DEFORMACIONES DE GERMENES ANALITICOS EQUIVARIANTES

por

JOSÉ FERRER LLOP
FERNANDO PUERTA SALES

ABSTRACT.

In this paper, we first study the infinitessimal and versal deformations of C^*-equivariant analytic germs. Secondly, for the germ of the n coordinate axes in C^n, we obtain an explicit description of the semiuniversal deformation.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo puede dividirse en dos partes. En la primera (apartados 1 a 4) se estudian las deformaciones infinitesimales y versales de los gérmenes de espacios analíticos equivariantes respecto a una C^*-acción dada. En la segunda (apartado 5) se obtiene una descripción completa de la deformación semiuniversal del germen en el origen de los n ejes coordenados de C^n.

La primera de las partes señaladas se inspira esencialmente en el estudio de Pinkham para el caso formal ([10] y [11]). Tras un primer apartado de generalidades, los apartados 2 y 3 contienen una formalización de las "graduaciones topológicas", estructuras que aparecen de un modo natural en el estudio de los gérmenes equivariantes. Su tratamiento general conduce a una simplificación y unificación de enunciados y demostraciones, y permite, además, su aplicación a situaciones análogas ([12]).

En el apartado 4 se abordan ya las deformaciones de gérmenes C^*- equivariantes. En primer lugar (4.2.4) se caracterizan las deformaciones infinitesimales como las que pueden expresarse como series secuencialmente convergentes de deformaciones infinitesimales equivariantes, no siendo necesarias hipótesis restrictivas sobre la C^*-acción ni sobre la dimensión de $T^1(X,0)$. Finalmente (4.3.8) se obtiene la equivariancia de la deformación semiuniversal para gérmenes equivariantes de graduación negativa (o positiva) respecto de una buena C^*-acción de C^n. Recientemente uno de los autores ha probado ([12]) un resultado general en este sentido, sin restricciones respecto de la graduación ni la C^*-acción considerada.

En la segunda parte se obtiene (5.3.3) una descripción explícita de la deformación semiuniversal del germen en el origen de los n ejes coordenados de C^n, $(X_n, 0)$, determinándose previamente (5.2.5) una base de T^1 $(X_n, 0)$ formada por las *traslaciones* de cada eje a lo largo de los otros. Estos resultados habían sido comunicados en las JHLM de Santander (1979) y Sant Feliu de Guixols (1980).

Señalemos que una descripción similar a ésta sólo era conocida para $n \leqslant 4$. El caso $n = 2$ es trivial por tratarse de una hipersuperficie. Para $n = 3$ se trata de un germen de Cohen-Macaulay de codimensión 2, con lo que la base de la deformación semiuniversal también es lisa ([13]; para una descripción completa de la deformación semiuniversal, ver [8]). No ocurre así para $n = 4$ (ni superiores) en que la base resulta ser el cono sobre la imagen de $P^1 \times P^3$ en P^7 por el morfismo de Segre (7 y 9). Los únicos resultados generales al respecto que conocemos son los recientes de [1].

Agradecemos a Vicente Navarro sus numerosas sugerencias y su constante estímulo.

1. DEFORMACIONES DE GÉRMENES ANALÍTICOS

Presentamos en este apartado las definiciones y resultados sobre deformaciones de gérmenes analíticos que vamos a utilizar en lo que sigue. Véase al respecto [3], [9], [14].

1.1 *Notaciones*

Sean $x_1, \ldots, x_n$ las funciones coordenadas de C^n. Designaremos por $\mathcal{O}_n$ (respect. $\mathcal{F}_n$) el álgebra de las series complejas de potencias convergentes (respec. formales) en dichas variables, esto es:

$$\mathcal{O}_n \doteq C\{x_1, \ldots, x_n\} \equiv C\{x\}$$

$$\mathcal{F}_n \equiv C[[x_1, \ldots, x_n]] \doteq C[[x]]$$

Análogamente, si $t = (t_1, \ldots, t_s)$, $\mathcal{O}_n\{t\}$ (respec. $\mathcal{O}_n[[t]]$) designarán el álgebra de las series de potencias convergentes (respec. formales) en $t_1, \ldots, t_s$ con coeficientes en $\mathcal{O}_n$.

Sea I un ideal de $\mathcal{O}_n$, y (X, 0) el germen de espacio analítico que define. Sea $\mathcal{O}_{X,0} = \mathcal{O}_{n/I}$.

1.2 *Deformaciones analíticas*

1.2.1. Una *deformación* analítica de (X, 0), de *base* B y *espacio total* A, es un cuadrado cartesiano

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,0} & \longleftarrow & A = \mathcal{O}_n \{t\} / J \\ \uparrow & & \uparrow \pi \\ C & \longleftarrow & B = C\{t\} / I \end{array}$$

donde π es un morfismo plano. Abreviadamente la designaremos por $\pi: B \to A$, e incluso A, sino hay lugar a confusión.

Dos deformaciones A y A' de (X,0), de base B, se dicen *isomorfas* si existe un isomorfismo de A en A' sobre B, que induce la indentidad sobre $\mathcal{O}_{X,0}$. . . . . .

1.2.2 Las deformaciones de base $C\{\epsilon\}/[\epsilon^2]$ se llaman *deformaciones infinitesimales (de primer orden).* Si $I = [f_1, \ldots, f_p]$, puede tomarse $J = [\epsilon^2, f_1 + \epsilon b_1, \ldots, f_p + \epsilon b_p]$.

Es sabido que las clases de isomorfismo de las deformaciones infinitesimales de primer orden del germen (X,0) forman un espacio vectorial, que designaremos por $T^1(X,0)$.

1.2.3 *Proposición.*

1) Si (X,0) presenta una singularidad aislada, $T^1(X,0)$ es de dimensión finita.
2) Si (X,0) es regular, es $T^1(X,0) = 0$.

1.2.4. Dada una deformación $\pi: B \to A$ y un morfismo $\varphi: B \to B'$, llamaremos *deformación inducida* por φ a la

$$\varphi_*(\pi): B' \longrightarrow B' \otimes_B A$$

Si m es el ideal maximal de B, se define un morfismo

$$D\pi\colon (m/m^2)^* \longrightarrow T^1\,(X,0)$$

haciendo corresponder a cada $\omega \epsilon\, (m/m^2)^*$ la clase de isomorfismo de la deformación infinitesimal inducida a través de

$$\begin{array}{ccc} B = C \oplus m & \longrightarrow & C\,\{\epsilon\}\,/\,[\epsilon^2] \\ \Downarrow & & \\ \lambda + u & & \lambda + \omega(\tilde{u})\,\epsilon \end{array}$$

Una deformación $\pi\colon B \to A$ de (X,0) diremos que es *versal* si cualquier deformación de (X,0) es inducida por ella, esto es, si para toda deformación $\pi'\colon B' \to A'$ de (X,0), existe un morfismo $\varphi\colon B \to B'$ tal que la deformación inducida $\phi_*(\pi)$ sea isomorfa a la $\pi'\colon B' \to A'$. Con ello $D\pi$ es exhaustiva. Diremos que es *semiuniversal* si además $D\pi$ es biyectiva.

1.2.5 Teorema [3,5]: Si T^1 (X,0) es de dimensión finita, existe deformación semiuniversal de (X,0).

1.3 *Deformaciones formales*

Mantenemos las notaciones de 1.1.

1.3.1 Una *deformación formal* de (X,0) de base B y espacio total $\tilde{A}$, es un cuadrado cartesiano

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,0} & \longleftarrow & \tilde{A} = \mathcal{O}_n[[t]]/J \\ \uparrow & & \uparrow \pi \\ C & \longleftarrow & \hat{B} = C[[t]]/I \end{array}$$

donde π es un morfismo plano.

1.3.2 De forma análoga a 1.2 se definen deformaciones formales isomorfas, inducidas, formalmente versales y formalmente semiuniversales. Obviamente, no cabe la distinción para las deformaciones infinitesimales.

