajó ya decididamente con n variables, lo mismo que Helmholtz, Beltrami, Lipschitz, Darboux y otros.

Sin embargo, el tema no estaba claro para toda la comunidad matemática. Hombres como Kummer y Möbius se habían burlado de la idea de una geometría tetradimensional siquiera.

Por las susceptibilidades que pudieran venir de fuera o de dentro del país, García de Galdeano debió pensar que había que recurrir a alguna irrefutable autoridad y de ahí la cita de Poincaré.

La construcción de este capítulo geométrico parte de las Memorias de Riemann, *Fragment aus der Analysis Situs* y *Ueber die Hipotesen welche der Geometrie zu Grunde liegen,* se completa con una Memoria de Betti y con los trabajos que Poincaré publicó en el *Journal de l'Ecole Polytechnique* y en los *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* cuya nomenclatura y notación adopta. Así, una vez señalados los conceptos básicos y el marco general de la teoría, comienza García de Galdeano a exponer los resultados más importantes entre los que cabe reseñar los relativos al punto, la variedad n-dimensional y el concepto de frontera, ligados a los conceptos de homeomorfismo y de prolongación analítica, que García de Galdeano llama *continuación analítica,* traducción literal de la terminología de Poincaré.

El tomo III del *Tratado de Análisis Matemático* fue dedicado a la *Aplicación del Cálculo Infinitesimal al estudio de las figuras planas.* En la Introducción, García de Galdeano retoma anteriores ideas, ya expuestas en las páginas de *El Progreso Matemático* y en sus trabajos de Geometría. Siguiendo la inevitable inspiración de Chasles en lo referente a las concepciones geométricas, enriquecidas a nivel teórico por ideas de Poincaré y otras originales del propio Galdeano, inicia este volumen con una disgresión sobre el infinito y lo imaginario en Geometría en la que analiza someramente la obra de Desargues, Monge, Carnot, Poncelet, el propio Chasles, Laguerre, Clebsch, Cayley, Plücker, Möbius, von Staudt, Klein, Poincaré, Beltrami, Lie, Riemann, Lobachevsky y otros.

García de Galdeano aprovecha el desarrollo histórico para ir construyendo un cuerpo de definiciones y resultados que apuntan subjetivamente a la pangeometría de Klein y a la construcción axiomática de la Geometría de n dimensiones.

La idea general que preside esta obra, aunque incluida en el párrafo dedicado a Desargues, es una versión libre de criterios de Poincaré. Dice García de Galdeano que la

> «tendencia a hacer entrar en las reglas generales los conceptos singulares... es esencialmente moderna, y se halla en la necesidad de simplificar la ciencia unificándola, y de generalizar proposiciones haciendo entrar en la misma ley hechos, al parecer, distintos» (45).

Esta idea, simplificación-unificación, recoge una inspiración de Poincaré que se truncó a causa de la explosión de nuevas ramas y de los nuevos resultados que se iban consiguiendo. Y si, por una parte, sí parece haberse consagrado el intento de la simplificación —unido a la idea de caminar muy de prisa de lo particular a lo general— no está probado que la unificación, buscada a través de las estructuras abstractas, haya dado los resultados apetecidos de simplificación.

El primer problema que afronta García de Galdeano en su perspectiva histórica es el de la utilización de elementos imaginarios en Geometría. Lo imaginario, al igual que el infinito o los infinitésimos, han desempeñado en la Matemática contemporánea un papel de punto *oscuro* o cuando menos *resbaladizo,* en el desarrollo de los razonamientos, propiciando la tendencia a una precisión más y más rigurosa.

En el lenguaje de García de Galdeano, la geometría se enfoca por sus dos aspectos más espinosos: el infinito y lo imaginario. En esta perspectiva, destaca singularmente la aportación de Monge de considerar todas las *relaciones contingentes* como verdaderas, por lo que los elementos imaginarios quedan en el terreno de lo conceptualmente admisible.

