Collect. Math. 39 (1988), 263–286

Sobre los espacios de Hörmander vectoriales $B_{p,w}(E)$

JOAQUIN MOTOS AND MARIA JESUS PLANELLS

Departamento de Matemática Aplicada,

Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera, s/n, 46022 Valencia, Spain

Received 14/FEB/89, revised version received 8/SEP/89

ABSTRACT

We extend some of the basic results on Hörmander spaces $B_{p,w}$ to the vector-valued case. Some new results on the $B_{p,w}$ are also given. Finally, we study locally convex properties of the vector-valued Hörmander local spaces.

Utilizamos conceptos de la teoría estándar de espacios localmente convexos. Para definiciones y notaciones no explicadas explícitamente nos remitimos a [8] y [9]. Los espacios vectoriales que utilizamos están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Dado un espacio localmente convexo E denotamos por E' su dual topológico, por $\hat{E}$ su compleción, por $\mathrm{sc}(E)$ el conjunto de todas las seminormas continuas sobre E, por E^A el producto topológico de A copias de E, y por $E^{(A)}$ la suma directa localmente convexa de A copias de E (A es un conjunto no vacío). E'_b es E' equipado de la topología fuerte. Dados dos espacios localmente convexos E y F, $L_c(E,F)$ denota el espacio de los operadores lineales continuos de E en F provisto de la topología de la convergencia uniforme sobre todos los subconjuntos precompactos de E; cuando $E = F$ simplemente escribimos $L_c(E)$, y cuando $F = \mathbb{C}$ ponemos E'_c. $E \otimes_\epsilon F$ (resp. $E \otimes_\pi F$) denota el producto tensorial inyectivo (resp. proyectivo) de E y F. $E \simeq F$ significa que E y F son isomorfos (es decir, linealmente homeomorfos). $E \hookrightarrow F$ significa que existe una aplicación lineal, inyectiva y continua de E en F.

Si E es un espacio localmente convexo, $C_c(\mathbb{R}^n, E)$ denota el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ en E equipado de la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de $\mathbb{R}^n$: si $E = \mathbb{C}$ escribimos $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las funciones complejas, continuas y de soporte compacto sobre $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}(\Omega)$ ($= \mathcal{D}$ si el abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ coincide con $\mathbb{R}^n$) es el espacio de las funciones test de Schwartz y $\mathcal{S}$ es el espacio de las funciones de decrecimiento rápido (para $\phi \in \mathcal{S}$ y $m \in \mathbb{N}$ pondremos

$$q_m(\phi) = \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^m \left|D^\alpha \phi(x)\right|.$$

Se dice que una sucesión $(\theta_j)_1^\infty$ en $\mathcal{D}$ es regularizante si $\theta_j \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta_j(x)\, dm_n(x) = 1$$

y $\theta_j(x) = 0$ si $|x| > \epsilon_j$ para $j = 1, 2, \dots$ (aquí $\epsilon_j \longrightarrow 0+$ y $m_n = (2\pi)^{-n/2} dx$ siendo dx la medida de Lebesgue). Si ϕ es una función compleja en $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_x\phi$ y $\check{\phi}$ serán las funciones definidas por $(\tau_x\phi)(y) = \phi(y - x)$, $\check{\phi}(y) = \phi(-y)$ para $y \in \mathbb{R}^n$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, e_x denota la función $e_x(y) = e^{ixy}$, $y \in \mathbb{R}^n$. Para definiciones, notaciones y resultados sobre espacios de funciones diferenciables y distribuciones, con valores vectoriales, nos remitimos a [15] y [16]. $\mathcal{F}T = \hat{T}$ es la transformada de Fourier de T.

Si el espacio E es un (LF)-estricto y $p \in [1, \infty]$, $L_p(E)$ denota el conjunto de todas las funciones (clases de funciones equivalentes) medibles Bochner de $\mathbb{R}^n$ en E, tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|^p\, dm_n(x)\right)^{1/p} < \infty$$

(si $p = \infty$ se supone $\operatorname{ess\,sup}\|f(x)\| < \infty$) para cada $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$. Consideramos $L_p(E)$ provisto de la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_p : \|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)\}$ [3]. Se sabe que $L_p(E)$ es sucesionalmente completo y que la topología que induce sobre el subespacio $L_p(m_n) \otimes E$ está intercalada entre las topologías ϵ y π [3, Vol. III]. Denotaremos por $\mathcal{W}$ el conjunto de todas las funciones peso atemperadas en el sentido de Hörmander [6, Def. 2.1.1]. Si $w \in \mathcal{W}$, M_w será el elemento de $\mathcal{W}$ definido por

$$M_w(x) = \sup_y \frac{w(x + y)}{w(y)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si E es un (LF)-estricto, $p \in [1, \infty]$ y $w \in \mathcal{W}$, $L_{p,w}(E)$ denota el conjunto de todas las funciones medibles Bochner de $\mathbb{R}^n$ en E, f, tales que $wf \in L_p(E)$. Transportamos la topología de $L_p(E)$ a $L_{p,w}(E)$ mediante el isomorfismo algebraico

$$\begin{array}{ccc} L_{p,w}(E) & \longrightarrow & L_p(E) \\ f & \longmapsto & wf. \end{array}$$

Es fácil demostrar entonces que la aplicación $k : L_{p,w}(E) \to \mathcal{S}'(E)$ dada por

$$\langle \phi, k(f) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, f(x)\, dm_n(x)$$

está bien definida y es lineal, inyectiva y continua (para ver que k es inyectiva utilícese el siguiente resultado que es bien conocido para espacios de Banach: Si E es un (LF)-estricto y $f : \mathbb{R}^n \to E$ es medible Bochner y tal que $u \circ f = 0$ a. e. para cada $u \in E'$, entonces $f = 0$ a. e.).

Si $f : A \to E$ ($A \subset \mathbb{R}^n$ y E es un espacio vectorial), $\tilde{f}$ denotará la extensión de f a todo $\mathbb{R}^n$ que toma el valor 0 fuera de A.

Comenzamos extendiendo al caso vectorial la definición de los espacios de Hörmander $B_{p,w}$ [6, Def. 2.2.1, p. 36].

Definición 1. Si $w \in \mathcal{W}$, $p \in [1, \infty]$ y E es un (LF)-estricto, denotamos por $B_{p,w}(E)$ el conjunto de todas las distribuciones vectoriales $T \in \mathcal{S}'(E)$ para las que existe alguna función $f \in L_{p,w}(E)$ de manera que

$$\langle \phi, \hat{T} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, f(x)\, dm_n(x), \qquad \phi \in \mathcal{S}.$$

Evidentemente $B_{p,w}(E)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{S}'(E)$. Provisto de la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{p,w} : \|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)\}$ donde

$$\|T\|_{p,w} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|w(x)\,\hat{T}(x)\|^p \, dm_n(x)\right)^{1/p} & \text{si } p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|w(x)\,\hat{T}(x)\| & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

(hemos puesto aquí $\hat{T}(x)$ en lugar de $f(x)$; cometeremos este abuso de notación en todo lo que sigue), $B_{p,w}(E)$ es un espacio localmente convexo isomorfo a $L_p(E)$.

Observaciones.

1. Naturalmente, $B_{p,w}(\mathbb{C})$ es el espacio de Hörmander $B_{p,w}$.

2. Sean w, p y E como en la Definición 1. Teniendo en cuenta las propiedades del espacio $L_p(E)$ resulta que el espacio $B_{p,w}(E)$ es sucesionalmente completo, es un (LF)-estricto si $p = 1$, y es un Fréchet (resp. Banach) si E es de Fréchet (resp. Banach). Si E es nuclear, el espacio $B_{p,w}(E)$ es tonelado y tiene la propiedad de aproximación, pues su complección es isomorfa a $B_{p,w}\hat{\otimes}_\epsilon E$ y este espacio es tonelado (recuérdese que el producto tensorial proyectivo de un espacio normado tonelado y un espacio tonelado es tonelado, y que el completado de un espacio tonelado es

tonelado) y tiene la propiedad de aproximación (utilícese la nuclearidad de E y [9, Vol. II, (10)(11), p. 259; (7), p. 284].