1.3.3 Una deformación formal $\pi : \hat{B} \to \tilde{A}$ de X diremos que es formalmente *quasi-universal* si es formalmente versal, y además todo diagrama cartesiano de la forma

$$\begin{tikzcd}
\tilde{A}' \arrow[drr] & & & & \tilde{A} \arrow[llll, dashed] \arrow[dll] \\
& & \tilde{A}'' \arrow[dr] & & \\
& & & 0 & \\
\hat{B}' \arrow[uuu] \arrow[drr] & & & & \hat{B} \arrow[uuu, "\pi"'] \arrow[llll, dashed] \arrow[dll] \\
& & \hat{B}'' \arrow[uuu] \arrow[dr] & & \\
& & & 0 &
\end{tikzcd}$$

(donde $\hat{B}'$ $\tilde{A}'$, $\hat{B}''$ $\tilde{A}''$ son deformaciones formales de (X,0)) se completa por las flechas punteadas en un diagrama cartesiano.

Ello implica que la deformación en cuestión es formalmente semiuniversal.

1.3.4 Teorema [15]: Si T^1 (X,0) es de dimensión finita, existe una deformación formal de (X,0) que es formalmente quasi-universal.

2. GRADUACIONES TOPOLOGICAS

2.1. *Algebras topológicamente graduadas*

2.1.1 Una $\mathbb{C}$-álgebra topológica separada A, junto con una familia $(A^{(k)})_{k \in Z}$ de subespacios vectoriales, y una familia de proyectores continuos $\pi_k : A \to A^{(k)}$ tales que:

a) $C \subset A^{(0)}$; $A^{(h)} A^{(k)} \subset A^{(h+k)}$, para todo $h, k \in Z$.

b) Los subespacios $A^{(k)}$ forman suma directa.

c) $\pi_k \circ \pi_h = 0$, si $k \neq h$.

d) Para todo $a \in A$, se verifica

$$a = \sum_k \pi_k(a) = \lim_h \Big(\sum_{|k| < h} \pi_k(a) \Big)$$

diremos que es una *álgebra topológicamente graduada* por dichas familias.

Los elementos no nulos de $A^{(k)}$ los llamaremos quasi-homogéneos, o abreviadamente *q-homogéneos*, de *grado* k; en general, si $a \in A$, diremos que $\pi_k(a)$ es su *componente q-homogénea* de grado k (o su k-ésima componente q-homogénea), y la notaremos $a^{(k)}$.

2.1.2 Así, $\mathcal{O}_n$ y $\mathcal{F}_n$, con la topología m-ádica y la graduación isótropa habitual, son álgebras topológicamente graduadas.

2.2 *Módulos topológicamente graduados*

2.2.1 Sea A una álgebra topológicamente graduada. Un A-módulo topológico separado M, junto con una familia $(M^{(k)})_{k \in Z}$ de subespacios vectoriales, y una familia de proyectores continuos π_k: $M \to M^{(k)}$ tales que:

a) $A^{(k)} M^{(h)} \subset M^{(k+h)}$ (para todo $h, k \in Z$)

b) Los subespacios $M^{(k)}$ forman suma directa

c) $\pi_k \circ \pi_h = 0$, si $k \neq h$

d) Para todo $u \in M$, se verifica

$$u = \sum_k \pi_k(u) \equiv \lim_h \Big(\sum_{|k| < h} \pi_k(u) \Big).$$

diremos que es un *A-módulo topológicamente graduado* por dichas familias.

Como antes, los elementos no nulos de $M^{(k)}$ los llamaremos *q-homogéneos*, de *grado* k; y $\pi_k(u)$ será la k-ésima componente *q-homogénea*, que notaremos $u^{(k)}$.

2.2.2 Algunas propiedades elementales se recogen en la siguiente:

Proposición: Sea M un A-módulo topológicamente graduado. Para todo $a \in A$, $u \in M$, se verifica:

a) Si $u \in M^{(k)}$, es $u = u^{(k)}$

b) Si $u = \sum_k u_k$, con $u_k \in M^{(k)}$, es $u_k = u^{(k)}$

c) $\pi_k(au) = \sum_h a^{(k-h)} u^{(h)}$.

2.2.3 Los A-módulos topológicamente graduados de mayor interés para lo que sigue son los de tipo finito, y en particular los libres. Para cada p-pla entera $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ consideremos el A-módulo $M = A^p$, con las familias

$$M^{(k)} = A^{(k+\beta_1)} \times \ldots \times A^{(k+\beta_p)} \qquad (k \in Z)$$

$$\pi_k = \pi_{k+\beta_1} \times \ldots \times \pi_{k+\beta_p} \qquad (k \in Z)$$

Es inmediato comprobar que se trata de un A-módulo topológicamente graduado, que notaremos $A^p_{(\beta)}$. Con ello $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in A^{p(k)}_{(\beta)}$ sí y sólo si $\theta_i \in A^{(k+\beta_i)}$ $(i = 1, \ldots, p)$; y en general $\theta^{(k)} = (\theta_1^{(k+\beta_1)}, \ldots, \theta_p^{(k+\beta_p)})$.

2.3 *Submódulos e ideales equivariantes*

Sea A una álgebra topológicamente graduada. Dados M un A-módulo topológicamente graduado por $(M^{(k)}, \pi_k)_{k\in Z}$, y $N \subset M$ un A-submódulo, consideremos, para cada $k \in Z$, $N^{(k)} = N \cap M^{(k)}$ y las restricciones de π_k a N (que seguiremos notando π_k). En general, N con dichas familias no es un A-módulo topológicamente graduado. Es inmediato observar que una condición necesaria y suficiente para que lo sea es que $\pi_k(N) \subset N$, o equivalentemente $\pi_k(N) = N^{(k)}$, para todo $k \in Z$.

2.3.1 Si esta condición se verifica, diremos que N es un *submódulo equivariante* de M. Si M = A, diremos que N es un ideal *equivariante de A*.

2.3.2 Así, son equivariantes los submódulos engendrados por elementos q-homogéneos de M. (En efecto, basta tener en cuenta que si $u_i \in M^{(k_i)}$ $(i \in I)$, es $\pi_k(\sum_i a_i u_i) = \sum_i a^{(k-k_i)} u_i$). Para las álgebras que consideraremos se verifica el recíproco:

Proposición: Sea A una álgebra topológicamente graduada, local notheriana, y designemos por m su ideal maximal. Sea M un A-módulo topológicamente graduado de tipo finito, y $N \subset M$ un A-submódulo. Designemos por Ω el conjunto de las componentes q-homogéneas de los elementos de N. Si se verifica

$$N \subset A\Omega + m^l M \qquad \text{(para todo l natural)}$$

entonces son equivalentes:

a) N es equivariante.

b) N es engendrado por un número finito de elementos q-homogéneos.

Demostración: Por ser $A\Omega$ m-cerrado es

$$A\Omega = \bigcap_{l=1}^{\infty} (A\Omega + m^l M).$$

La hipótesis da, pues, $N \subset A\Omega$. Por otra parte, si N es equivariante, es $A\Omega \subset N$. con ello $A\Omega = N$. Finalmente basta aplicar la noetherianidad de M.

2.3.3 *Proposición:* Sea M un A-módulo topológicamente graduado por $(M^{(k)}, \pi_k)_{k\in Z}$, y $N \subset M$ un submódulo equivariante cerrado. Entonces M/N con la topología cociente y las familias

$$(M/N)^{(k)} = \pi(M^{(k)})$$
$$\bar{\pi}_k(\tilde{u}) = \widetilde{\pi_k(u)}, \quad u \in M$$

donde $\pi: M \to M/N$ es la proyección canónica, es un A-módulo topológicamente graduado. Con ello obsérvese que $\tilde{u}$ es q-homogéneo de grado k si y sólo si $\tilde{u} = \widetilde{u^{(k)}}$.

Demostración: Trivialmente, M/N es un módulo topológico separado.

La definición de $\bar{\pi}_k$ es correcta ya que si $\tilde{u} = \tilde{v}$ es $u - v \in N$, con lo que $\pi_k(u - v) \in N$, luego $\widetilde{\pi_k(u)} = \widetilde{\pi_k(v)}$.

Tampoco ofrece dificultad la comprobación de las demás condiciones de la definición. Así, la familia de submódulos forman suma directa puesto que si $\tilde{u}_{k_1} + \ldots + \tilde{u}_{k_r} = 0$, sería $u_{k_1} + \ldots + u_{k_r} \in N$, con lo que $u_{k_1}, \ldots, u_{k_r} \in N$, luego $\tilde{u}_{k_1} = \ldots = \tilde{u}_{k_r} = 0$. Para la última obsérvese que $\tilde{u} = \widetilde{\sum_k u^{(k)}} = \sum_k \widetilde{u^{(k)}}$.

