Collect. Math. **40**, 3 (1989), 217–224

Sobre la estabilización robusta para ciertos tipos de sistemas lineales

J. M. Amillo and F. A. Mata

Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid, Boadilla del Monte, 28660 Madrid, Spain

Received 6/JUL/90

Abstract

In this paper, we consider the problem of robust stabilization of systems with complex pole variations. We show that techniques from the complex function field can also be used to treat these cases. In particular the problem is reduced to one of interpolation theory on the disk.

1. Introducción

Notación: $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$; $\bar{\Pi} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\}$; $\tilde{\Pi} = \bar{\Pi} \cup \{\infty\}$; $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$; $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$; $D_t(s) = \{z \in \mathbb{C} : |z - s| < t\}$.

El problema que tratamos en este artículo surge del siguiente problema físico:

"Dada una planta Σ_1 (Sistema dinámico continuo con entrada-salida escalares, lineal, de dimensión finita y tiempo invariante sobre $\mathbf{R}$) encontrar un sistema Σ_2, que llamaremos *controlador*, asintóticamente estable y tal que el sistema de realimentación dado por la Figura 1 sea también asintóticamente estable".

Este problema físico puede reducirse al siguiente problema de análisis complejo [5, p. 143]:

"Dada una familia de funciones, $\{P_s(z) : s \in K\}$, racionales, reales, propias, no idénticamente nulas, continuamente parametrizadas en el compacto K, y tales que el numerador y el denominador de cada función de la familia no tienen factores

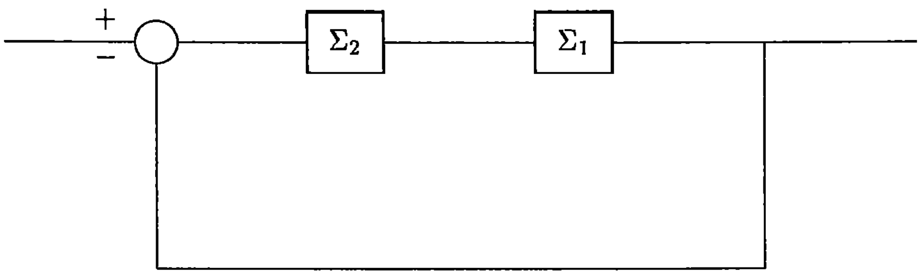

Figura 1

comunes (*familia de funciones de transferencia* que rige al sistema), encontrar una función $C(z)$ (*compensador*) racional, real, propia, holomorfa en $\tilde{H}$ y tal que:

$$1 + P_s(z)C(z) \neq 0 \tag{1}$$

para todo $z \in \tilde{H}$ y $s \in K$".

A. Tannenbaum [5] demostró la no existencia de solución a este problema, en toda su generalidad. Se plantea, por tanto, la necesidad de estudiar en qué casos particulares tiene solución y, ante todo, resolver los casos que con mayor frecuencia se presentan en la práctica.

En este sentido, P. Khargonekar y A. Tannenbaum [2] dieron una solución completa al caso en que existe incertidumbre en el factor de ganancia, es decir al caso correspondiente a la familia de funciones:

$$\{P_s(z) = s\tilde{P}(z) : s \in [\alpha, \beta]\}.$$

Estos autores han tratado también el caso en que existe incertidumbre en un sólo polo real, es decir el caso correspondiente a la familia de funciones:

$$\left\{P_s(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{z - s} : s \in [\alpha, \beta]\right\}.$$

Nosotros resolveremos el problema en otros dos casos particulares que describimos en la sección 2, y que corresponden a sistemas que tienen incertidumbre en r polos de la función de transferencia. En la sección 2 daremos también algunas definiciones que utilizaremos posteriormente.

En la sección 3 establecemos dos teoremas, uno por cada caso tratado, que nos dan una condición necesaria y suficiente para la existencia del compensador $C(z)$, así como un método de construcción del mismo.