3. Es bien conocido que los espacios $L_p(E)$ y $L_p(m_n)\hat{\otimes}_\epsilon E$ no son isomorfos en general (sí lo son cuando E es un espacio de Fréchet-Schwartz y $p = \infty$ por [3, Vol. III, p. 126], y cuando E es un Fréchet nuclear y $p \in [1,\infty]$) por lo que los espacios de Hörmander $B_{p,w}(E)$ no se reducen a los espacios $B_{p,w}\hat{\otimes}_\epsilon E$. Por motivos de completitud damos algunos ejemplos relativos a esa falta de isomorfismo: En virtud de la no nuclearidad de $L_1(m_n)$, el espacio $L_1(\ell_1)$ ($\simeq L_1(m_n)\hat{\otimes}_\pi \ell_1$) no es isomorfo a $L_1(m_n)\hat{\otimes}_\epsilon \ell_1$ (utilícese [5, II, §2, Th. 8]). El espacio $L_1(\ell_p)$ tampoco es isomorfo a $L_1(m_n)\hat{\otimes}_\epsilon \ell_p$ cuando $2 \leq p < \infty$. En efecto, $L_1(\ell_p)$ es débilmente sucesionalmente completo (en [17] se prueba que $L_1(E)$ es débilmente sucesionalmente completo cuando el espacio de Banach E lo es) sin embargo $L_1(m_n)\hat{\otimes}_\epsilon \ell_p$ no lo es en virtud de [2, Cor. p. 258]. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita y $1 < p < \infty$ se sabe que $L_p(E)$ nunca es la complección de $L_p(m_n) \otimes E$ bajo ninguna norma razonable [10]. Si F es un espacio de Banach de dimensión infinita isomorfo a su cuadrado, $E \simeq F^{\mathbb{N}}$ y $1 < p < \infty$ entonces $L_p(E)$ no es isomorfo a $L_p(m_n)\hat{\otimes}_\epsilon E$ (en caso contrario se tendría

$$\left(L_p(F)\right)^{\mathbb{N}} \simeq \left(L_p(m_n)\hat{\otimes}_\epsilon F\right)^{\mathbb{N}}$$

lo que implicaría

$$L_p(F) \simeq (L_p(m_n)\hat{\otimes}_\epsilon F$$

en virtud de [1]).

Probamos ahora la contrapartida de [6, Th. 2.2.1].

Teorema 2

Si $w \in \mathcal{W}$, $p \in [1,\infty]$ y E es un (LF)-estricto, entonces

$$\mathcal{S}(E) \hookrightarrow B_{p,w}(E) \hookrightarrow \mathcal{S}'(E).$$

Si $p < \infty$ entonces $\mathcal{D} \otimes E$ es denso en $B_{p,w}(E)$.

Prueba. Basta tener presentes las definiciones, la continuidad de $\mathcal{F}$ y, si $p < \infty$, la densidad de $\mathcal{D} \otimes E$ en $L_{p,w}(E)$ (consecuencia de la de $\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R}^n) \otimes E$ en $L_p(E)$ y la de $\mathcal{D}$ en $L_{p,w}(m_n)$). □

En el teorema que sigue extendemos también al caso vectorial los teoremas Th. 2.2.5 y Th. 2.2.11 de [6].

Teorema 3

Sean $w \in \mathcal{W}$, $p \in [1, \infty]$ y E un (LF)-estricto. Entonces:

(1) La aplicación bilineal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_M \times B_{p,w}(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}'(E) \\ (\phi, T) & \longmapsto & \phi T \end{array}$$

es hipocontinua con respecto a los acotados.

(2) Si $\phi \in \mathcal{S}$ y $T \in B_{p,w}(E)$ entonces $\phi T \in B_{p,w}(E)$ y

$$\|\phi T\|_{p,w} \leq \|M_w \hat{\phi}\|_{L_1(m_n)} \|T\|_{p,w}$$

para cada $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$. Por consiguiente, la aplicación bilineal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \times B_{p,w}(E) & \longrightarrow & B_{p,w}(E) \\ (\phi, T) & \longmapsto & \phi T \end{array}$$

es continua.

(3) Supongamos $p < \infty$. Sea $\phi \in \mathcal{D}$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$ y $\phi = 1$ en $|x| \leq 1$. Pongamos, para cada $\epsilon > 0$, $\phi_\epsilon(x) = \phi(\epsilon x)$. Entonces $[\phi_\epsilon] \longrightarrow I$ en $L_c(B_{p,w}(E))$ cuando $\epsilon \longrightarrow 0+$ (I es el operador identidad de $B_{p,w}(E)$ y $[\phi_\epsilon]$ es el elemento de $L(B_{p,w}(E))$ dado por $[\phi_\epsilon](T) = \phi_\epsilon T$ para $T \in B_{p,w}(E)$).

Prueba. (1) Basta tener en cuenta que la inyección canónica de $B_{p,w}(E)$ en $\mathcal{S}'(E)$ es continua y que la aplicación bilineal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_M \times \mathcal{S}'(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}'(E) \\ (\phi, T) & \longmapsto & \phi T \end{array}$$

es hipocontinua con respecto a los acotados [15, p. 73].

(2) Sabemos que $\phi T \in \mathcal{S}'(E)$ y que $(\phi T)^\wedge = \hat{\phi} * \hat{T} \in \mathcal{O}_M(E)$ [15, p. 73]. Veamos que $\hat{\phi} * \hat{T} \in L_{p,w}(E)$. Sea $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$. Puesto que $\hat{T} \in L_{p,w}(E)$ se tiene

$$(\hat{\phi} * \hat{T})(x) = \langle \tau_x \check{\hat{\phi}}, \hat{T} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x - y) \hat{T}(y) \, dm_n(y), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \left\| w(x)(\hat{\phi} * \hat{T})(x) \right\| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} w(x) \, |\hat{\phi}(x - y)| \, \|\hat{T}(y)\| \, dm_n(y) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} M_w(x - y) \, |\hat{\phi}(x - y)| \, \|w(y)\hat{T}(y)\| \, dm_n(y) \\ &= \left(|M_w \hat{\phi}| * \|w\hat{T}\|\right)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $|M_w\hat{\phi}| \in L_1(m_n)$ y $\|w\hat{T}\| \in L_p(m_n)$, la desigualdad integral de Minkowski prueba que $|M_w\hat{\phi}| * \|w * \hat{T}\| \in L_p(m_n)$ y

$$\Big\||M_w\hat{\phi}| * \|w\hat{T}\|\Big\|_{L_p(m_n)} \leq \|M_w\hat{\phi}\|_{L_1(m_n)} \Big\|\|w\hat{T}\|\Big\|_{L_p(m_n)}$$
$$= \|M_w\hat{\phi}\|_{L_1(m_n)} \|T\|_{p,w}.$$

Si hacemos variar $\|\cdot\|$ en $\mathrm{sc}(E)$ obtenemos que $\hat{\phi} * \hat{T} \in L_{p,w}(E)$, es decir, $\phi T \in B_{p,w}(E)$, y también

$$\|\phi T\|_{p,w} \leq \|M_w\hat{\phi}\|_{L_1(m_n)} \|T\|_{p,w}$$

para toda $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$.

(3) De (2) y de

$$\sup\big\{\|M_w\hat{\phi}_\epsilon\|_{L_1(m_n)} : 0 < \epsilon < 1\big\} = c < \infty$$

se sigue que$\{[\phi_\epsilon] : 0 < \epsilon < 1\}$ es un subconjunto equicontinuo de $L\big(B_{p,w}(E)\big)$. Se tiene entonces [9, Vol. II, (2) p. 139] que las topologías de la convergencia simple y de la convergencia uniforme sobre los precompactos de $B_{p,w}(E)$ coinciden sobre $\{[\phi_\epsilon] : 0 < \epsilon < 1\}$. Por consiguiente, para demostrar (3) bastará ver, para cada $T \in B_{p,w}(E)$, que $\phi_\epsilon T \longrightarrow T$ en $B_{p,w}(E)$ cuando $\epsilon \longrightarrow 0+$. Sea entonces T un elemento de $B_{p,w}(E)$. Sea $\|\cdot\|$ una seminorma continua en E y sea η un número positivo. Si q es la inyección natural de $\mathcal{S}(E)$ en $B_{p,w}(E)$ hemos visto en el Teorema 2 que $q(\mathcal{S}(E))$ es denso en $B_{p,w}(E)$, por tanto podemos hallar $f \in \mathcal{S}(E)$ de manera que

$$\|T - q(f)\|_{p,w} < \frac{\eta}{2(1+c)} \, .$$

Como $\phi_\epsilon f \longrightarrow f$ en $\mathcal{S}(E)$, la continuidad de q prueba que

$$q(\phi_\epsilon f) = \phi_\epsilon q(f) \longrightarrow q(f)$$

en $B_{p,w}(E)$. Existe entonces un ϵ_0, $0 < \epsilon_0 < 1$, tal que

$$\|\phi_\epsilon q(f) - q(f)\|_{p,w} < \frac{\eta}{2} \, , \qquad 0 < \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Utilizando ahora la desigualdad triangular y la desigualdad obtenida en (2) llegamos a

$$\begin{aligned}\|T - \phi_\epsilon T\|_{p,w} &\leq \|T - q(f)\|_{p,w} + \|q(f) - \phi_\epsilon q(f)\|_{p,w} \\ &\quad + \|M_w\hat{\phi}_\epsilon\|_{L_1(m_n)}\|q(f) - T\|_{p,w} \\ &\leq (1 + c)\|T - q(f)\|_{p,w} + \|q(f) - \phi_\epsilon q(f)\|_{p,w} \\ &< \eta, \qquad 0 < \epsilon \leq \epsilon_0.\end{aligned}$$