2.3.4 *Corolario:* Sea A una álgebra topológicamente graduada por $(A^{(k)}, \pi_k)_{k\in Z}$, y $I \subset A$ un ideal equivariante cerrado. Entonces A/I con la topología cociente y las familias

$$(A/I)^{(k)} = \pi(A^{(k)})$$
$$\bar{\pi}_k(\tilde{a}) = \widetilde{\pi_k(a)}, \quad a \in A$$

donde $\pi: A \to A/I$ es la proyección canónica, es una álgebra topológicamente graduada. Como en 2.3.3, $\tilde{a}$ es q-homogéneo de grado k si y sólo si $\tilde{a} = \widetilde{a^{(k)}}$.

2.4 *Morfismos equivariantes*

2.4.1 Se A una álgebra topológicamente graduada, y sean N y M A-módulos topológicamente graduados por $(N^{(k)}, \pi'_k)_{k \in Z}$ y $(M^{(k)}, \pi_k)_{k \in Z}$ respectivamente. Un morfismo continuo de A-módulos ϕ: $N \to M$ diremos que es un *morfismo equivariante* si verifica las siguientes condiciones equivalentes:

a) $\phi (N^{(k)}) \subset M^{(k)}$, para todo $k \in Z$.

b) ϕ conmuta con los proyectores, esto es: $\pi_k \cdot \phi = \varphi \cdot \pi'_k$, para todo $k \in Z$.

Análogamente definimos morfismos equivariantes entre álgebras topológicamente graduadas.

Comprobemos la equivalencia de las dos condiciones dadas. Si suponemos la primera, para todo $u \in N$ y $k \in Z$, es $\phi (u^{(k)}) \in M^{(k)}$, con lo que de $\varphi (u) = \varphi (\sum_k u^{(k)}) = \sum_k \phi (u^{(k)})$ y de 2.2.2 se sigue la segunda. Recíprocamente, si suponemos la segunda y $u \in N^{(k)}$, es $\varphi (u) = (\phi \cdot \pi'_k) (u) = (\pi_k \cdot \varphi) (u) \in M^{(k)}$.

2.4.2 Es también una comprobación directa que: En las condiciones anteriores, si $M' \subset M$ (respec. $N' \subset N$) es un A-submódulo equivariante, entonces $\varphi^{-1} (M')$ (respec. $\varphi (N')$) es un A-submódulo equivariante.

En particular, Nuc φ e Im φ son submódulos equivariantes de N y M respectivamente.

2.4.3 Para módulos libres finito generados (ver 2.2.3), se tiene la siguiente caracterización de los morfismos equivariantes:

Proposición: Un morfismo de A-módulos $\varphi : A^p_{(\beta)} \to A^m_{(\delta)}$ es equivariante si y solo las columnas de su matriz en las bases naturales son elementos q-homogéneos de $A^m_{(\delta)}$, de grados $\beta_1, \ldots, \beta_p$ respectivamente.

Demostración: Es inmediato que tales matrices definen morfismos equivariantes. Recíprocamente, la columna j-ésima $(1 \leqslant j \leqslant p)$ de la matriz es $\phi (0, \ldots, 0, \overset{j}{1}, 0, \ldots, 0)$ que, por definición de morfismo equivariante, pertece a $A^{m(-\beta_j)}_{(\delta)}$.

2.4.4 Notemos que en la matriz referida en la proposición anterior, el elemento de la columna j-ésima y fila i-ésima es q-homogéneo de grado $\delta_i - \beta_j$ en A.

3. GRADUACIONES TOPOLÓGICAS INDUCIDAS POR UNA C^* ACCIÓN DE C^n

3.1. Una *C^*-acción* de C^n es una operación continua del grupo multiplicativo $C^* \equiv C - \{0\}$ en C^n. Se prueba [2] que, con un cambio analítico de coordenadas adecuado, resulta de la forma

$$(\lambda, x) = (\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) \to \lambda \cdot x = (\lambda^{q_1} x_1, \ldots, \lambda^{q_n} x_n)$$

donde $q_1, \ldots, q_n$ son enteros llamados *pesos* de la C^*-acción.

En lo que sigue supondremos fijada una C^*-acción de C^n, de pesos $q_1, \ldots, q_n$ *no todos nulos*. Notaremos $q = (q_1, \ldots, q_n)$.

3.2 El objetivo de este apartado es estudiar la estructura de álgebra topológicamente graduada que esta C^*-acción induce en las álgebras de series complejas de potencias (formales o convergentes) en las variables $x_1, \ldots, x_n$, así como en sus cocientes por ideales equivariantes. Además de la topología m-ádica común a todas ellas, para las de series convergentes consideraremos también la secuencial, caso éste de especial interés para lo que sigue.

Notaremos $\Sigma\, a_\alpha x^\alpha$ una serie de potencias, con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$. También notaremos $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $q \cdot \alpha = q_1\, \alpha_1 + \ldots + q_n\, \alpha_n$.

3.3 Las demostraciones de 3.3.1 y 3.3.2 son análogas para cada una de las álgebras que acabamos de referir. Es por ello que sólo las detallamos para las de series convergentes con la topología secuencial, lo que constituye los dos próximos apartados.

3.3.1 *Proposición:* Sea A un álgebra de las referidas en 3.2. Dada una C^*-acción de C^n, de pesos $q_1, \ldots, q_n$ no todos nulos, por dualidad se tiene una operación de C^* en A. Esto es, para cada $\lambda \in C^*$, la aplicación definida por

$$a = \widetilde{\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha} \to \lambda \cdot a \equiv \widetilde{\sum_\alpha a_\alpha \lambda^{q \cdot \alpha} x^\alpha}, \quad a \in A$$

es un endomorfismo continuo del álgebra A.

Demostración: Ver 3.5.

3.3.2 *Proposición:* En las condiciones de la proposición anterior, para cada $k \in Z$, designemos por $A^{(k)}$ el correspondiente subespacio propio respecto a esta operación de C^* en A, esto es

$$A^{(k)} = \{ a \in A : \lambda \cdot a = \lambda^k a, \text{ para todo } \lambda \in C^* \} = \{ \widetilde{\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha} \in A : q \cdot \alpha = k, \text{ si } a_\alpha \neq 0 \}$$

y por π_k el morfimso de A en $A^{(k)}$ definido por

$$\pi_k(\widetilde{\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha}) = \widetilde{\sum_{q \cdot \alpha = k} a_\alpha x^\alpha}$$

Entonces, A es un álgebra topológicamente graduada por $(A^{(k)}, \pi_k)_{k \in Z}$. Diremos que esta *graduación topológica es indicuda por la C^*-acción* de C^n considerada.

En el caso de las álgebras cocientes, esta graduación topológica coincide con la defnida por 2.3.4.

Demostración: Ver 3.5.

3.3.3 Con ello, para todo $\lambda \in C^*$, $a \in A$ es:

$$\lambda \cdot a = \sum_k \lambda^k a^{(k)}$$

3.3.4 Supongamos ahora A y A' dos de tales álgebras y sea $\phi : A \to A'$ un morfismo continuo. Supongamos φ equivariante. Si $\phi(a) = b$, será $\phi(a^{(k)}) = b^{(k)}$, para todo $k \in Z$. Con ello, si $\lambda \in C^*$: $\varphi(\lambda \cdot a) = \phi(\sum_k \lambda^k a^{(k)}) = \sum_k \lambda^k b^{(k)} = \lambda \cdot b$. Recíprocamente, supongamos $\varphi(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot \phi(a)$, para todo $\lambda \in C^*$, $a \in A$. Entonces si a_k es q-homogéneo de grado k, tambien lo es $\varphi(a_k)$ puesto que: $\lambda \cdot \varphi(a_k) = \phi(\lambda \cdot a_k) = \varphi(\lambda^k a_k) = \lambda^k \varphi(a_k)$. En definitiva hemos demostrado:

ϕ equivariante si y sólo si $\varphi(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot \varphi(a)$, para todo $\lambda \in C^*$, $a \in A$.

3.3.5 Señalemos por otra parte que estas álgebras verifican las hipótesis de 2.3.2. En efecto, ello se sigue de

$$|q \cdot \alpha| \leqslant |\alpha| \cdot \sup \{ |q_1|, \ldots, |q_n| \}$$

teniendo en cuenta que no todos los pesos $q_1, \ldots, q_n$ son nulos.