Por la forma de reconstrucción de los procesos históricos, García de Galdeano es plenamente hilbertiano y por lo tanto moderno. Participa enteramente de la idea de que «la Historia enseña la continuidad en el desarrollo de la Ciencia» y, por ello, va escalonando los conocimientos sin rupturas aparentes. Esto, que históricamente es incorrecto, a nivel expositivo es eficaz, porque imbuido García de Galdeano en las tesis convencionalistas de la *economía del esfuerzo* y de sus planteamientos ayuda a ir realizando sus planteamientos de una forma subjetiva y consciente con vistas al fin por él perseguido. En este proceso ascendente, consciente con vistas al fin por él perseguido. En este proceso ascente, sobre la infraestructura conceptual de Monge, perfila las tesis de Carnot y, sobre todo, de Poncelet, sobre la utilización *práctica* de elementos *ideales* y las relaciones contingentes llevadas al infinito, una de las posiciones más rupturistas de Poncelet respecto a las matemáticas lagrangianas. García de Galdeano señala que las expresiones *infinitamente grande* o *infinitamente pequeño,* profusamente utilizadas en el

(45) GARCIA DE GALDEANO (1904), *Aplicación del cálculo...*, p. III.

Paradigma lagrangiano son solamente *palabras* que sirven «para expresar diversos modos de existencia» (46) y solamente pueden entenderse como una primera aproximación al rigor. Y con esto se quiere subrayar la confluencia de *reflexiones de retorno* sobre aspectos concretos de las costrucciones matemáticas. Esto es, la creación de la geometría del siglo XIX es producto de la reflexión crítica sobre la geometría del Paradigma Lagrangiano, constratada con elementos directamente procedentes del Paradigma Griego. Esta *reflexión en retorno* tiene en el siglo XIX tres protagonistas de excepción: Chasles, Riemann y Hilbert.

García de Galdeano llama a Chasles «creador de la Geometría Superior» enfatizando el título de una de sus obras y señala la vuelta del matemático francés hacia las fuentes euclídeas, a través de los escritos de Pappus sobre los Porismas.

La aportación de Chasles al problema de *lo imaginario* condujo a una Geometría de futuro, pero de connotaciones cuasimetafísicas. En efecto, la introducción por Chasles, en el cuerpo de doctrina de la Geometría de Poncelet, de las series homográficas, se vio relativamente pronto enriquecida por las Notas de Laguerre (47) y por los complementos de Clebsch y Cayley, quien, en su intento de construcción de una Geometría Métrica Proyectiva con referencia a una figura fundamental, definió «lo absoluto». En el desarrollo de Cayley aparece una idea muy sugestiva, ya que las propiedades métricas de los objetos geométricos no surgen del estudio en sí de estos entes sino de una relación dialéctica —aunque unilateral— con otro objeto fijo y determinado, lo absoluto, que en la geometría unidimensional es un par de puntos, en la geometría plana, una cónica y, en la tridimensional, una cuádrica. En esta reflexión, García de Galdeano subraya la presencia de un punto de ruptura con el Paradigma Lagrangiano en el que el estudio de las relaciones de las figuras es intrínseco. Por otra parte, esta dirección conecta la geometría métrica con la descriptiva, profundizando las vías abiertas por Monge y von Staudt. Es natural, pues, que este enfoque cautivara particularmente a García de Galdeano, tan proclive a las tesis de relación entre unas ideas matemáticas y otras.

Para Cayley los elementos imaginarios apenas si tienen distinción operativa en el conjunto de la teoría. Las rectas isótropas, introducidas por Poncelet en el *Traité des propietés projectives des figures* de 1822, los puntos umbílicos, rayos y tangentes imaginarias, se manipulan ya con

(46) *Ibid.*, p. V.

(47) LAGUERRE, E. (1853), Notes sur la théorie des foyers, *Nouvelles Annales des Mathématiques*, *12*, 57-65.

toda normalidad, al igual que los elementos impropios introducidos por von Staudt.

Sobre las ideas de Cayley, construyó Klein su modelo pangeométrico, que abrazaba globalmente los presupuestos básicos de las tres geometrías fundamentales con las que se trabajaba hasta entonces: la hiperbólica, la elíptica y la euclídea. García de Galdeano, buen lector de los escritos matemáticos, sustituye sus disgresiones sobre la veracidad de las tres geometrías por la tesis poincareana de la comodidad.