Para terminar, en el apartado 4.1, presentamos otro posible enfoque del problema y, en el apartado 4.2, damos un ejemplo práctico de la construcción de $C(z)$ (en uno de nuestros casos).

2. Preliminares

En este trabajo consideraremos las siguientes dos familias de funciones de transferencia:

$$\mathcal{F}_i = \left\{ P_s(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{(z-a_0)^r - s} : s \in K_i \right\}; \qquad i = 1,2,$$

siendo:

$$K_1 = [s_0 - \alpha, s_0 + \beta] \subset \mathbf{R}, \qquad s_0 - \alpha > 0,\ a_0 - \sqrt[r]{s_0 + \beta} > 0,\ \alpha, \beta > 0$$

$$K_2 = \bar{D}_t(s_0), \qquad t > 0,\ 0 \notin K_2$$

y la función $\tilde{P}$ definida por:

$$\tilde{P}(z) = \frac{q_1(z)(z-z_1)\cdots(z-z_m)}{q_2(z)(z-p_1)\cdots(z-p_n)}$$

donde $\{z_1, \dots, z_m, p_1, \dots, p_n\} \subset H$, y q_1 y q_2 son polinomios sin ceros en $\bar{H}$ y de grados s_1 y s_2, respectivamente, verificando que $s_2 + n + r \geq s_1 + m$.

Estas familias de funciones de transferencia, $\mathcal{F}_i$, $i = 1,2$, que rigen un cierto sistema, presentan incertidumbre en algunos de sus polos.

Para cada $i = 1,2$, sea $R_s(z) = (z-a_0)^r - s$, $s \in K_i$. Llamaremos también, para cada familia $\mathcal{F}_i$, $i = 1,2$, *función peso* a:

$$W(z) = \frac{1}{(z-a_0)^r - s_0}$$

y *planta nominal* a la función $P_0(z) = \tilde{P}(z)W(z)$.

3. Teoremas principales

Vamos a dar, para cada familia $\mathcal{F}_i$, $i = 1,2$, un teorema que nos dará condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un compensador $C(z)$ que estabilice el sistema, en el sentido establecido en (1).

Teorema 1

Existe una función $C(z)$ verificando (1) para la familia $\mathcal{F}_1$, y tal que no haya cancelación inestable polos/ceros entre las funciones de $\mathcal{F}_1$ y $C(z)$, si y solamente si existe una función:

$$T : \tilde{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \left(-\infty, \frac{-1}{\alpha} \right] \cup \left[\frac{1}{\beta}, \infty \right) \right\}$$

racional, real y analítica en $\tilde{H}$ tal que:

a) Los ceros de T en $\tilde{H}$ son $p_1, \ldots, p_n$.

b) T tiene un cero de orden r en $z = \infty$.

c) $(T/W - 1)(z_i) = 0$, $1 \leq i \leq m$.

d) $(T/W - 1)$ tiene un cero de orden ℓ en $z = \infty$, donde $\ell \geq s_2 - s_1 + n + r - m$.

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que existe $C(z)$ verificando (1). Esta condición es equivalente a que:

$$R_s(z) + \tilde{P}(z)C(z) \neq 0, \qquad \forall z \in \tilde{H},\ \forall s \in K_1$$

y

$$1 + \frac{\tilde{P}(\infty)}{R_s(\infty)} C(\infty) \neq 0, \qquad \forall s \in K_1,$$

de donde se deduce que:

$$\left[(z - a_0)^r - s_0 \right] \left[1 + P_0(z)C(z) \right] \notin [-\alpha, \beta] \qquad \forall z \in \tilde{H}.$$

Por tanto, si definimos:

$$T(z) = \frac{W(z)}{1 + P_0(z)C(z)}, \qquad \forall z \in \tilde{H},$$

se tendrá que $T(z) \notin A_1$, siendo $A_1 = (-\infty, -1/\alpha] \cup [1/\beta, \infty)$. Por otra parte, puesto que $C(z)$ es holomorfa en $\tilde{H}$, se tiene que "$T(z) = 0$ en H si y sólo si z es un polo de $\tilde{P}(z)$ en $\bar{\Pi}$", de donde se deduce (a). Por el mismo razonamiento, y puesto que:

$$\left(\frac{T}{W} - 1\right)(z) = \frac{1}{1 + P_0(z)C(z)} - 1,$$

obtenemos (c). Además:

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in\Pi}} z^r \cdot T(z) = \lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in\bar{\Pi}}} \frac{1}{1 + P_0(z)C(z)},$$

y puesto que se verifica (1), tenemos la condición (b). Del mismo modo:

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in\bar{\Pi}}} z^{s_2 - s_1 + n + r - m} \left(\frac{1}{1 + P_0(z)C(z)} - 1\right) = \lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in\bar{\Pi}}} \frac{MC(z)}{1 + P_0(z)C(z)},$$

siendo M una constante no nula, distinta de ∞, y por tanto se verifica (d).

Recíprocamente, supongamos que existe la función T con las propiedades requeridas. Puesto que T verifica (a), podemos poner:

$$T(z) = \frac{h_1(z)(z - p_1)\cdots(z - p_n)}{h_2(z)},$$

donde $h_1(z)$ y $h_2(z)$ no tienen ceros en $\bar{\Pi}$; y por verificarse (c):

$$\frac{T(z)}{W(z)} - 1 = r_1(z)(z - z_1)\cdots(z - z_m)h_2(z)$$

con $r_1(p_1) \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Definimos entonces:

$$C(z) = -\frac{r1(z)q_2(z)}{h_1(z)q_1(z)}$$

que es holomorfa en Π, verifica que no existe cancelación inestable polos/ceros entre las funciones de $\mathcal{F}_1$ y $C(z)$ y además, por verificarse (b) y (d), $C(z)$ es propia. Por la definición de $C(z)$, es fácil ver que:

$$T(z) = \frac{W(z)}{1 + P_0(z)C(z)},$$

y, puesto que $T(z) \notin A_1$ para todo $z \in \bar{\Pi}$, tendremos que:

$$R_s(z) + \tilde{P}(z)C(z) \neq 0, \qquad \forall z \in \Pi\ \forall s \in K_1,$$

y, por (b):

$$1 + P_s(\infty)C(\infty) \neq 0, \qquad \forall s \in K_1.$$

Luego $1 + P_s(z)C(z) \neq 0$, para $z \in \bar{\Pi}$, $s \in K_1$, y por tanto $C(z)$ verifica (1). □

Para la familia $\mathcal{F}_2$ obtenemos el siguiente resultado, cuya demostración omitimos por ser análoga a la del Teorema 1.

Teorema 2

Existe una función $C(z)$ verificando (1) para la familia $\mathcal{F}_2$, y tal que no exista cancelación inestable polos/ceros entre las funciones de $\mathcal{F}_2$ y $C(z)$, si y solamente si existe una función:

$$T : \tilde{\Pi} \longrightarrow D_{1/t}(0)$$

racional, real y analítica en $\tilde{\Pi}$ verificando las condiciones (a), (b), (c) y (d) del Teorema 1.

Mediante estos teoremas, queda reducido el problema de encontrar $C(z)$ a encontrar una cierta función T verificando unas condiciones determinadas. Una vez obtenida la función T, podemos obtener el controlador $C(z)$ mediante la fórmula que aparece en (2). Para la construcción de T podemos considerar las transformaciones conformes racionales:

$$\Phi_1 : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus A_1 \qquad \text{definida por } \Phi_1(z) = \frac{1 - \big((1-z)/(1+z)\big)^2}{\beta + \alpha\big((1-z)/(1+z)\big)^2}$$

$$\Phi_2 : D \to D_{1/t}(0) \qquad \text{definida por } \Phi_2(z) = \frac{z}{t}$$

y trasladarnos al disco unidad D donde utilizaremos la teoría clásica de interpolación.