3.3.6 *Observacion:* En general no hay acotación entre $|\alpha|$ y $\alpha \cdot q$ en el sentido contrario al señalado. Así, para $n = 2$ y $q = (1, -1)$, es $x^r y^r \in \mathcal{O}_2^{(0)}$ para todo r natural. De ahí que, en general, $A^{(k)}$ no es de dimensión finita.

Sí se tiene acotación contraria si $q_1, \ldots, q_n > 0$, caso en que se dice que la C^*-acción de C^n es *buena.* En efecto, en tal caso

$$0 \leqslant \frac{q \cdot \alpha}{\{\sup \ q_1, \ldots, q_n\}} \leqslant |\alpha| \leqslant \frac{q \cdot \alpha}{\inf \{q_1, \ldots, q_n\}}$$

Consecuencias de ello son: $A^{(0)} = C$, $\dim A^{(k)} < +\infty$. Con ello los elementos q-homogéneos son polinómicos.

En particular $C[x] = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathcal{O}_n^{(k)}$, y $\{\bigoplus_{h \geqslant k} \mathcal{O}_n^{(h)}\}_{k \geqslant 0}$ es una m-filtración de $C[x]$, cuya topología asociada es la m-ádica.

3.3.7 En virtud de 3.3.5, para las álgebras topológicamente graduadas que estamos condierando es válida la caracterización de los submódulos equivariantes anunciada en 2.3.2:

Proposición: En las condiciones de 3.3.2, sea M un A-módulo topológicamente graduado de tipo finito. Un A-submódulo $N \subset M$ es equivariante si y sólo si N es engendrado por un número finito de elementos q-homogéneos.

En particular, si $I \subset A$ es equivariante, es $C^*. I \subset I$.

3.3.8 De ello, 2.4.2 y 2.4.3 se sigue un resultado clave para las construcciones del apartado 4:

Corolario: Sea A como en 3.3.2, con la graduación topológica inducida por la C^*-acción de C^n considerada, y sea $\varphi : A^p_{(\beta)} \to A^m_{(\delta)}$ un morfismo de A-módulos, la matriz del cual tenga columnas q-homogéneas de grados $-\beta_1, \ldots, -\beta_p$ en $A^m_{(\delta)}$. Entonces Nuc ϕ es engendrado por un número finito de elementos q-homogéneos de $A^p_{(\beta)}$.

3.4 *Topología secuencial*

Damos a continuación la definición de la topología "secuencial", y algunos resultados que necesitaremos. Para las demostraciones, véase [6].

3.4.1 Para cada n-pla real positiva $t = (t_1, \ldots, t_n) \in R^n_+$, definimos en $\mathcal{O}_n$ una norma mediante

$$||\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha||_t = \sum_\alpha |a_\alpha| t^\alpha$$

Con esta norma, B_t definido por

$$B_t = \{ f \in \mathcal{O}_n : ||f||_t < +\infty \}$$

es una álgebra de Banach, y se tiene

$$\mathcal{O}_n = \bigcup_t B_t$$

Llamaremos *topología secuencial* en $\mathcal{O}_n$ a la final respecto a las inclusiones de la familia $\{ B_t \}_{t \in R^n_+}$.

3.4.2 *Proposición:* Sea $(t_\nu)_{\nu \in N}$ una sucesión en R^n_+, estrictamente decreciente y de límite 0. Se verifica:

a) $B_{t_\nu} \subset B_{t_{\nu+1}}$, para todo ν.

b) Las inclusiones $B_{t_\nu} \subset B_{t_{\nu+1}}$ son continuas (no abiertas, en general), y compactas.

c) Es $\mathcal{O}_n = \bigcup_\nu B_{t_\nu}$, y la topología secuencial de $\mathcal{O}_n$ coincide con la final respecto a las inclusiones de la familia $\{ B_{t_\nu} \}_{\nu \in N}$.

Esto es, la topología secuencial de $\mathcal{O}_n$, es *de Silva* respecto a dicha familia.

3.4.3 *Proposición:*

a) Sea (f_j) una sucesión en $\mathcal{O}_n$: (f_j) converge a $f \in \mathcal{O}_n$ con la topología secuencial si y sólo si "converge analíticamente", esto es, si para algún $t \in R^n_+$ es

$$f_j, f \in B_t$$
$$f = \lim f_j, \text{ según } || \ ||_t$$

b) La convergencia secuencial (o analítica) de una sucesión en $\mathcal{O}_n$ implica la convergencia por coeficientes; pero, en general, no es comparable con la *m*-ádica.

c) Si $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in \mathcal{O}_n$, es:

$$f = \lim \left(\sum_{|\alpha| < j} a_\alpha x^\alpha \right) \text{ (secuencialmente)}$$

3.4.4 *Proposición:* Con la topología secuencial, $\mathcal{O}_n$ es una álgebra topológica, localmente convexa, separada, no metrizable (de hecho no verifica el primer axioma de numerabilidad), y completa por sucesiones.

3.4.5 *Proposición:* Todo ideal de $\mathcal{O}_n$ es secuencialmente cerrado.

3.4.6 Consideraremos la topología inducida naturalmente por la secuencial en $\mathcal{O}_n^p$, $\mathcal{O}_{n/I}$ (ideal de $\mathcal{O}_n$), y en general en los módulos analíticos (se demuestra que no depende de la presentación $\mathcal{O}_n^p \to M$), que seguiremos llamando en todos los casos "topología secuencial".

3.4.7 *Proposición:* Todo submódulo de un módulo analítico es secuencialmente cerrado.

3.5 Damos a continuación las demostraciones de 3.3.1 y 3.3.2 para el caso de las álgebras de series convergentes con la topología secuencial, tal como habíamos anunciado.

3.5.1. *Demotración de 3.3.1 (caso $\mathcal{O}_n$):* Veamos en primer lugar que $C^*.\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_n$. En efecto, si $\lambda \in C^*$ y si $f \in \mathcal{O}_n$ converge absolutamente en $t = (t_1, \ldots, t_n) \in R_+^n$, entonces $\lambda \cdot f$ converge absolutamente en $t' = (t_1 |\lambda|^{-q_1}, \ldots, t_n |\lambda|^{-q_n}) \in R_+^n$.

La continuidad basta estudiarla sobre cada B_t, caso para el que acabamos de ver la factorización $B_t \overset{\lambda\cdot}{\to} B_{t'} \to \mathcal{O}_n$. Y la primera aplicación es una isometría.

3.5.2 *Demostración de 3.3.2 (caso $\mathcal{O}_n$):* En primer lugar veamos la igualdad entre las dos presentaciones de $\mathcal{O}_n^{(k)}$: $\lambda \cdot f = \lambda^k f$ implica $\Sigma(\lambda^k - \lambda^{q\cdot\alpha}) a_\alpha x^\alpha = 0$, con lo que se tiene una inclusión; para la otra basta tener en cuenta la continuidad de la acción de C^*.

Notemos que la aplicación π_k está bien definida, puesto que si una serie converge absolutamente en un punto, también lo hace cualquier serie parcial. Evidentemente es un proyector.

La continuidad de π_k basta estudiarla sobre cada B_t. Y claramente si $f \in B_t$, es $||\pi_k(f)||_t < ||f||_t$.

Las condiciones a) y c) de 2.1.1 son inmediatas. Para la b) basta tener en cuenta que los $\mathcal{O}_n^{(k)}$ son subespacios propios. Finalmente, para la d) aplicamos 3.4.3, a: para algún $t \in R_+^n$ será $f \in B_t$, con lo que $\pi_k(f) \in B_t$ para todo $k \in Z$, como ya hemos visto; finalmente de $|\alpha \cdot q| \leqslant |\alpha| \cdot \sup\{|q_i|\}$ se deduce que para todo natural 1 y todo $k \geqslant 1 \sup\{|q_i|\}$ se verifica

$$\| \sum_{|h| > k} \pi_h (f) \|_t \leqslant \| \sum_{|\alpha| > 1} a_\alpha x^\alpha \|$$

3.5.3 *Caso $\mathcal{O}_{n/I}$, con I ideal equivariante de $\mathcal{O}_n$:* Para 3.3.1, basta aplicar 3.3.7.