La arbitrariedad de η y $\|\cdot\|$ prueba que $\phi_\epsilon T \longrightarrow T$ en $B_{p,w}(E)$. □

Sea $\theta \in \mathcal{D}$ y supongamos que $\theta \geq 0$ y

$$\int_{\Re^n} \theta(x)\, dm_n(x) = 1.$$

Pongamos $\theta_j(x) = j^n\theta(jx)$. Si $u \in B_{p,w}$ y $p < \infty$, las regularizadas $\theta_j * u$ convergen a u en $B_{p,w}$ [6, p. 42]. Es posible extender ese resultado demostrando que los espacios de Hörmander $B_{p,w}$, $1 \leq p < \infty$, poseen la propiedad de aproximación por regularización (ver Schwartz [15, p. 7–8] para la definición de esta propiedad). Demostraremos ahora que esto es cierto incluso en el caso vectorial. Para ello seguiremos los argumentos empleados en [15] para probar que determinados espacios de distribuciones tienen esa propiedad.

Teorema 4

Sean $w \in \mathcal{W}$, $p \in [1, \infty]$ y E un (LF)-estricto. Entonces

(1) La aplicación bilineal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}'_c \times B_{p,w}(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}'(E) \\ (u, T) & \longmapsto & u * T \end{array}$$

es hipocontinua con respecto a los acotados.

(2) La aplicación bilineal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \times B_{p,w}(E) & \longrightarrow & B_{p,w}(E) \\ (\phi, T) & \longmapsto & \phi * T \end{array}$$

es continua.

(3) Si $p < \infty$ (cuando, además, p sea > 1, se supondrá que el espacio E es de Fréchet) entonces $B_{p,w}(E)$ tiene la propiedad de aproximación por regularización, es decir, $\{\theta_j\} \longrightarrow I$ en $L_c(B_{p,w}(E))$ para cada sucesión regularizante $(\theta_j)_1^\infty$ en $\mathcal{D}$ ($\{\theta_j\}$ es el elemento de $L(B_{p,w}(E))$ dado por $\{\theta_j\}(T) = \theta_j * T$).

Prueba. (1) Basta utilizar el Teorema 2 y la hipocontinuidad con respecto a los acotados de la aplicación bilineal [15, p. 73]:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}'_c \times \mathcal{S}'(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}'(E) \\ (u, T) & \longmapsto & u * T \end{array}$$

(2) Si $\phi \in \mathcal{S}$ y $T \in B_{p,w}(E)$ entonces $(\phi * T)^\wedge = \hat{\phi} * \hat{T}$ y $\hat{T} \in L_{p,w}(E)$. De aquí se sigue que $\phi * T \in B_{p,w}(E)$ y que

$$\|\phi * T\|_{p,w} \leq \sup_{x \in \Re^n} |\hat{\phi}(x)|\, \|T\|_{p,w}, \qquad \|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$$

lo que demuestra (2).

(3) Teniendo en cuenta que $\langle\phi,(\tau_x T)^\wedge\rangle = \langle\phi, e_{-x}\hat{T}\rangle$, se comprueba que la aplicación $T \mapsto \tau_x T$ es un automorfismo de $B_{p,w}(E)$ tal que $\|\tau_x T\|_{p,w} = \|T\|_{p,w}$ para toda $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}^n$. A continuación probamos que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \vec{\tau}: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & L_c\big(B_{p,w}(E)\big) \\ & x & \longmapsto & \tau_x \end{array}$$

es continua. De lo anterior se sigue que $\{\tau_x : x \in \mathbb{R}^n\}$ es un subconjunto equicontinuo de $L(B_{p,w}(E))$ y por ello coinciden sobre él la topología de la convergencia simple sobre el subespacio denso de $B_{p,w}(E)$, $\mathcal{D} \otimes E$, y la topología de la convergencia precompacta [9, Vol. III p. 138, (2) p. 139]. Por tanto, para demostrar que $\vec{\tau}$ es continua basta ver que si $x_j \longrightarrow x$ en $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$, $\phi \in \mathcal{D}$ y $e \in E$ entonces

$$\lim_{j\to\infty} \|\tau_{x_j}(\phi\otimes e) - \tau_x(\phi\otimes e)\|_{p,w} = 0.$$

Esto último se deduce del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue ya que

$$\begin{aligned} \|\tau_{x_j}(\phi\otimes e) - \tau_x(\phi\otimes e)\|_{p,w} &= \big\|w[\tau_{x_j}(\phi\otimes e) - \tau_x(\phi\otimes e)]^\wedge\big\|_p \\ &= \big\|w(e_{-x_j} - e_{-x})(\hat{\phi}\otimes e)\big\|_p \\ &= \|e\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |w(y)\hat{\phi}(y)|^p\, |e^{-ix_j y} - e^{-ixy}|^p\, dm_n(y)\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

La continuidad de $\vec{\tau}$ y la completitud del espacio $L_c(B_{p,w}(E))$ [9, Vol. I, (1) p. 385, y Vol. II, (3) p. 143] demuestran que, para cada $\theta \in C_c(\mathbb{R}^n)'$, la integral

$$\theta(\vec{\tau}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathrm{sop}\,\mu_\theta} \vec{\tau}(x)\, d\mu_\theta(x)$$

es un elemento bien determinado de $L(B_{p,w}(E))$ (aquí μ_θ es la única medida de Borel y de soporte compacto sobre $\mathbb{R}^n$ que representa a la funcional θ en virtud del teorema de representación de Riesz). En particular, observando que las funciones θ de $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ pueden considerarse elementos de $C_c(\mathbb{R}^n)'$ por medio de

$$\langle f,\theta\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\theta(x)\, dm_n(x), \qquad f \in C(\mathbb{R}^n),$$

se obtiene, vía el teorema de Hahn-Banach,

$$\theta(\vec{\tau}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathrm{sop}\,\theta} \vec{\tau}(x)\,\theta(x)\, dm_n(x)$$

para toda $\theta \in C_{00}(\Re^n)$. Seguidamente vamos a demostrar que

$$\theta(\vec{\tau}) = (2\pi)^{-n/2}(\theta * T)$$

para cada $\theta \in \mathcal{D}$ y cada $T \in B_{p,w}(E)$. Dados θ y T, el operador

$$\begin{array}{rcl} \tilde{T} \ : L_c(B_{p,w}(E)) & \longrightarrow & B_{p,w}(E) \\ u & \longmapsto & u(T) \end{array}$$

es continuo, por ello

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-n/2}\theta(\vec{\tau})(T) &= \left(\int_{\mathrm{sop}\,\theta} \vec{\tau}(x)\,\theta(x)\,dm_n(x)\right)(T) \\
&= \tilde{T}\left(\int_{\mathrm{sop}\,\theta} \vec{\tau}(x)\,\theta(x)\,dm_n(x)\right) \\
&= \int_{\mathrm{sop}\,\theta} \tilde{T}\circ\theta\vec{\tau}\,dm_n \\
&= \int_{\mathrm{sop}\,\theta} \theta(x)\,\tau_x T\,dm_n(x).
\end{aligned}$$

Utilizando ahora la continuidad de T y la de las funciones $x \in \mathrm{sop}\,\theta \mapsto \theta(x)\,\tau_{-x}\phi \in \mathcal{S}$, $\phi \in \mathcal{S}$, resulta

$$\begin{aligned}
\langle\phi, \theta(\vec{\tau})(T)\rangle &= \left\langle\phi, (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathrm{sop}\,\theta} \tau_x T\,\theta(x)\,dm_n(x)\right\rangle \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathrm{sop}\,\theta} \langle\phi, \tau_x T\rangle\,\theta(x)\,dm_n(x) \\
&= \left\langle(2\pi)^{-n/2}\int_{\Re^n} \tau_{-x}\phi\,\theta(x)\,dm_n(x), T\right\rangle \\
&= \left\langle\phi, (2\pi)^{-n/2}\theta * T\right\rangle, \qquad \phi \in \mathcal{S}.
\end{aligned}$$

Supongamos finalmente que $(\theta_j)_1^\infty$ es una sucesión regularizante en $\mathcal{D}$. Entonces $\theta_j \longrightarrow \delta$ en $(C_c(\mathbb{R}^n))'_c$. En virtud de [16, Cor. 2, p. 130], la aplicación

$$\begin{array}{rcl} (C_c(\mathbb{R}n))'_c \times C_c(\mathbb{R}^n, L_c(B_{p,w}(E))) & \longrightarrow & L_c(B_{p,w}(E)) \\ (\theta, \vec{\phi}) & \longmapsto & \theta(\vec{\phi}) = (2\pi)^{-n/2}\displaystyle\int_{\mathrm{sop}\,\mu_\theta} \vec{\phi}(x)\,d\mu_\theta(x) \end{array}$$

es hipocontinua con respecto a los equicontinuos de $C_c(\mathbb{R}^n)'$ y a los relativamente compactos de $C_c(\mathbb{R}^n, L_c(B_{p,w}(E)))$, luego, en particular, separadamente continua.