La aproximación al sentido matemático de lo imaginario, pasando por la analogía de lo real no visualizable, es modélicamente hilbertiana. Así, a partir de las construcciones de Helmholtz, Beltrami, Lie y del propio Klein sobre los grupos de transformaciones y la teoría de la medida, desemboca García de Galdeano en la definición axiomática de la Geometría de n dimensiones, concretada explícitamente en la de cuatro.

Aunque la renovación geométrica es evidente llama negativamente la atención la ausencia de referencias a los *Grundlagen* de Hilbert. Como es seguro el conocimiento del matemático alemán y de su obra por parte de García de Galdeano, cabe interpretar esta omisión como un acto de afiliación tácita a la línea representada por el tamdem Klein-Poincaré que, como es sabido, en esa época asomaban una velada rivalidad con Hilbert.

Tras esta notable introducción, el libro entra de lleno en la razón de su título: *la aplicación del cálculo diferencial al estudio de las figuras planas.* Está dividido este tomo III del Tratado de Análisis en tres libros, además de la introducción ya comentada. El Libro Primero está dedicado al estudio de la geometría diferencia plana; el Segundo, a las singularidades de las curvas planas; y, el Tercero, al estudio sistemático de las figuras.

El Libro Primero es un excelente resumen-compendio de los resultados clásicos relativos a este importante capítulo de la Geometría. Una lectura actual de estas páginas hace echar en falta, además de planteamientos rigurosos en general, la ausencia de notación vectorial (48). No obstante, hay que plantear en descargo de García de Galdeano que la evolución de la Geometría Diferencial en el siglo XIX fue una de las ramas matemáticas más sujetas a la escuela creada por Monge —y, por tanto, más incrustada en el Paradigma Lagrangiano—,

(48) De lo lógico de esta situación puede dar idea el que hasta 1908 en el Congreso de Roma no se hizo la propuesta de unificación de la notación vectorial. El autor de dicha propuesta —que pedía se eligiese una comisión que se encargara de tal cometido— fue Hadamard.

producto de sus asombrosos resultados. La depurada teoría que García de Galdeano ofrece en su texto se debe al completo conocimiento de las fuentes que en su inmensa mayoría fueron francesas, cuyas elaboraciones encontraron en el *Journal des Mathématiques pures et appliqués* de Liouville una inapreciable caja de resonancia que resumió, depuró, comentó, amplió y editó las lecciones de Monge y de sus sucesores en primera y segunda generación sobre la materia.

En el *Journal* de Liouville aparecieron varias tesis con resultados nuevos. Pero poco añadieron a los textos fundamentales de geometría diferencial clásica de Frenet, Serret, Bertrand y otros. Quiere decirse con esto, que el primer libro del tomo del Tratado de Análisis no presenta ninguna aportación relevante en lo que respecta a la importación de conocimientos de ruptura con el Paradigma Lagrangiano.

El Libro Tercero es, sin embargo, innovador. Trata de las propiedades numerativas de las curvas. La Geometría numerativa, como se sabe, estudia el número de objetos que cumplen un número de condiciones simples entre ∞^r objetos. En este contexto se puede abordar el problema de encontrar un número finito de soluciones de un sistema sean cualesquiera el número de singularidades que contenga. Los estudios de geometría numerativa parten de las condiciones de determinación y de los criterios de descomposición de una curva. Como es lógico, la existencia de una singularidad aporta mayor información sobre una curva que la de un punto ordinario, con lo que se establece la concatenación entre las dos líneas de desarrollo de la teoría. La exposición realizada por Galcía de Galdeano, siguiendo las *Lecciones de Geometría* de Clebsch —como el Libro Segundo sobre las singularidades— incorpora los criterios sobre el principio de dualidad y se enraiza con los métodos geométricos plückerianos. El Capítulo III de este libro está dedicado al estudio de las transformaciones cuadráticas y puede calificarse, sin temor a hipérboles, de muy importante. Por él se enlaza a la producción matemática española con la fructífera vía abierta por Cremona y sus discípulos, que hoy tiene el lógico gusto arcaizante, producto de nomenclaturas construidas por traducción literal de conceptos, y que han sido modificadas con el transcurso de los años.