La demostración de 3.3.2 para $\mathcal{O}_{n/I}$ no ofrece dificultades. Así, veamos la igualdad de las dos presentaciones de $(\mathcal{O}_{n/I})^{(k)}$. Si $\widetilde{f} \in (\mathcal{O}_{n/I})^{(k)}$, es $\widetilde{f} = \widetilde{f^{(k)}}$, con lo que trivialmente $\lambda \cdot \widetilde{f} = \lambda^k \widetilde{f}$. Recíprocamente, si $\lambda \cdot \widetilde{f} = \lambda^k \widetilde{f}$, es $\sum_h (\lambda^h - \lambda^k) f^{(h)} \in I$, con lo que $f^{(h)} \in I$ para todo $h \neq k$; esto es, $\widetilde{f} = \widetilde{f^{(k)}}$.

Por otra parte, en virtud de 3.4.5, se tiene en $\mathcal{O}_{n/I}$ una graduación topológica inducida de la de $\mathcal{O}_n$ según 2.3.4. La segunda presentación de las introducidas en 3.3.2 muestra que ambas coinciden.

4. DEFORMACIONES DE GÉRMENES ANALÍTICOS EQUIVARIANTES

4.1 *Gérmenes equivariantes. Deformaciones equivariantes*

Como en el apartado anterior, suponemos fijada una C^*-acción en C^n de pesos $q_1, \ldots, q_n$ no todos nulos. Consideraremos en las álgebras de series complejas de potencias (formales o convergentes) en las variables $(x_1, \ldots, x_n)$, así como en sus cocientes por ideales equivariantes, las graduaciones topológicas inducidas por dicha C^*-acción (v. 3.3.2).

4.1.1 *Definición:* En esas condiciones, sea I un ideal de $\mathcal{O}_n$, y $(X, 0)$ el germen de espacio analítico que define. Diremos que $(X, 0)$ es un *germen analítico equivariante* respecto a la C^*-acción de C^n considerada si lo es el ideal I.

Según 3.3.7 ello equivale a que I admite un conjunto finito de generadores q-homogéneos. Supondremos en lo que sigue $I = [f_1, \ldots, f_p]$, con $f_i \in \mathcal{O}_n^{(d_i)}$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Notaremos $\beta = (d_1, \ldots, d_p)$.

4.1.2 Obsérvese que si f_i está definida en un entorno U_i de 0, se tiene

$$f_i(\lambda \cdot x) = (\lambda \cdot f_i)(x) = \lambda^{d_i} f_i(x)$$

para todo $x \in U_i$ y $\lambda \in C^*$ tales que $\lambda \cdot x \in U_i$.

En particular, sea X el subespacio analítico de $U = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} U_i$ definido por $f_1, \ldots, f_p$. Si $x \in X$, y $\lambda \in C^*$ es tal que $\lambda \cdot x \in U$, entonces $\lambda \cdot x \in X$.

4.1.3 *Definición:* Sea $(X, 0)$ un germen analítico equivariante, y

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,0} = \mathcal{O}_{n/I} & \longleftarrow & A = \mathcal{O}_n\{t\}/J \\ \uparrow & & \uparrow \\ C & \longleftarrow & B = C\{t\}/I \end{array}$$

una deformación analítica del mismo, con $t = (t_1, \ldots, t_s)$. Diremos que es una *deformación equivariante* si para una cierta C^*-acción en C^s los ideales J y I son equivariantes, y los morfismos de álgebras topológicamente graduadas del diagrama son también equivariantes.

Análogamente, definimos *deformaciones formales equivariantes.*

4.2 *Deformaciones infinitesimales de gérmenes analíticos equivaraintes*

Supondremos en este apartado que $(X, 0)$ es un germen analítico equivariante. Mantenemos las notaciones de 4.1.1 y 2.2.3.

4.2.1 *Lema:* El $\mathcal{O}_n$-módulo de relaciones de $f_1, \ldots, f_p$ es un submódulo equivariante de $o^p_{n(-\beta)}$.

Demostración: Dicho módulo es el núcleo del morfismo $\mathcal{O}^p_{n(-\beta)} \to \mathcal{O}_n$ definido por la matriz fila $(f_1, \ldots, f_p)$. Por tanto basta aplicar 3.3.8.

4.2.2 *Lema:* El $\mathcal{O}_{X,0}$-módulo $M=\mathrm{Hom}\, \mathcal{O}_{X,0}\,(I/I^2, \mathcal{O}_{X,0})$ es un submódulo equivariante de $\mathcal{O}^p_{X,0(\beta)}$.

Demostración: Sabemos que M es el submódulo de $\mathcal{O}^p_{X,0}$ formado por los $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ tales que $r_1\varphi_1 + \ldots + r_p\varphi_p = 0$ (en $\mathcal{O}_{X,0}$) para toda relación $r_1, \ldots, r_p$ de $f_1, \ldots, f_p$.

Por el lema anterior, el módulo de relaciones de $f_1, \ldots, f_p$ es engendrado por $R^1, \ldots, R^m$, elementos q-homogéneos de $\mathcal{O}^p_{n(-\beta)}$. Supongamos $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sus grados, con lo que $R^j_i \in \mathcal{O}^{(\gamma_j - d_i)}_n$. Consideremos el morfismo $\mathcal{O}^p_{X,0,(\beta)} \to \mathcal{O}^m_{X,0(\gamma)}$ definido por la matriz de filas $R^1, \ldots, R^m$, donde $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. El módulo M es el núcleo de este morfismo, con lo que nuevamente hasta aplicar 3.3.8.

4.2.3 *Proposición:* Si $(X,0)$ es un germen analítico equivariante respecto a una C^*-acción de C^n, ésta induce en $T^1(X,0)$ una estructura de $\mathcal{O}_{X,0}$-módulo topológicamente graduado.

Concretamente, las deformaciones infinitesimales q-homogéneas de grado $\nu \in Z$ son las que pueden representarse (v. 1.2.2) por elementos $b = (b_1, \ldots, b_p)$ q-homogéneos de grado ν en $\mathcal{O}^p_{n(\beta)}$, esto es, tales que cada b_j sea q-homogéneo de grado $\nu + d_j$ en $\mathcal{O}_n$. El conjunto de tales deformaciones lo notaremos $T^1(\nu)$.

Por otra parte, tales deformaciones son equivariantes, considerando en la base una C*-acción de peso $-\nu$.

Demostración: En el lema anterior hemos visto que $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_p) \in M$ es q-homogéneo de grado ν si cada ϕ_i es q-homogéneo de grado $\nu + d_i$ en $\mathcal{O}_{X,0}$ esto es, si admite un representante q-homogéneo de grado $\nu + d_i$ en $\mathcal{O}_n$.

Así, $\partial_j = (\widetilde{D_jf_1}, \ldots, \widetilde{D_jf_p}) \in M$ es homogéneo de grado $-q_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Con ello, $N = [\partial_j;\ 1 \leqslant j \leqslant n] \subset M$ es un $\mathcal{O}_{X,0}$-submódulo equivariante de M. Como $T^1(X,0) = M/N$, basta aplicar 2.3.3 y 3.4.7.

Para la última afirmación obsérvese que el ideal que define la deformación representada por b es engendrado por $f_i + \epsilon\, b_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ (v. 1.2.2).

4.2.4 *Teorema:* Sea (X,0) un germen analítico equivariante. Con las notaciones anteriores, sea $b \in \mathcal{O}^p_{n(\beta)}$ y $b^{(\nu)}$ su componente q-homogénea de grado ν, esto es, $b = \Sigma\, b^{(\nu)}$ en $\mathcal{O}^p_{n(\beta)}$.

i) b define una deformación infinitesima de (X,0) si y sólo si así ocurre con cada $b^{(\nu)}$.

ii) En tal caso, la serie de las deformaciones equivariantes definidas por $b^{(\nu)}$ converge secuencialmente a la definida por B.

Demostración: Es una consecuencia de 3.4.4 y 4.2.3.

4.2.5 *Corolario:* Si $T^1(X,0)$ es de dimensión finita, existen k_1 y k_2 tales que: $T^1(X,0) = \bigoplus_{k_1 \leqslant \nu \leqslant k_2} T^1(\nu)$.

4.3 *Deformaciones versales de gérmenes analíticos equivariantes*

Como en el apartado anterior supondremos (X,0) un germen analítico equivariante respecto a una C*-acción de C^n. Mantenemos las notaciones de dicho apartado.