Por consiguiente $\theta_j(\vec{T}) \longrightarrow \delta(\vec{T})$ cuando $j \longrightarrow \infty$ en $L_e(B_{p,w}(E))$. Según hemos visto más arriba

$$\theta_j(\vec{T}) = (2\pi)^{-n/2}\{\theta_j\}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

por lo que si demostramos que $\delta(\vec{T}) = (2\pi)^{-n/2} I$ habrá concluido la prueba del teorema: Por definición

$$\delta(\vec{T}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\operatorname{sop} \mu_\delta} \vec{T}(x)\, d\mu_\delta(x)$$

y como μ_δ es la medida de Borel que toma valor 1 en los borelianos que contienen al origen y el valor 0 en caso contrario, resulta que

$$\delta(\vec{T}) = (2\pi)^{-n/2}\vec{T}(0) = (2\pi)^{-n/2} I. \; \Box$$

En [6, Th. 2.2.3, p. 38] se demuestra que si $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ son tales que

$$\frac{w_2(x)}{w_1(x)} \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } x \longrightarrow \infty,$$

entonces la inyección canónica $B_{p,w_1} \cap \mathcal{E}'(K) \hookrightarrow B_{p,w_2}$ es compacta, para cada $p \in [1, \infty]$ y cada compacto K de $\Re^n$. Extendemos ahora este resultado de Hörmander al caso vectorial y para ello consideramos el conjunto $\mathcal{E}'(K, E)$ de las distribuciones sobre $\Re^n$ con valores en E cuyo soporte está contenido en K. Recordemos también que una aplicación lineal y continua entre dos espacios localmente convexos se dice completamente continua si transforma conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos.

Teorema 5

Sea K un compacto de $\Re^n$, E un espacio de Fréchet-Montel, $p \in [1, \infty]$ y $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ tales que

$$\frac{w_2(x)}{w_1(x)} \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } x \longrightarrow \infty.$$

Entonces la inyección canónica

$$B_{p,w_1}(E) \cap \mathcal{E}'(K, E) \hookrightarrow B_{p,w_2}(E)$$

es completamente continua. $B_{p,w_1}(E) \cap \mathcal{E}'(K, E)$ se considera equipado de la topología inducida por $B_{p,w_1}(E)$). Si $p = 1$ se puede suponer que E es un (LF)-estricto de Montel.

Prueba. En el transcurso de la prueba la letra c denotará una constante positiva, no necesariamente la misma cada vez que aparece.

Es trivial comprobar que $B_{p,w_1}(E)$ es un subespacio lineal de $B_{p,w_2}(E)$ y que la correspondiente inyección canónica es continua. Para demostrar el teorema bastará ver, debido a que $B_{p,w_2}(E)$ es un espacio de Fréchet o un (LF)-estricto, que toda sucesión acotada en $B_{p,w_1}(E) \cap \mathcal{E}'(K,E)$ admite una subsucesión convergente en $B_{p,w_2}(E)$. Sea $(T_m)_1^\infty$ una tal sucesión y sea $\theta \in \mathcal{D}$ tal que $\theta = 1$ en un entorno de K. Entonces $T_m = \theta T_m$ y, por consiguiente, $\hat{T}_m = \hat{\theta} * \hat{T}_m$ para $m = 1,2,\ldots$. Por lo tanto $\hat{T}_m(x) = \hat{\theta} * \hat{T}_m(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (cambiando, si es necesario, $\hat{T}_m$ en un conjunto de medida cero). Por ello $(\hat{T}_m)_1^\infty \subset \mathcal{O}_M(E)$. Veamos ahora que el conjunto $\{\hat{T}_m : m \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto en $C_c(\mathbb{R}^n, E)$. En virtud del teorema de Ascoli tendremos que probar que $\{\hat{T}_m(x) : m \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto en E, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, y que $\{\hat{T}_m : m \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo en $\mathbb{R}^n$. Fijemos un x de $\mathbb{R}^n$. Como

$$\hat{T}_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(x-y)\, \hat{T}_m(y)\, dm_n(y), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

es fácil comprobar que

$$\|\hat{T}_m(x)\| \leq \|T_m\|_{p,w_1} \|\tau_x \check{\hat{\theta}}/w_1\|_{p'}, \qquad m = 1,2,\ldots,$$

para cada $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$ ($p' = 1$ si $p = \infty$). Teniendo en cuenta que $\{T_m : m \in \mathbb{N}\}$ es un acotado en $B_{p,w_1}(E)$ se sigue de aquí que, para cada $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$,

$$\sup_m \|\hat{T}_m(x)\| < \infty.$$

En consecuencia, el conjunto $\{\hat{T}_m(x) : m \in \mathbb{N}\}$ es acotado en E luego relativamente compacto puesto que E es de Montel. Establezcamos ahora la equicontinuidad de $\{\hat{T}_m : m \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{R}^n$. Sea x_0 un punto cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Si B es una bola cerrada centrada en x_0 se tiene que

$$\|\hat{T}_m(x) - \hat{T}_m(x_0)\| \leq 2 \left(\sum_1^n \sup_{y \in B} \left\| \frac{\partial \hat{T}_m}{\partial x_j}(y) \right\|^2 \right)^{1/2} |x - x_0|, \qquad x \in B,$$

para cada $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$ (utilícese el teorema de los bipolares). Ahora bien, para $x \in \mathbb{R}^n$ y $j = 1,2,\ldots,n$, se tiene

$$\frac{\partial \hat{T}_m}{\partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_j}(x-y)\, \hat{T}_m(y)\, dm_n(y)$$

(utilizamos el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para funciones con valores vectoriales [3, Vol. II, p. 259]). Por tanto, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $\|\cdot\| \in \operatorname{sc}(E)$, al ser

$$\frac{1}{w_1(y)} \leq c\left(1 + |y|^2\right)^s$$

para un entero positivo s, se cumple

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial \hat{T}_m}{\partial x_j}(x)\right\| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_j}(x-y)\right| \|\hat{T}_m(y)\|\, dm_n(y) \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|y|^2)^{n+s}|(\partial\hat{\theta}/\partial x_j)(x-y)|\, \|w_1(y)\hat{T}_m(y)\|}{(1+|y|^2)^n}\, dm_n(y) \\
&\leq c q_{n+s}\left(\tau_x\left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_j}\right)^{\vee}\right) \|T_m\|_{p,w_1} \\
&\leq c\left(1+|x|^2\right)^{n+s} q_{n+s}\left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_j}\right) \|T_m\|_{p,w_1}
\end{aligned}$$

(recuérdese que $q_m(\tau_x\phi) \leq 2^m\left(1+|x|^2\right)^m q_m(\phi)$, $\phi \in S$, $m = 0,1,2,\ldots$). De las desigualdades anteriores y de la acotación de $\{T_m : m \in \mathbb{N}\}$ en $B_{p,w_1}(E)$ se deduce que $\{\hat{T}_m : m \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo en el punto x_0. Por lo tanto el conjunto $\{\hat{T}_m : m \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$. Si el espacio E es un Fréchet-Montel, la sucesión $(\hat{T}_m)_1^\infty$ admite entonces una subsucesión convergente en $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$. Analicemos el caso en que el espacio E ($= \operatorname{ind}_{k\to} E_k$) es un (LF)-estricto de Montel: Sea $(H_j)_1^\infty$ una sucesión fundamental de compactos de $\mathbb{R}^n$, entonces la aplicación

$$\begin{array}{rccc}
h: & \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E) & \longrightarrow & \prod_{j=1}^\infty \mathcal{C}_c(H_j, E) \\
 & f & \longmapsto & \left(f_{|H_j}\right)_1^\infty
\end{array}$$

es lineal, inyectiva y continua, y los espacios $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$ y $h(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, E))$ son isomorfos. Cada $\mathcal{C}_0(H_j, E)$ es isomorfo al límite inductivo $\operatorname{ind}_{k\to} \mathcal{C}_c(H_j, E_k)$ (ver p. e., [14, Cor. 1.7.3, p. 20]). Es fácil comprobar entonces que los espacios $\mathcal{C}_c(H_j, E)$ son (LF)-estrictos. Por tanto, si L es la clausura en $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$ del conjunto $\{\hat{T}_m : m \in \mathbb{N}\}$ resulta que, para cada j, $\operatorname{pr}_j h(L)$ es un subespacio compacto y, naturalmente, metrizable de algún $\mathcal{C}_c(H_j, E_k)$. Entonces $h(L)$ es un subespacio metrizable de

$$\prod_{j=1}^\infty \mathcal{C}_c(H_j, E).$$

En consecuencia, L es un subespacio metrizable de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$ y, como es compacto, $(\hat{T}_m)_1^\infty$ admite una subsucesión convergente en $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$.