Parte de la definición de transformación proyectiva o afinidad lineal a través del estudio particularizado de las transformaciones cuadráticas, para pasar en seguida al tema de la transformación racional, en cuyo desarrollo llega hasta el importante *Teorema de Nöther,* que plantea así:

> «Por medio de transformaciones cuadráticas birracionales se puede siempre transformar una curva algébrica cualquiera en otra que sólo tenga puntos múltiples con tangentes separadas»

y que demuestra.

Con estos resultados, desarrolla la teoría de la polaridad e invariación tomando como base el principio de transformación enunciado por Clebsch y que aprovecha para insistir en el tema de la conexión iniciado en el tomo dedicado al estudio de la Teoría de Funciones. El enlace siguiente a partir de la vía abierta por el estudio teórico de las transformaciones lo realiza con los trabajos de Lie sobre la transformación de contacto para aplicar después los resultados de la teoría de grupos de transformaciones y abrir una nueva perspectiva en la dirección de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden.

El quinto y último tomo del Tratado de Análisis fue publicado en 1905 y está dedicado al estudio de las figuras en el espacio. Está subdividido en cuatro libros. El Primero es un estudio de curvas en superficies; el Segundo, de las aplicaciones de las integrales definidas; el Tercero, de las superficies en forma paramétrica; y, el Cuarto, desarrolla uno de los temas preferidos por García de Galdeano, los sistemas geométricos.

El Libro Primero es un excelente tratado clásico del estudio de curvas en superficies. El texto es claro, los resultados necesarios y, salvo, como se ha indicado en el estudio del tercer tomo, problemas de notación y de presentación, su estructura es similar a la de los textos que se han venido utilizando en las Facultades de Matemáticas en España hasta fechas muy recientes.

Más clásico, aunque también atractivo en el campo de las aplicaciones, es el Libro Segundo dedicado a las cuadraturas, rectificaciones de determinadas curvas (cónicas, folium de Descartes, cardiode, cisoide, etcétera).

Una de las notables injusticias que se han cometido con García de Galdeano es la de la adscripción de prioridades sobre la importación de determinados temas. Nadie puede negar a Rey Pastor el impacto de su trabajo en el desarrollo de la matemática española actual, pero es errónea la opinión generalizada de asignarle la paternidad de la importación de los conceptos claves de la representación conforme. Precisamente en el libro dedicado a las líneas alabeadas y superficies de la obra de Galdeano que se comenta, hay un tratamiento suficientemente extenso de este capítulo de las matemáticas creado por Gauss. En su desarrollo (49), después del planteamiento de los resultados básicos, establece el teorema general sobre sistemas isotermos, estudia las

(49) GARCIA DE GALDEANO (1905), *Aplicación del cálculo... a las figuras en el espacio,* pp. 231 y ss.

relaciones entre conjuntos determinados (plano-plano, esfer-plano, esfera-esfera) y va extendiendo la teoría en dominios especiales pero de singular importancia en los problemas con valores en la frontera (semiplano, etc.). Para esta última exposición aprovecha las lecciones sobre la *Teoría de los grupos Fuchsianos* de Poincaré, estudiando la estructura de grupo de una serie indefinida de sustituciones de la forma (z, az + b/cz + d) con ad – bc = 1, siendo a, b, c, d, reales. Y termina el parágrafo con el estudio de las funciones automorfas.

El apartado relativo al estudio de líneas en una superficie está construido sobre el esquema general de la teoría de superficies de Darboux y de la Geometría Diferencial de Bianchi.

También se puede calificar de puesto al día el capítulo que trata de las superficies, construido sobre las ya mencionadas obras de Darboux y Bianchi, aunque se deja ver la influencia de Lamé y Beltrami. El Libro Cuarto, dedicado a los sistemas geométricos, es una ampliación de la Segunda Parte de la Geometría General en la que incorpora algunas de las realizaciones de Lie y Koenings.