4.3.1 En lo que sigue supondremos que la C*-acción de C^n considerada es *buena*, esto es, de pesos $q_1, \ldots, q_n > 0$. Véase al respecto 3.3.6.

En consecuencia, los subespacios $T^1(\nu)$ son de dimensión finita.

Por otra parte, en tal caso se verifica el recíproco de 3.3.7, con lo que: un ideal I de $\mathcal{O}_n$ es equivariante si y sólo si $C^*. I \subset I$.

4.3.2 Supondremos también que *dim* $T^1(X,0) = s < + \infty$, con lo que según 4.2.5

$$T^1(X,0) = \bigoplus_{k_1 \leqslant \nu \leqslant k_2} T^1(\nu)$$

Para una base de $T^1(X,0)$ formada por deformaciones q-homogéneas, sean $\nu_1, \ldots, \nu_s$ sus grados.

Notaremos $t_1, \ldots, t_s$ las respectivas funciones coordenadas de $T^1(X,0)$, y $t = (t_1, \ldots, t_s)$.

4.3.3 Consideraremos en $C^s \approx T^1(X,0)$ la C^*-acción de pesos $e_j = -\nu_j$, $1 \leqslant j \leqslant s$, (véase 4.2.3), y en las álgebras de series complejas de potencias (convergentes o formales) de variables $t_1, \ldots, t_s$ las graduaciones topológicas inducidas por esta C^*-acción. Análogamente en $\mathcal{O}_n[[t]]$, $\mathcal{O}_n\{t\}$, etc.

4.3.4 En estas condiciones, diremos que el germen *(X,0) es de graduación negativa* si $\nu_1, \ldots, \nu_s < 0$, esto es, si la C^*-acción que hemos introducido en $T^1(X,0)$ es buena. Análogamente, diremos que (X,0) es *de graduación positiva* si $\nu_1, \ldots, \nu_s > 0$.

4.3.5 *Lema:* Sea (X,0) un germen analítico equivariante respecto a una C^*-acción buena de C^n. Si dim $T^1(X,0) < +\infty$, existe una deformación formal equivariante que es formalmente quasi-universal.

Demostración: Es análoga a la de [10] para el caso algebraico.

4.3.6 *Observación:* Sea

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,0} = \mathcal{O}_{n/I} & \mathcal{O}_n[[t]]/J \arrow[l] \\ C \arrow[u] & C[[t]]/I \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

la deformación construida en la demostración del lema anterior. De la propia construcción se sigue que si $I = [f_1, \ldots, f_p]$, con f_i q-homogéneos de grado d_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, puede tomarse $I = [g_1, \ldots, g_q]$, $J = [F_1, \ldots, F_p, g_1, \ldots, g_q]$, con

$g_1, \ldots, g_q$ q-homogéneos en $C[[t]]$

$F_1, \ldots, F_p$ q-homogéneos de grados $d_1, \ldots, d_p$ en $\mathcal{O}_n[[t]]$

y las relaciones de $F_1, \ldots, F_p$ también q-homogéneas, del mismo grado que las correspondientes de $f_1, \ldots, f_p$.

4.3.7 El siguiente lema no requiere hipótesis de equivariancia del germen, ni de finitud de dim $T^1(X,0)$.

Lema (Galligo-Houzel): Sea (X,0) un germen de espacio analítico. Toda deformación analítica, cuya deformación formal asociada sea formalmente quasi-universal, es analíticamente semiuniversal.

Esquemas de la demostración: Se trata de aplicar la técnica habitual de "paso de formal a analítico" basada en el teorema de Artin. De hecho este teorema, no resulta de aplicación directa ya que algunas de las funciones soluciones han de ser independientes de ciertas variables (los morfismos entre las bases de las deformaciones no deben depender de las variables del espacio en que se han sumergido (X,0)). Sí puede aplicarse la siguiente generalización de Grauert-Verdier [4]:

"Consideremos un sistema de ecuaciones analíticas del tipo

$$R(y, z, \phi(y), \psi(y, z)) = 0 \quad (\text{mod. } I)$$

Si existe solución de orden n_0, y toda solución de orden $n \geqslant n_0$ se prolonga a una de orden $n + 1$, entonces el sistema admite una solución analítica".

La hipótesis sobre prolongabilidad de soluciones (que no requiere el teorema de Artin) corresponde a la condición de "formalmente quasi-universal".

Para una aplicación de este teorema, análoga a la que aquí se requiere, ver [4] ("segunda formulación por ecuaciones", en la demostración del teorema 2).

4.3.8 *Teorema:* Sea (X,0) un germen equivariante de graduación negativa (o positiva), respecto a una C^*-acción buena. Si dim $T^1(X,0) < +\infty$, existe una deformación analítica equivariante que es analíticamente semiuniversal.

Demostración: Consideremos la deformación formal obtenida en 4.3.5, con las notaciones de 4.3.6.

Como (X,0) es de graduación negativa, la C^*-acción sobre $T^1(X,0)$ es buena, con lo que $g_1, \ldots, g_q$ son polinomios (ver 3.3.6). La misma conclusión se tiene si (X,0) es de graduación positiva. De la misma forma, serán polinomios

$F_1, \dots, F_p$. Por tanto, los ideales I, J definen una deformación analítica, cuya deformación formal asociada es formalmente quasi-universal. Con ello basta aplicar 4.3.7.

4.3.9 *Observación:* De la demostración anterior se sigue que en el teorema anterior la hipótesis de "(X,0) de graduación negagiva (o positiva)" puede sustituirse por la más general de que $g_1, \dots, g_q$ sean polinomios en las variables de peso negativo (o positivo).

En efecto, los elementos homogéneos de $C[[t]]$ son en general de grado isótropo no acotado (ver 3.3.6). Pero si las variables de pesos negativos (o positivos) tienen dicho grado isótropo acotado, también deberán tenerlo las demás. (En particular, si todos los pesos son del mismo signo, los elementos homogéneos son polinómicos, caso contemplado en la proposición). En definitiva, se concluye que los ideales I, J admiten generadores polinómicos.

5. DEFORMACIÓN SEMIUNIVERSAL DEL GERMEN DE LOS n EJES COORDENADOS DE C^n

5.1 *El germen $(X_n,0)$*

5.1.1 *Notación:* Para $m \leqslant n$, indicaremos mediante $(i_1, \dots, i_m) \in |{}^n_m|$ que los índices $i_1, \dots, i_n$ son enteros entre 1 y n, distintos entre sí.

5.1.2 Sea $(X_n,0)$ el germen en el origen de los n ejes coordenados de C^n, definido por el ideal $I_n = [f_{ij}, (i,j) \in |{}^n_2|]$ de $\mathcal{O}_n$, donde

$$f_{ij}(x) = f_{ji}(x) = x_i \cdot x_j$$

5.1.3 Respecto a la C^*-acción siótropa de C^n, esto es, la de pesos $q_1 = \dots = q_n = 1$, los señalados generadores f_{ij} son homogéneos de grado 2, con lo que $(X_n,0)$ es equivariante respecto a dicha C^*-acción isótropa de C^n.

5.1.4 Supondremos $n > 2$, puesto que para n = 2 se trata de una hipersuperficie, cuya deformación semiuniversal es bien conocida:

$$C\{t\} \longrightarrow \mathcal{O}_2\{t\}/[xy + t]$$

5.2 *Deformaciones infinitesimales de $(X_n, 0)$*

5.2.1 Veamos en primer lugar que el $\mathcal{O}_n$-módulo de relaciones de los referidos generadores f_{ij} de I_n es engendrado por las de la forma

$$(0, \ldots, 0, \overset{ij}{x_k}, 0, \ldots, 0, \overset{jk}{-x_i}, 0, \ldots, 0)$$

donde $(i, j, k) \in |{}^{n}_{3}|$.