Sea entonces $(\hat{T}_{m_k})_1^\infty$ una subsucesión de $(\hat{T}_m)_1^\infty$ convergente en $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$. Es fácil demostrar que la sucesión $(T_{m_k})_1^\infty$ converge en $B_{p,w_2}(E)$. En efecto, dados $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$ y $\epsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que

$$w_2(x) \leq \frac{\epsilon}{2^{(p+1)/p} D_1}\, w_1(x), \qquad |x| > \delta,$$

siendo

$$D_1 = \sup_m \|T_m\|_{p,w_1}$$

(consideramos primero el caso $p < \infty$). Si

$$D_2 = \max\left\{w_2(x) : |x| \leq \delta\right\},$$

sea l un entero positivo tal que

$$\max_{|x|\leq\delta} \left\|\hat{T}_{m_j}(x) - \hat{T}_{m_k}(x)\right\| \leq \frac{\epsilon}{D_2(2m_n(B'(0,\delta)))^{1/p}}$$

para $j, k, \geq l$. Se sigue de aquí que

$$\left\|T_{m_j} - T_{m_k}\right\|_{p,w_2} \leq \epsilon$$

para $j, k \geq l$. Por consiguiente, la sucesión $(T_{m_k})_1^\infty$ es de Cauchy en $B_{p,w_2}(E)$ luego convergente ya que este espacio es completo. En el caso $p = \infty$ se obtiene el mismo resultado haciendo las modificaciones usuales. □

La prueba del siguiente resultado (el caso escalar corresponde al Th. 2.2.9 de [6]) se deja al lector.

Teorema 8

Sean $w \in W$, $p \in [1, \infty[$ y E un espacio de Banach cuyo dual E' posee la propiedad de Radon-Nikodym [2]. Entonces la aplicación $Z : B_{p',1/w}(E') \to (B_{p,w}(E))'$ definida por

$$\langle T, Z(S)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \hat{T}(x), \hat{S}(x)\rangle\, dm_n(x)$$

es una isometría.

Veamos a continuación algunos resultados lineal-topológicos relativos a ciertos límites inductivos y proyectivos de espacios de Hörmander escalares:

1) Sea $(w_i)_1^\infty$ una sucesión en W tal que $w_i \le w_{i+1}$ para $i = 1,2,\dots$ y sea $p \in [1,\infty[$. Pongamos

$$B_{p,(w_i)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_{p,w_i}$$

y equipemos a este espacio de la topología generada por la familia de normas $\{|\cdot|_{p,w_i} : i = 1,2,\dots\}$. Obviamente este espacio es isomorfo al límite proyectivo de la sucesión proyectiva $(B_{p,w_i}; I_{ij})$ (para $j \ge i$ denotamos por I_{ij} la inyección canónica de B_{p,w_j} en B_{p,w_i}). Como $\mathcal{D}$ es denso en cada B_{p,w_i} ese límite proyectivo es reducido. Podemos identificar entonces los duales B'_{p,w_i} $(= B_{p',1/w_i})$ con subespacios de $B'_{p,(w_i)}$ tales que $B'_{p,w_i} \subset B'_{p,w_j}$ $(i < j)$ y tales que

$$B'_{p,(w_i)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} B'_{p,w_i};$$

por tanto podemos formar el límite inductivo (localmente convexo) $\mathrm{ind}_{i\to} B'_{p,w_i}$ y obtener que la aplicación identidad $I : \mathrm{ind}_{i\to} B'_{p,w_i} \to (B'_{p,(w_i)})'_b$ es continua. Después demostraremos que esa aplicación es un isomorfismo.

De lo anterior se deduce que $B'_{p,(w_i)}$ es un espacio normal de distribuciones, separable y de Fréchet, con la propiedad de aproximación (utilícese [9, Vol. II, (10) p. 259 y (7) p. 247]) , y tal que sus subespacios normables son isomorfos a subespacios de $L_p(0,1)$ (utilícese [1, Lema 1]). Si además $p > 1$, entonces $B_{p,(w_i)}$ es totalmente reflexivo (es decir, todos sus cocientes son reflexivos) en virtud de [4, Corolario de la Prop. 10, p. 101] ; en este caso, su dual fuerte $(B_{p,(w_i)})'_b$ es ultrabornológico ([9, Vol. I, (4) p. 265 y (4) p. 400]), y, como $\mathrm{ind}_{i\to} B'_{p,w_i}$ es un (LB), la aplicación identidad $I : (B'_{p,(w_i)})'_b \to \mathrm{ind}_{i\to} B'_{p,w_i}$ resulta continua en virtud del teorema de la gráfica cerrada en la forma dada por Grothendieck [5, Th. B, p. 17].

Si la sucesión $(w_i)_1^\infty$ satisface también la condición

$$w_i^2 \le w_{i-1}\, w_{i+1}, \qquad i \ge 2,$$

entonces $B_{p,(w_i)}$ es isomorfo a un subespacio de $\ell_\infty \hat{\otimes}_\epsilon s$, en donde s es el espacio de Fréchet nuclear de las sucesiones de números complejos de decrecimiento rápido. En efecto, de esa condición sobre los pesos y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue

$$|\cdot|_{p,w_i}^2 \le |\cdot|_{p,w_{i-1}}\, |\cdot|_{p,w_{i+1}}, \qquad i = 2,3,\dots,$$

por lo cual el espacio de Fréchet $B_{p,(w_i)}$ tiene la propiedad (DN) [19]. Pero entonces, [19, Th. 2.6] demuestra que $B_{p,(w_i)}$ es isomorfo a un subespacio de $\ell_\infty \hat{\otimes}_\epsilon s$.

2) Sea $(w_i)_1^\infty$ una sucesión en $\mathcal{W}$ tal que

$$\frac{w_{i+1}(x)}{w_i(x)} \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } x \to \infty, \ i = 1, 2, \ldots .$$

y sea $p \in [1, \infty[$. Pongamos

$$\tilde{B}_{p,(w_i)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{p,w_i}.$$

Si K es un compacto de $\mathbb{R}^n$, las inyecciones canónicas $B_{p,(w_i)} \cap \mathcal{E}'(K) \hookrightarrow B_{p,w_{i+1}}$ son continuas por lo que el límite inductivo

$$\tilde{B}_{p,(w_i)} \cap \mathcal{E}'(K) = \operatorname{ind}_{i\to} B_{p,w_i} \cap \mathcal{E}'(K))$$

es un espacio de Silva. Utilizando las propiedades de estos espacios vemos que $\tilde{B}_{p,(w_i)} \cap \mathcal{E}'(K)$ es un espacio de distribuciones, (DF), ultrabornológico y completo (reflexivo cuando $1 < p < \infty$ [9, Vol. I,(6) p. 403]). Se sigue de aquí que, si $(K_j)_1^\infty$ es una sucesión fundamental de compactos de $\mathbb{R}^n$, el límite inductivo

$$\tilde{B}_{p,(w_i)} \cap \mathcal{E}' = \operatorname{ind}_{j\to} [\operatorname{ind}_{i\to} (B_{p,w_i} \cap \mathcal{E}'(Kj))]$$

(la topología límite inductivo es independiente de la sucesión fundamental de compactos $(K_j)_1^\infty$) también es un espacio de distribuciones tipo (DF) y ultrabornológico (reflexivo si $1 < p < \infty$).

Extendemos ahora al caso vectorial la definición de los espacios locales de Hörmander $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ [6, p. 42].