Como colofón a las diferentes vías de aproximación a los estudios geométricos dice García de Galdeano:

> «Examinada la Geometría desde el punto de vista de la variación continua, queda subordinada a la teoría general de los grupos, cuyo más amplio estudio se ha hecho en las obras de Lie» (50).

Y termina refiriéndose a la estructura de grupo de los movimientos del espacio euclídeo en lo que vuelve a enfatizar la importancia de los trabajos de Lie y Reye como vías de profundización de los estudios geométricos.

6. *CONCLUSIÓN*

En primer lugar, fue Zoel García de Galdeano y Yanguas y no Echegaray ni Torroja ni Vegas, quien contribuyó más decisivamente a la introducción de las ideas modernas de Geometría en España en los años finales del siglo XIX y primeros del XX.

En segundo lugar, sin menoscabar la importancia de las obras de Rey Pastor sobre Geometría anteriores a su primer viaje a la Argentina, hay que reconocer que no todo lo aprendió en Alemania y que muchas de las ideas que se le han atribuido en calidad de pionero importador o difusor ya están en las obras de García de Galdeano.

(50) *Ibid.*, p. 510.

APENDICE

Sumario de *Geometría Elemental* (1882), 1.ª ed.:

Sección Expositiva

Libro I.—Definiciones, divisiones y nociones primitivas.
Libro II.—Principios de la existencia, determinación y sustituciones geométricas.
I.—Existencia y determinación de figuras rectilíneas. II.—Transformaciones de una especie de relaciones en otras. III.—Aplicación de la igualdad y desigualdad triangular al doble paralelismo. IV.—Existencia y determinación de las figuras circulares. V.—Los polígonos en el círculo y en la circunferencia. VI.—Las curvas con relación a las quebradas inscritas y circunscritas. VII.—Posiciones relativas de dos circunferencias.
Libro III.—Aplicación de la teoría de la proporcionalidad de las magnitudes a la Geometría.
I.—Nociones preliminares. II.—Especies particulares de magnitudes. III.—Determinación de las figuras mediante la proporcionalidad de sistemas. IV.—Homotecia y Semejanza. V.—Relaciones métricas entre los elementos rectilíneos de un triángulo. VI.—Relación entre ángulos y lados de un triángulo. VII.—Relaciones métricas de los polígonos semejantes.
Libro IV.—I.—Problemas (rectas, polígonos, líneas proporcionales, etc.). II.—Problemas relativos a polígonos regulares.

Geometría del espacio

Libro I.—Principios de la existencia, determinación y sustituciones geométricas.
I.—Determinación del plano. II.—Existencia y determinación de la recta y el plano. III.—Proyección ortogonal. IV.—Principios de simetría. V.—Determinación de las figuras compuestas de planos. VI.—Determinación de los triedros. VII.—Existencia y determinación de las figuras esféricas.
Libro II.—Aplicación de la teoría de la proporcionalidad de las magnitudes a la Geometría.
I.—Especies particulares de magnitudes proporcionales. II.—Problemas.

Sección Crítica

Libro I.—Metodología geométrica.
I.—Nociones generales. II.—Método analítico o invención. III.—Métodos demostrativos.
Libro II.—Crítica de las verdades geométricas.
I.—Nociones generales. II.—La existencia en Geometría. III.—La determinación en Geometría. IV.—Generación de figuras geométricas. V.—Síntesis geométrica.

Sumario de *Geometría Elemental* (1888), 2.ª ed.:

Parte primera.—Teoría de la igualdad y desigualdad geométricas.
Libro I.—Definiciones, divisiones y nociones primitivas.
Libro II.—Figuras rectilíneas contenidas en un plano.
I.—Existencia y determinación de figuras rectilíneas. II.—Transformaciones de unas especies de relaciones en otras.