En efecto, procedamos por inducción sobre n. Para $n = 3$, supongamos

$$r_{12}\ f_{12} + r_{13}\ f_{13} + r_{23}\ f_{23} = 0$$

Trivialmente será $r_{12} = x_3 r_{12}$, etc., con $r_{12} + r_{13} + r_{23} = 0$. Con ello

$$(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = r_{12}\ (x_3, -x_2, 0) + r_{23}\ (0, -x_2, x_1)$$

Para $n + 1$, sea $\Sigma\, r_{ij}\, f_{ij} = 0$. Para $i, j \neq 1$ escribamos

$$r_{ij} = r_{ij}\,(0, x_2, \ldots, x_n) + x_1\, r^1_{ij}.$$

Por hipótesis de inducción podemos prescindir del primer sumando, con lo que puede suponerse que r_{ij} $(i,j \neq 1)$ es divisible por x_1. Procediendo análogamente con las demás variables puede escribirse en definitiva

$$r_{ij} = x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots \hat{x}_j \ldots x_n\, \overline{r_{ij}}$$

donde ˆ indica que tal variable no figura en ese producto. Y ahora se procede como para $n = 3$.

5.2.2 *Proposición:* Para cada $(i, j) \in |{}^{n}_{2}|$, sea τ^i_j el siguiente ideal de $\mathcal{O}_n$:

$$\tau^i_j = [f_{ij} + \epsilon x_j,\ f_{kh};\ (k, h) \in |{}^{n}_{2}|,\ (k, h) \neq (i, j),\ (j, i)]$$

Entonces el morfismo

$$\pi^i_j\colon C\{\epsilon\}/[\epsilon^2] \longrightarrow \mathcal{O}_n\{\epsilon\}/\tau^i_j + [\epsilon^2]$$

inducido por la inclusión de $C\{\epsilon\}$ en $\mathcal{O}_n\{\epsilon\}$ es una deformación infinitesimal de $(X_n, 0)$, q-homogénea de grado -1.

Demostración: Se comprueba que π_j^i es plano extendiendo los generadores del módulo de relaciones de (f_{ij}) determinados en 5.2.1. Para la q-homogeneidad, ver (4.2.3).

5.2.3 *Observación:* Se tienen de forma análoga deformaciones infinitesimales para los ideales

$$[f_{ij} + \epsilon\, g,\ f_{kh};\ (k, h) \in |_2^n|,\ (k, h) \neq (i, j), (j, i)]$$

para todo $g \in \mathcal{O}_n$ tal que $g(0) = 0$.

5.2.4 Obsérvese que el subconjunto analítico de C^n que define τ_j^i resulta de trasladar el eje j a lo largo del i, según ϵ. Nos referimos pues, a la correspondiente deformación infinitesimal como la *traslación del eje j a lo largo del i.* Su clase de isomorfismo en $T^1(X_n, 0)$ la notaremos también τ_j^i.

5.2.5 Veremos a continuación que las clases τ_j^i engendra $T^1(X_n, 0)$.

Por otra parte, resulta geométricamente intuitivo que al sumar las traslaciones a lo largo de un eje de todos los demás se obtiene una deformación trivial. En efecto, dicha suma veremos que resulta ser la deformación (trivial) asociada a la derivada parcial según dicho eje. De hecho, en la siguiente proposición veremos que éstas son las relaciones de dependencia lineal entre las clases τ_j^i. Ello permite calcular la dimensión de $T^1(X_n, 0)$.

Teorema: Sea $n > 2$. Con las notaciones anteriores:

1) Las clases τ_j^i, $(i, j) \in |_2^n|$, engendran $T^1(X_n, 0)$.

2) Una base puede determinarse a partir de esos generadores y de las siguientes relaciones de dependencia lineal entre ellos

$$\tau_1^i + \ldots + \tau_{i-1}^i + \tau_{i+1}^i + \ldots + \tau_n^i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Con ello: $\dim T^1(X_n, 0) = n(n - 2)$.

Demostración:

1) Sea ξ una deformación infinitesimal de $(X_n, 0)$ definida por

$$f_{ij} + \epsilon\, g_{ij},\ (i, j) \in |_2^n|$$

donde $g_{ij} = g_{ji} \in \mathcal{O}_n$.

Obsérvese que por hipótesis será

$$x_k\, g_{ij} - x_i\, g_{jk} \in [f_{ij}]\, \mathcal{O}_n$$

con lo que $g_{ij}(0) = 0$. En virtud de la observación anterior podemos, pues, limitarnos a la deformación definida por

$$f_{12} + \epsilon\, g_{12}$$

$$f_{ij}, \qquad (i,j) \neq (1,2), (2,1)$$

Consideremos:

$$(\xi) = (g_{12}, 0, \ldots, 0)$$

$$(\tau_2^1) = (x_1, 0, \ldots, 0)$$

$$(\tau_1^2) = (x_2, 0, \ldots, 0) \quad \text{etc.}$$

$$(\partial_k) = \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}\right) = (\ldots, \overset{kh}{x_h}, \ldots)$$

elementos del $\mathcal{O}_{X_{n,0}}$-módulo $M = \mathcal{O}_{X_{n,0}}^{\binom{n}{2}}$, que definen respectivamente las deformaciones: ξ, traslación del eje 2 a lo largo del 1, ídem 1 a lo largo del 2, y la trivial asociada a la derivada parcial respecto a x_k. Bastará ver que

$$(g_{12} - \lambda_2^1\, x_1 - \lambda_2^1\, x_2, 0, \ldots, 0) \in [(\partial_k)]_M$$

Evidentemente podemos prescindir de los términos cruzados de g_{12}, con lo que podemos suponer

$$g_{12} = x_1\, h_1\,(x_1) + \ldots + x_n\, h_n\,(x_n)$$

De $x_k\, g_{12} \in [f_{ij}]\, \mathcal{O}_n$ se sigue $h_k = 0$ $(k \neq 1, 2)$. Y finalmente observemos que

$$(x_2^1, 0, \ldots, 0) = x_1\,(\partial_2)$$

$$(x_2^2, 0, \ldots, 0) = x_2\,(\partial_1)$$

2) Con notaciones análogas a las anteriores, si:

$$\Sigma\, \lambda_j^i\, (\tau_j^i) \in [(\partial_k)]_M$$

ha de ser

$$\Sigma\, \lambda_j^i\,(\tau_j^i) = \Sigma\, \mu_k\,(\partial_k), \text{ con } \mu_k \in C.$$

Y la tesis se sigue inmediatamente.

5.2.6 Consideraremos en $T^1(X_n,0)$ la base formada por la familia

$$(\tau_j^i);\quad (i,j) \in |{}^n_2|,\quad j \neq i+1 \quad \text{si} \quad i \neq n,\quad j \neq 1 \quad \text{si} \quad i = n.$$

5.2.7 *Corolario:* $(X_n, 0)$ es de graduación negativa. Concretamente, todas las deformaciones infinitesimales son q-homogéneas de grado -1:

$$T^1(X_n, 0) = T^1(-1)$$

5.2.8 *Corolario* [1].

1) Existe una deformación infinitesimal de $(X_n, 0)$ tal que la fibra (fuera del origen) es lisa.

2) Sean $n_1, \ldots, n_r$ enteros tales que $n_i > 2$ y $\sum_i (n_i \quad 1) = n$. Entonces existe una deformación infinitesimal de $(X_n, 0)$ tal que la fibra (fuera del origen) tiene exactamente r puntos singulares, de gérmenes analíticamente equivalentes a $(X_{n_1}, 0), \ldots, (X_{n_r}, 0)$. .

Demostración: Resulta inmediato a partir de 5.2.5. En efecto, para 1) basta tomar $\lambda_n^1\, \tau_n^1 + \lambda_1^2\, \tau_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^n\, \tau_{n-1}^n$, con $\lambda_j^i \neq 0$. Para 2) basta trasladar $(n_1 - 1)$ ejes a lo largo de otro cualquiera, etc., y finalmente alisar el germen de los no desplazados.

5.3 *Deformación semiuniversal de $(X_n, 0)$*

5.3.1 Designaremos las funciones coordenadas de $C^{n(n-1)}$ por u_j^i, donde $(i,j) \in |{}^n_2|$, y $u = (u_j^i)$.

Según 5.2.6, identificaremos $T^1(X_n,0)$ con el subespacio de $C^{n(n-1)}$ definido por

$$u_2^1 = u_2^2 = \ldots = u_n^{n-1} = u_1^n = 0$$

considerando u_j^i como la proyección sobre el eje τ_j^i. Notaremos $\bar{u}$ la restricción de u a este subespacio.