Definicion 7. Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, E un (LF)-estricto, $w \in \mathcal{W}$ y $p \in [1, \infty]$, denotamos por $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ el conjunto de todas las distribuciones vectoriales $T \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ tales que, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la aplicación $\phi T : S \to E$ definida por

$$\langle \xi, \phi T \rangle = \langle \xi_{|\Omega} \phi, T \rangle$$

está en $B_{p,w}(E)$. Consideramos $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ equipado de la topología generada por la familia de seminormas

$$\{\|\ \|_{\phi,p,w} : \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)\}$$

donde

$$\|T\|_{\phi,p,w} = \|\phi T\|_{p,w}, \qquad T \in B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E).$$

Observaciones. 1. Obviamente $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, \mathbb{C})$ es el espacio $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega)$.

2. Es fácil comprobar que $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$ es un subespacio local de $\mathcal{D}'(\Omega, E)$, es decir, satisface las condiciones siguientes:

(i) $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $T \in B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$ implican $\phi T \in B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$,

(ii) $T \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ y $\phi T \in B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ implican $T \in B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$.

3. La restricción a Ω de cada elemento de $B_{p,w}(E)$ está en $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$ en virtud del Teorema 3.

4. Si $(K_i)_1^\infty$ es una sucesión fundamental de compactos de Ω y $\phi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ es tal que $\phi_i = 1$ en K_i, $i = 1, 2, \ldots$, entonces la topología de $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$ también está generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{\phi_i, p, w} : i = 1, 2, \ldots, \ \|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)\}$. En efecto, sean $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$; si K_j es tal que sop $\phi \subset K_j$ entonces $\phi T = \tilde{\phi}(\phi_j T)$ para cada $T \in B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$, por lo que, en virtud del Teorema 3, resulta

$$\|\phi T\|_{p,w} = \|\tilde{\phi}(\phi_j T)\|_{p,w} \leq \|\tilde{\phi}\|_{1,M_w} \|\phi_j T\|_{p,w}, \qquad T \in B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E),$$

y esto prueba la anterior afirmación. En consecuencia, $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$ es isomorfo a un subespacio de $(B_{p,w}(E))^{\mathbb{N}} \simeq (L_p(E))^{\mathbb{N}}$.

Omitimos la prueba del siguiente sencillo pero útil resultado.

Teorema 8

Sean Ω, E, w y p como en la definición anterior. Entonces

(1) $\mathcal{E}(\Omega, E) \hookrightarrow B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega, E)$.

(2) E es isomorfo a un subespacio de $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$ y $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$.

(3) Si E es isomorfo a un subespacio (complementado) de un (LF)-estricto F entonces $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$ es isomorfo a un subespacio (complementado) de $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, F)$.

Nota. Debido a que contiene una copia complementada de $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega)$, el espacio $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$ no es de tipo (DF) y tampoco es semi-Montel (téngase en cuenta que $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega)$ es un Fréchet no Montel y no normable [6, Th. 2.3.7, Th. 2.3.9, Cor. 4.1.3].

Lema

Si E es un (LF)-estricto nuclear y $p \in [1, \infty[$, entonces el espacio $L_p(E)$ es un (LF) estricto.

Prueba. Sea E el límite inductivo estricto de la sucesión de espacios de Fréchet $(E_k)_1^\infty$. Razonando como en [3. Vol. II. d) p. 254] se comprueba fácilmente que

$$L_p(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_p(E_k).$$

También es fácil ver que $L_p(E)$ es tonelado (basta tener en cuenta que $L_p(\mathbb{R}^n) \otimes_\epsilon E$ es un subespacio denso y tonelado de $L_p(E)$). Aplicando entonces [18, (9) p. 41] el espacio $L_p(E)$ es el límite inductivo estricto de la sucesión de espacios de Fréchet $(L_p(E_k))_1^\infty$. □

Teorema 9

Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, E un (LF)-estricto, $w \in \mathcal{W}$ y $p \in [1, \infty]$. Entonces el espacio $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ es sucesionalmente completo, y completo si $p < \infty$ y E es nuclear o si $p = 1$.

Prueba. Sea $(T_i)_1^\infty$ una sucesión de Cauchy en $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$. En virtud del Teorema 8 y de la completitud de $\mathcal{D}'(\Omega, E)$ podemos hallar $T \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ tal que $T_i \longrightarrow T$ en $\mathcal{D}'(\Omega, E)$. Veamos que $T \in B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Evidentemente $\phi T_i \longrightarrow \phi T$ en $\mathcal{D}'(\Omega, E)$. Por otra parte. $(\phi T_i)_1^\infty$ es de Cauchy en $B_{p,w}(E)$ luego existe $Z \in B_{p,w}(E)$ tal que $\phi T_i \longrightarrow Z$ en $B_{p,w}(E)$. Se tiene entonces para $\xi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
\langle \xi, Z\rangle &= \lim_i \langle \xi, \phi T_i\rangle && (*)\\
&= \lim_i \langle \xi_{|\Omega}\phi, T_i\rangle \\
&= \lim_i \langle \xi_{|\Omega}\phi\psi, T_i\rangle && (\psi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \psi = 1 \text{ en sop}\,\phi)\\
&= \lim_i \langle \xi_{|\Omega}\psi, \phi T_i\rangle \\
&= \langle \xi_{|\Omega}\phi\psi, T\rangle \\
&= \langle \xi_{|\Omega}\phi, T\rangle \\
&= \langle \xi, \phi T\rangle
\end{aligned}$$

(hemos utilizado el Teorema 2 en el paso $(*)$) lo que demuestra que $\phi T \in B_{p,w}(E)$. Finalmente. $T_i \longrightarrow T$ en $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ pues, según acabamos de ver, $\phi T_i \longrightarrow \phi T$ en $B_{p,w}(E)$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En consecuencia, el espacio $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ es sucesionalmente completo (y un espacio de Fréchet cuando E es un Fréchet en virtud de la observación 4). Si $p < \infty$ y E es nuclear entonces $B_{p,w}(E)$ $(\simeq L_p(E))$ es completo en virtud del lema precedente, por lo que repitiendo el anterior argumento (sustituyendo sucesiones de Cauchy por redes de Cauchy) vemos que el espacio $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ es completo. Del mismo modo se ve la completitud de $B_{1,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$, pues también $B_{1,w}(E)$ es completo ($L_1(E)$ es un (LF)-estricto por [3. Vol. III. p. 120]).

□

Teorema 10

Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, E un (LF)-estricto, $w \in \mathcal{W}$ y $p \in [1,\infty[$. Entonces la topología inducida por $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ sobre $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega) \otimes E$ está intercalada entre las topologías ϵ y π.

Prueba. Puesto que la aplicación $Q : B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega) \times E \to B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ dada por

$$\langle \phi, Q(u, e) \rangle = \langle \phi, u \rangle\, e, \qquad \phi \in \mathcal{D}(E),$$

es bilineal y continua, su linealizada q es una aplicación continua (y, obviamente, inyectiva) de $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega) \otimes_\pi E$ en $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$.

Demostraremos ahora que q^{-1} es una aplicación continua de $q(B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega) \otimes E)$, provisto de la topología inducida por $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$, sobre $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega) \otimes_\epsilon E$: Sean U un entorno de 0 en $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$. Pongamos $V = \{e : \|e\| \leq 1\}$ y supongamos que U está determinado por las funciones $\phi_1, \ldots, \phi_r \in \mathcal{D}(\Omega)$ y el número $\epsilon > 0$. Teniendo en cuenta que $u \longmapsto (\phi u)_{\phi \in \mathcal{D}(\Omega)}$ es una inmersión de $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ en $(B_{p,w})^{\mathcal{D}(\Omega)}$, que $\left((B_{p,w})^{\mathcal{D}(\Omega)}\right)' = (B'_{p,w})^{(\mathcal{D}(\Omega))}$ y que la aplicación $Z : B_{p',1/w} \to B'_{p,w}$ definida por

$$\langle u, Z(\nu) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x)\, \hat{\nu}(x)\, dm_n(x)$$

es una isometría [6, p. 42], podemos hallar entonces números complejos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ y $\nu_1, \ldots, \nu_r \in B_{p',1/w}$ tales que

$$\sum_{k=1}^{r} |\lambda_k| \leq 1, \qquad \|\nu_k\|_{B_{p',1/w}} \leq \frac{1}{\epsilon}, \qquad k = 1, \ldots, r,$$

y

$$\langle u, \xi \rangle = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_k u)^\wedge(x)\, \hat{\nu}(x)\, dm_n(x), \qquad u \in B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega), \qquad \xi \in U^\circ.$$

Por consiguiente, para

$$z = \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes e_i \in B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega) \otimes E, \quad \xi \in U^\circ, \quad e' \in V^\circ$$

tenemos (utilícese el teorema de los bipolares y la desigualdad de Hölder)