Libro III.—Figuras rectilíneas en el espacio.
I.—Existencia y determinación. II.—Correlaciones de la perpendicularidad y el paralelismo.
Libro IV.—Figuras circulares planas.
Libro V.—Superficies de revolución y cuerpos redondos. I.—Existencia y determinación de las figuras esféricas. II.—El plano en la esfera. III.—Las figuras en la superficie esférica.

Parte Segunda.—Teoría de la proporcionalidad geométrica

Libro I.—I.—Nociones preliminares sobre la proporcionalidad y medida de las magnitudes geométricas. II.—Especies de magnitudes proporcionales. III.—Principios y nociones relativos a la proporción y al signo. IV.—Nociones sobre la aplicación del Algebra a la Geometría para expresar las relaciones de posición. V.—Centros de las distancias proporcionales y de gravedad. VI.—Divisiones de la geometría: 1) Los sistemas geométricos, euclidiano y no euclidiano; 2) los métodos de desenvolvimiento y exposición de la Geometría; 3) nociones y principios correspondientes a cada rama geométrica.
Libro II.—Figuras rectilíneas contenidas en un plano.
I.—Relaciones métricas. II.—Relaciones de posición. 1.—Teoría de las transversales. 2.—Relación anarmónica. 3.—Relación armónica. 4.—Divisiones homográficas y haces homográficos. 5.—Ecuaciones de la recta y el punto. Punto y rectas imaginarias. 6.—Los lemas de Pappus correspondientes a la relación anarmónica y las divisiones homográficas. 8.—Involución. 9.—Involución en el triángulo y en el cuadrilátero. 10.—Porismas que se hayan incluidos en la teoría de la involución. 11.—Sistemas de puntos situados en línea recta y de rectas concurrentes en puntos. 12.—Figuras homológicas, homográficas y correlativas.
Libro III.—Figuras rectilíneas en el círculo.
I.—Relaciones métricas. II.—Relaciones de posición.
Libro IV.—Las figuras rectilíneas en el espacio.
I.—Propiedades proyectivas en el espacio. II.—Figuras homológicas, homográficas y correlativas.
Libro V.—La esfera y las figuras en la esfera.
I.—Relaciones métricas. II.—Relaciones de posición.

Sumario de *Geometría General*, vol. 1 (1892) (1): Teoremas, problemas y métodos geométricos

(1) Los números entre paréntesis corresponden a las páginas del texto original.

III.2.—El cálculo baricéntrico de Moebius [101]. III.3.—El método de la relación anarmónica de Chasles [104]. IV.—Los métodos analítico-geométricos [116]. IV.1.—Generalidades [116]. IV.2.—Métodos analítico geométricos anteriores a los de las equipolencias y cuaternios [120]. IV.3.—Las equipolencias [126]. IV.4.—El tratado de la Extensión (Ausdehnunglehre) de Grassman [138]. IV.5.—Los cuaternios [159].

Sumario de *Geometría General* vol. 2 (1895): Sistematización de la Geometría

Capítulo I. I.1.—Preliminares sobre los sistemas geométricos [3]. Primeras proposiciones de los Elementos de Euclides [8]. I.3.—Nociones de la Geometría no euclídea [17]. I.4.—Resumen General [29]. Capítulo II.—La sistematización de la Geometría Elemental [38]. II.1.—Nociones generales [38]. II.2.—El plano y la recta [42]. II.3.—Determinación del triángulo [43]. II.4.—Semejanza, simetría y relaciones métricas [46]. II.5.—Correspondencia entre el número y la extensión. Expresión de las relaciones y propiedades de las figuras bajo la forma de las leyes numéricas. II.6.—La circunferencia respecto al triángulo [63]. II.7.—Relaciones de desigualdad [65]. II.8.—Máximos y mínimos [67]. II.9.—Circuncentro, centroide, incentro y ortocentro [72]. Capítulo III.—Figuras adjuntas al triángulo [77]. Capítulo IV.—Resumen acerca de las cónicas [82]. Capítulo V.—Lugares geométricos [100]. Capítulo VI.—Teoremas y Problemas [109]. Capítulo VII.—Nociones de la Geometría reciente [132]. Capítulo VIII.—Sistemas de círculos y de cónicas [147].