4. Observaciones y ejemplos

4.1. Observación. Si en lo anterior suprimimos la condición de que la familia de funciones de transferencia, $\{P_s(z) : s \in K\}$, y el compensador $C(z)$ tengan coeficientes reales (sólo requerimos que sus coeficientes sean complejos), obtenemos una versión del problema muy interesante desde el punto de vista matemático, dado que podemos ampliar nuestros resultados a una tercera familia:

$$\mathcal{F}_3 = \left\{ \frac{\tilde{P}(z)}{R_s(z)} : s \in K_3 \right\},$$

siendo:

$$K_3 = \big\{z \in I : |z| \in [|s_0| - \alpha, |s_0| + \beta],\ \arg(z) \in [\arg(s_0) - \gamma, \arg(s_0) + \delta]\big\},$$

y obtener un teorema, análogo a los Teoremas 1 y 2, para una función T, racional y holomorfa en $\tilde{H}$, tal que:

$$T : \tilde{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus A_3,$$

donde:

$$A_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |s_0| - \alpha \leq \left| \frac{1}{z} + s_0 \right| \leq |s_0| + \beta, \right.$$
$$\left. \arg(s_0) - \gamma \leq \arg\left(\frac{}{z} + s_0 \right) \leq \arg(s_0) + \delta \right\}.$$

Además, puesto que de los teoremas standard de aproximación en Análisis Complejo [1] se deduce que es suficiente encontrar $C(z)$, propia y holomorfa en $\dot{H}$, tal que $1/C(z)$ sea meromorfa (no necesariamente racional) verificando $1 + P_s(z)C(z) \neq 0$, $\forall z \in \tilde{H}$ y $\forall s \in K_3$, [5; p. 136]) y dado que $\mathbb{C} \setminus A_3$ es un dominio simplemente conexo que contiene al origen, quedaría resuelto el problema reduciendo la construcción de $C(z)$ a un problema de interpolación en el disco unidad.

4.2. Ejemplo. Veamos por último, en un caso práctico, cómo obtenemos el compensador adecuado para estabilizar un sistema. Sea la familia de funciones de transferencia:

$$P_s(z) = \frac{(z+4)(z+5)}{(z-4)^3 - s}$$

para $s \in [1,3]$ ($s_0 = 2$, $\alpha = \beta = 1$), y sea la función peso:

$$W(z) = \frac{1}{(z-3)^3 - 2}\,.$$

En primer lugar, construimos una función $T : \tilde{H} \to \mathbb{C} \setminus \{(-\infty,-1] \cup [1,\infty)\}$ racional, real, analítica en H y tal que:

a) T tiene un cero de orden 3 en $z = \infty$.

b) $T/W - 1$ tiene un cero simple en $z = \infty$.

Tomamos:

$$T(z) = \frac{4(z+1)^3 + 4.0988}{4(z+1)^6 + 8.1976(z+1)^3 + 5.2004}$$

y, aplicando la fórmula (2), obtenemos:

$$C(z) = \frac{60z^5 - 87.901z^3 + 397.78z^2 + 451.85z + 551.92}{[4(z+1)^3 + 4.0988](z+4)(z+5)}$$

que es la función de transferencia del compensador que estabiliza el sistema.

References

1. L. Hörmander, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand, New York, 1966.
2. P. P. Khargonekar and A. Tannembaum, Non-Euclidean metrics and the robust stabilization of systems with parameter uncertainty, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-30** (1985), 1005–1013.
3. I. R. Petersen, Stabilization of an uncertain linear system in which uncertain parameters enter into the input matrix, *SIAM J. Control and Optimization* **26** (1988), 1257–1264.
4. A. Tannembaum, Feedback stabilization of linear dynamical plants with uncertainty in the gain factor, *Int. J. Contr.* **32** (1980), 1–16.
5. A. Tannembaum, *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects*, Lecture Notes in Math. 845, Springer-Verlag, 1981.
6. K. Zhou and P. P. Khargonekar, On the stabilization of uncertain linear systems via bound invariant Liapunov functions, *SIAM J. Control and Optimization* **26** (1988), 1265–1273.