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{m}\langle u_i,\xi\rangle\langle e_i,e'\rangle\right| &= \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\int_{\mathbb{R}^n}(\phi_k u_i)^\wedge(x)\,\hat{\nu}_k(x)\,dm_n(x)\langle e_i,e'\rangle\right|\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}\left|\left\langle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}\lambda_k(\phi_k u_i)^\wedge(x)\hat{\nu}_k(x)e_i,e'\right\rangle\right|\,dm_n(x)\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}\left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}\lambda_k(\phi_k u_i)^\wedge(x)\hat{\nu}_k(x)e_i\right\|\,dm_n(x)\\ &\le \sum_{k=1}^{r}|\lambda_k|\int_{\mathbb{R}^n}\left\|w(x)\sum_{i=1}^{m}(\phi_k u_i)^\wedge(x)e_i\right\|\left|\frac{\hat{\nu}_k(x)}{w(x)}\right|\,dm_n(x)\\ &\le \sum_{k=1}^{r}|\lambda_k|\,\|q(z)\|_{\phi_k,p,w}\|\nu_k\|_{B_{p',1/w}}\\ &\le \frac{1}{\epsilon}\max_{1\le k\le r}\|q(z)\|_{\phi_k,p,w}.\end{aligned}$$

Se sigue de aquí que

$$\sup_{(\xi,e')\in U^\circ\times V^\circ}\left|\sum_{i=1}^{m}\langle u_i,\xi\rangle\langle e_i,e'\rangle\right| \le \frac{1}{\epsilon}\max_{1\le k\le r}\|q(z)\|_{\phi_k,p,w}$$

y esto concluye la prueba del teorema. □

Corolario

Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, E un (LF) estricto nuclear, $w \in \mathcal{W}$ y $p \in [1,\infty[$, entonces $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega,E)$ contiene una copia de $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega)\hat{\otimes}_\epsilon E$.

Prueba. Es consecuencia inmediata de la nuclearidad de E y de los teoremas 9 y 10. □

Nota. Si Ω es un abierto de $\mathbb{C}^n$, E un (LF) estricto nuclear, $w \in \mathcal{W}$ y $p \in [1,\infty[$, el espacio $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega,E)$ contiene una copia de $\mathcal{H}(\Omega,E)$ (espacio de las funciones holomorfas de Ω en E equipado de la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de Ω). En efecto, sobre $\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \Delta u = 0\}$ (espacio de las funciones armónicas en Ω), la topología que induce $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ coincide con la inducida por $\mathcal{E}(\Omega)$ [6, Th. 4.1.7, Cor 4.1.3]. Por consiguiente, $\mathcal{H}(\Omega)$ provisto de la topología inducida por $\mathcal{E}(\Omega)$ es un subespacio de $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Pero entonces, $\mathcal{H}(\Omega)\hat{\otimes}_\epsilon E$ es isomorfo a un subespacio de $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega,E)$ en virtud del corolario anterior. Para terminar se utiliza el isomorfismo $\mathcal{H}(\Omega,E) \simeq \mathcal{H}(\Omega)\hat{\otimes}_\epsilon E$ [8, p. 366].

Teorema 11

Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $(E_i)_1^\infty$ una sucesión de espacios de Fréchet, $w \in \mathcal{W}$ y $p \in [1, \infty]$. Entonces se tiene el isomorfismo

$$B_{p,w}^{\mathrm{loc}}\left(\Omega, \prod_{i=1}^{\infty} E_i\right) \simeq \prod_{i=1}^{\infty} B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E_i).$$

Prueba. Pongamos $E = \prod E_i$ y, para cada i, sea pr_i la proyección de E sobre E_i. La aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i=1}^{\infty} B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E_i) \\ & T & \longmapsto & (\mathrm{pr}_i \circ T)_1^\infty \end{array}$$

está bien definida y es lineal, inyectiva y continua. Probaremos solamente que está bien definida: Evidentemente $\mathrm{pr}_i \circ T \in \mathcal{D}'(\Omega, E_i)$, $(i = 1, 2, \ldots)$. Sea ahora ϕ un elemento cualquiera de $\mathcal{D}(\Omega)$. Entonces, para cada $\xi \in \mathcal{S}$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \xi, [\phi(\mathrm{pr}_i \circ T)]^\wedge \rangle &= \langle \hat{\xi}, \phi(\mathrm{pr}_i \circ T) \rangle \\ &= \langle \hat{\xi}_{|\Omega} \phi, \mathrm{pr}_i \circ T \rangle \\ &= \mathrm{pr}_i \langle \hat{\xi}_{|\Omega} \phi, T \rangle \\ &= \mathrm{pr}_i \langle \hat{\xi}, \phi T \rangle \\ &= \mathrm{pr}_i \langle \xi, (\phi T)^\wedge \rangle \\ &= \mathrm{pr}_i \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x)\, (\phi T)^\wedge(x)\, dm_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x)\, [\mathrm{pr}_i \circ (\phi T)^\wedge](x)\, dm_n(x) \\ &= \langle \xi, \mathrm{pr}_i \circ (\phi T)^\wedge \rangle \end{aligned}$$

por lo que

$$[\phi(\mathrm{pr}_i \circ T)]^\wedge = \mathrm{pr}_i \circ (\phi T)^\wedge \in L_{p,w}(E_i),$$

es decir, $\phi(\mathrm{pr}_i \circ T) \in B_{p,w}(E_i)$. Por consiguiente,

$$\mathrm{pr}_i \circ T \in B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E_i), \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Demostraremos ahora que J es sobreyectiva: Sea $(T_i)_1^\infty$ un elemento de

$$\prod_{i=1}^{\infty} B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E_i).$$

Pongamos

$$\langle \phi, T\rangle = \left(\langle \phi, T_i\rangle\right)_1^\infty$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Es claro que $T \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$. Veamos que $T \in B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$. Hay que demostrar que $(\phi T)^\wedge \in L_{p,w}(E)$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dada una tal ϕ, pongamos

$$f(x) = \left((\phi T_i)^\wedge(x)\right)_1^\infty$$

para cada $x \in \Omega$. No es difícil probar que f define un elemento de $L_{p,w}(E)$ [11, Prop. 3]. Pero entonces se tiene, para cada $\xi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\langle \xi, (\phi T)^\wedge\rangle &= \langle \hat{\xi}, \phi T\rangle \\ &= \langle \hat{\xi}_{|\Omega}\phi, T\rangle \\ &= \left(\langle \hat{\xi}_{|\Omega}\phi, T_i\rangle\right)_1^\infty \\ &= \left(\langle \xi, (\phi T_i)^\wedge\rangle\right)_1^\infty \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \xi(x)\,(\phi T_i)^\wedge(x)\,dm_n(x)\right)_1^\infty \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x)\left((\phi T_i)^\wedge(x)\right)_1^\infty dm_n(x) \\ &= \langle \xi, f\rangle \qquad ,\end{aligned}$$

por lo que $(\phi T)^\wedge \in L_{p,w}(E)$. En consecuencia, $T \in B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$, $JT = (T_i)_1^\infty$ y J es sobreyectiva. La prueba termina aplicando el teorema de la aplicación abierta. □

Corolario

Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, E un Fréchet sin normas continuas, $w \in \mathcal{W}$ y $p \in [1, \infty]$. Entonces $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$ contiene una copia complementada de $(B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega))^{\mathbb{N}}$.

Prueba. Por un teorema de Bessaga-Pełczyński [8, p. 129] E contiene una copia complementada de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pero entonces, $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, E)$ contiene una copia complementada de $B^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\Omega, \mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ en virtud del Teorema 8. Basta ahora aplicar el teorema precedente. □

En [12] hemos obtenido la siguiente representación de los espacios locales $B^{\mathrm{loc}}_{2,w_m}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ $(w_m(x) = (1 + |x|^2)^{m/2})$:

$$B^{\mathrm{loc}}_{2,w_m}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \simeq (\ell_2)^{\mathbb{N}}.$$

Utilizaremos este resultado en la prueba del siguiente teorema. Recordemos que $\dim_l E = \dim_l F$ significa que el espacio localmente convexo E es isomorfo a un subespacio cerrado del espacio localmente convexo F y que F es isomorfo a un subespacio cerrado de E.