5.3.2 Para cada $(i, j, k) \in |{}^{n}_{3}|$ escribamos

$$P^{ij}_{k} = P^{ji}_{k} = u^{i}_{j}\, u^{j}_{k} + u^{j}_{i}\, u^{i}_{k} \qquad u^{i}_{k}\, u^{j}_{k} \in C[u]$$

y consideremos los ideales:

$$I'_3 = 0$$

$$I'_n = [P^{ij}_{k} - P^{ij}_{h}, (i,j,k,h) \in |{}^{n}_{4}|] \subset C\{u\}, \text{ si } n > 3$$

$$J'_n = I'_n + [f_{ij} + u^{j}_{i}\, x_i + u^{i}_{j}\, x_j + P^{ij}_{k};\ (i,j,k) \in |{}^{n}_{3}|] \subset \mathcal{O}_n\{u\}$$

Proposición: Con estas notaciones, el morfismo

$$\pi'\colon C\{u\}/I'_n \longrightarrow \mathcal{O}_n\{u\}/J'_n$$

inducido por la inclusión de $C\{u\}$ en $\mathcal{O}_n\{u\}$ es una deformación de $(X_n, 0)$, para $n > 2$.

Demostración: Basta extender los generadores del módulo de relaciones de (f_{ij}) determinados en 5.2.1, para lo cual obsérvese que

$$(x_i \cdot u^{k}_{j})(x_i x_j + u^{j}_{i} x_i + u^{i}_{j} x_j + P^{ij}_{k}) + (-x_i - u^{i}_{j})(x_j x_k + u^{k}_{j} x_j + u^{j}_{k} x_k +$$

$$+ P^{jk}_{i}) + (\cdot\, u^{j}_{i} + u^{j}_{k})(x_i x_k + u^{k}_{i} x_i + u^{i}_{k} x_k + P^{ik}_{j}) = 0$$

5.3.3 Sea $J_n = [u^{1}_{2}, u^{2}_{3}, \ldots, u^{n-1}_{n}, u^{n}_{1}] \subset C\{u\}$. Consideremos

$$I_n = (I'_n + J_n)/J_n \subset C\{\bar{u}\}$$

donde hemos identificado $C\{u\}/J_n$ con $C\{\bar{u}\}$.

Análogamente sea

$$J_n = (J'_n + J_n)/J_n \subset \mathcal{O}_n\{u\}.$$

Teorema: Con esas notaciones, la deformación semiuniversal del germen $(X_n, 0)$ de los n ejes coordenados de C^n para $n > 2$, es el morfismo

$$\pi\colon C\{\bar{u}\}/I_n \longrightarrow \mathcal{O}_n\{\bar{u}\}/J_n$$

inducido por la inclusión de $C\{\bar{u}\}$ en $\mathcal{O}_n\{\bar{u}\}$.

Demostración: En virtud de la proposición anterior, π es plano.

Para ver que se trata de la deformación semiuniversal, se sigue un proceso análogo al de 4.3.8.

En primer lugar, de 5.3.1 se sigue que el espacio tangente a la base es $T^1(X_n,0)$.

En segundo lugar, veamos que la deformación formal asociada es formalmente quasi-universal. En efecto, coincide con la construida por Schlessinger en [15], tomando

$$I_{n,p} = I_n + m^p$$

donde m designa el ideal maximal de $C\,[[u]]$.

Finalmente, basta aplicar 4.3.7.

5.3.4 Obsérvese que si, atendiendo a 4.3.3 y 5.2.7, consideramos en $T^1(X_n,0)$ la C^*-acción isótropa de peso 1, y en $C\,\{\bar{u}\}$ y $\mathcal{O}_n\,\{u\}$ la graduación topológica inducida, la deformación π dada es equivariante.

Concretamente, los generadores dados de I_n y de J_n verifican las condiciones de 4.3.6.

5.3.5 A efectos de cálculo resultan útiles las siguientes presentaciones de los generadores de I_n

$$P_k^{ij} \quad P_h^{ij} = \begin{vmatrix} u_j^i & u_k^i & u_h^j - u_i^j \\ u_k^i - u_h^i & & u_k^j - u_h^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_j^i - u_k^i & u_i^j - u_h^j \\ u_j^i - u_h^i & u_i^j - u_k^j \end{vmatrix}$$

5.3.6 Veamos que para n = 3 y n = 4 se obtienen los resultados ya conocidos.

En efecto, para n = 3 es

$$T^1(X_3,0) \cong C^3 \qquad \bar{u} = (u_3^1, u_1^2, u_1^3)$$

$$I_3 = 0$$

$$J_3 = [f_{12} + u_1^2 x_1 + u_1^2\, u_3^1,\ f_{13} + u_3^1 x_3 + u_3^1 u_2^3,\ f_{23} + u_2^3 x_2 + u_2^3 u_1^2]$$

Para n = 4, es $T^1(X_4,0) \cong C^8$. Según 5.3.5, J_4 es engendrado por los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} u_2^1 - u_3^1 & u_4^2 - u_1^2 & u_4^3 - u_1^3 & u_2^4 \quad u_3^4 \\ u_3^1 - u_4^1 & u_3^2 - u_4^2 & u_1^3 - u_2^3 & u_1^4 - u_2^4 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente, mediante un cambio de coordenadas, por los de la matriz

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base de la deformación semiuniversal de $(X_4, 0)$ es el germen en el origen de la variedad determinantal genérica de C^8, o de otro modo, el del cono sobre $P^1 \times P^3$ en P^7 (ver [7], [9]).

5.3.7 Hemos visto que para $n = 2$ y $n = 3$ la base de la deformación semiuniversal de $(X_n, 0)$ es lisa: C y C^3 respectivamente. Para $n \geqslant 4$ se tiene:

Proposición: Para $n \geqslant 4$, la base de la deformación semiuniversal de $(X_n, 0)$ es el germen en el origen de $C^{n(n-2)}$ de una intersección de conos cuadráticos, no lisa, y de dimensión pura $2n - 3$.

Demostración: En [1] la dimensión de dicha base se obtiene mediante una fórmula de Deligne. De hecho, la descripción que hemos dado permite su cálculo directo. En efecto, se comprueba directamente que

$$([P_k^{1j} - P_h^{1j}; 2 \leqslant j \leqslant n; k, h \text{ consecutivos en } \hat{1}, 2, \ldots, \hat{j}, \ldots, n\ ] + J_n)/J_n \subset C\{\bar{u}\}$$

define una intersección completa en $C^{n(n-2)}$, de codimensión $(n-1)(n-3) = n^2 - 4n + 3$. Y mediante cálculos laboriosos se observa que la base de la deformación semiuniversal es una subvariedad de la misma dimensión.

BIBLIOGRAFIA

(1) Buchweitz, R-O., Greuel, G-M.: The Milnor Number and Deformations of Complex Curve Singularities; Inv. Math. 58 (1980), 241-281.

(2) Chevalley, C.: Séminaire Chevalley 1956/58, exposé 4, séminaire 1.

(3) Donin, I.F.: Complete Families of Deformations of Germs of Complex Spaces; Math. URSS Sbornik, vol. 18 (1972), n. 3, 397-406.

(4) Galligo, A., Houzel, C.: Déformations semiuniverselles de germes d'espaces analytiques (d'après Verdier et Grauert); Asterisque 7-8 (1973), 139-163.

(5) Grauert, H.: Uber die deformation isoliertier singularitaten analytischer mengen; Inv. Math. 15 (1972), 171-198.

(6) Grauert, H., Remmert, R.: Analytische Stellenalgebren; G.M. 176, Springer-Verlag.

(7) Hauser, H.; Sur la construction de la déformation semiuniverselle d'une singularité isolée (Thèse).

(8) Loday-Richaud, M.: Déformations de germes d'espaces analitiques de Cohen-Macaulay plongés de codimension deux; Séminaire Pierre Lélong.

(9) Palamodov, V.P.: Deformation of Complex Spaces; Russian Math. Surveys 31.3 (1976), 129-197.

(10) Pinkham, H.: Deformation of Algebraic Varieties with G_m-action; Asterisque 20 (1974), 1-131.

(11) Pinkham, H.: Deformations of Normal Surfaces Singularities with C*-action; Math. Ann. 232 (1978), 65-84.

(12) Puerta, F.: Déformations semiuniverselles et germes d'espaces analytiques C*-équivariantes; International Conference on Algebraic Geometry, La Rábida (1981).

(13) Schaps, M.: Deformation of Cohen-Macaulay Schemes of Codimension 2 and Non-Singular Deformations of Space Curves; Am. Jour. of Math., 99 (1977), 669-685.