Teorema 12

Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, E un (LF) estricto nuclear, $w \in \mathcal{W}$ y $p \in [1,\infty]$. Entonces

(1) $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ es isomorfo a un subespacio de $(L_p(0,1))^{\mathbb{N}} \hat{\otimes}_\epsilon E$ y

$$\dim_1 B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, E) = \dim_1 (\ell_2)^{\mathbb{N}} \hat{\otimes}_\epsilon E, \qquad m = 0,1,2,\ldots.$$

(2) Si, además, E es de Fréchet entonces $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ es isomorfo a un subespacio de $(L_p(0,1))^{\mathbb{N}}$ y

$$\dim_1 B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, E) = \dim_1 (\ell_2)^{\mathbb{N}}. \qquad m = 0,1,2,\ldots.$$

Prueba. (1) Si $p < \infty$ se tiene

$$L_p(E) \simeq L_p(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes}_\epsilon E$$

(pues $L_p(\mathbb{R}^n) \otimes_\epsilon E$ es un subespacio denso de $L_p(E)$ y este espacio es completo por el lema que precede al Teorema 9) y así

$$L_p(E) \simeq L_p(0,1) \hat{\otimes}_\epsilon E.$$

Por otra parte,

$$\big(L_\infty(E)\big)^\wedge \simeq L_\infty(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes}_\epsilon E \simeq L_\infty(0,1) \hat{\otimes}_\epsilon E \qquad [3,\ \text{Vol. III},\ \text{p. } 126].$$

La primera parte de (1) se sigue entonces de que $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ es isomorfo a un subespacio de $(L_p(E))^{\mathbb{N}}$, de la discusión anterior y de las propiedades del producto tensorial $\hat{\otimes}_\epsilon$. De esta primera parte, del corolario del Teorema 10 y del isomorfismo

$$B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \simeq (\ell_2)^{\mathbb{N}}$$

se sigue la segunda parte de (1).

(2) Razonando como en [13, Teorema 1] se ve que $B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ es isomorfo a un subespacio de $(L_p(0,1))^{\mathbb{N}}$. La segunda parte se demuestra teniendo en cuenta además que $B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, E)$ contiene una copia (complementada) de $B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Observación. En general

$$B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega, E) \not\simeq B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega) \hat{\otimes}_\epsilon E, \quad B_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\Omega) \hat{\otimes}_\pi E.$$

Por ejemplo, para cada $m \in \mathbb{N}$ el espacio $B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n))$ es isomorfo a $(B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \ell_2))^{\mathbb{N}}$ y, por tanto, a un subespacio cerrado de $(\ell_2)^{\mathbb{N}}$; sin embargo, $B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes}_\epsilon B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes}_\pi B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$) es isomorfo a $(\ell_2 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_2)^{\mathbb{N}}$ (resp. a $(\ell_2 \hat{\otimes}_\pi \ell_2)^{\mathbb{N}}$). Basta ahora recordar que los espacios de Banach $\ell_2 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_2$, $\ell_2 \hat{\otimes}_\pi \ell_2$ no son reflexivos. Otro ejemplo lo proporciona el espacio $B_{2,w_m}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, E)$ siendo E un espacio de Banach reflexivo que contiene una copia complementada de ℓ_2 y $m \in \mathbb{N}$.

Si $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ son tales que

$$\frac{w_2(x)}{w_1(x)} \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } x \longrightarrow \infty$$

entonces la inyección canónica

$$j : B^{\mathrm{loc}}_{p,w_1}(\Omega) \longrightarrow B^{\mathrm{loc}}_{p,w_2}(\Omega)$$

es completamente continua [6, Th. 2.3.9]. Si E es un Fréchet nuclear también la aplicación $j\hat{\otimes}_\epsilon 1_E$ de $B^{\mathrm{loc}}_{p,w_1}(\Omega)\hat{\otimes}_\epsilon E$ en $B^{\mathrm{loc}}_{p,w_2}(\Omega, E)$ es completamente continua: Sea Z un acotado de $B^{\mathrm{loc}}_{p,w_1}(\Omega)\hat{\otimes}_\epsilon E$, por ser E nuclear $Z \subset \overline{\Gamma A \times B}$ siendo A un acotado de $B^{\mathrm{loc}}_{p,w_1}(\Omega)$ y B un acotado de E [5]; como $j(A)$ es relativamente compacto en $B^{\mathrm{loc}}_{p,w_2}(\Omega)$ y $1_E(B)$ es relativamente compacto en E, resulta que $j\hat{\otimes}_\epsilon 1_E(Z)$ es relativamente compacto en $B^{\mathrm{loc}}_{p,w_2}(\Omega)\hat{\otimes}_\epsilon E$ luego en $B^{\mathrm{loc}}_{p,w_2}(\Omega, E)$ en virtud del corolario del Teorema 10. Extendemos ahora este resultado a espacios de Fréchet-Montel.

Teorema 13

Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, E un Fréchet-Montel, $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ tales que

$$\frac{w_2(x)}{w_1(x)} \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } x \longrightarrow \infty$$

y $p \in [1, \infty]$. Entonces la inyección canónica

$$B^{\mathrm{loc}}_{p,w_1}(\Omega, E) \hookrightarrow B^{\mathrm{loc}}_{p,w_2}(\Omega, E)$$

es completamente continua.

Prueba. Es trivial comprobar que la inyección canónica es continua. Para probar que es completamente continua bastará ver que toda sucesión acotada en $B^{\mathrm{loc}}_{p,w_1}(\Omega, E)$ admite una subsucesión convergente en $B^{\mathrm{loc}}_{p,w_2}(\Omega, E)$. Sea $(T_i)_1^\infty$ una tal sucesión y sean $(K_i)_1^\infty$, $(\varphi_i)_1^\infty$ como en la observación 4 que sigue a la Definición 7. Entonces la sucesión $(\phi_1 T_i)_1^\infty$ es acotada en $B_{p,w_1}(E)$ y $\mathrm{sop}\,\phi_1 T_i \subset \mathrm{sop}\,\phi_1$, $i = 1, 2, \ldots$, por lo que en virtud del Teorema 5 $(T_i)_1^\infty$ admite una subsucesión $(T_{1i})_1^\infty$ tal que $(\phi_1 T_{1i})_1^\infty$ converge en $B_{p,w_2}(E)$. Puesto que $(\phi_2 T_{1i})_1^\infty$ es acotada en $B_{p,w_1}(E)$ y $\mathrm{sop}\,\phi_2 T_{1i} \subset \mathrm{sop}\,\phi_2$, $i = 1, 2, \ldots$, aplicando nuevamente el Teorema 5 hallamos una subsucesión $(T_{2i})_1^\infty$ de $(T_{1i})_1^\infty$ de manera que $(\phi_2 T_{2i})_1^\infty$ converge en $B_{p,w_2}(E)$. Repitiendo este proceso y tomando la sucesión diagonal $(T_{ii})_1^\infty$ vemos que $(\phi_k T_{ii})_1^\infty$ converge en $B_{p,w_2}(E)$ para cada k. Por consiguiente, $(T_{ii})_1^\infty$ es de Cauchy en $B^{\mathrm{loc}}_{p,w_2}(\Omega, E)$ luego convergente en este espacio. □

Agradecemos los comentarios y sugerencias del referee.

Bibliografía

1. J. C. Díaz, A note on isomorphisms between powers of Banach spaces, *Collect. Math.* 38 (1987), 137–140.
2. J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, American Mathematical Society, Providence, 1977.
3. H. G. Garnir, M. De Wilde and J. Schmets, *Analyse Fonctionnelle*, vol. II and III, Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1972–73.
4. A. Grothendieck, Sur les espaces (F) et (DF), *Summa Bras. Math.* 3 (1954), 57–123.
5. A. Grothendieck, *Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires*, Mem. Amer. Mat. Soc. 16, American Mathematical Society, Providence, 1955.
6. L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1963.
7. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol. II, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.
8. H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, Teubner, Stuttgart, 1981.
9. G. Köthe, *Topological Vector Spaces*, vol. I and II, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969 and 1979.
10. S. Kwapien, On operators factorizable through L_p-spaces, *Bull. Soc. Math. France* 31–32 (1972), 215–225.
11. J. Motos and M. J. Planells, Some locally convex properties of the vector-valued Sobolev-Slobodeckij spaces $W^{m,p}(\Omega, E)$, Preprint.
12. J. Motos and M. J. Planells, Representación de los espacios locales $B_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, Preprint.
13. M. J. Planells, Una nota sobre los espacios $L^p(\Omega, E)$, *Collect. Math.* 39 (1988), 1–7.
14. J. Schmets, *Spaces of Vector Valued Continuous Functions*, Lecture Notes in Math. 1003, 1983.
15. L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ch. I, *Ann. Inst. Fourier* 7 (1957), 1–141.
16. L. Schwartz, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, *J. Analyse Math.* 4 (1954–55), 88–148.
17. M. Talagrand, Weak Cauchy sequences in $L^1(E)$, *Amer. J. Math.* 106 (1984), 703–724.
18. M. Valdivia, *Topics in Locally Convex Spaces*, Notas de Matemática 85, North-Holland, Amsterdam, 1982.
19. D. Vogt, On two classes of (F)-spaces, *Arch. Math.* 45 (1985), 255–266.