Collect. Math. 39 (1988), 209–229

Orden relativo de crecimiento de funciones enteras

Luis Bernal

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas

Avda. Reina Mercedes, 41012 Sevilla, Spain

Received 15/MAR/89

Abstract

In this paper, we essay a generalization of the classical concept of growth order of an entire function. We define the new parameter $\rho_g(f)$, the relative growth order of $f(z)$ with respect to $g(z)$, which establishes a direct comparison between the growth of the moduli of two nonconstant entire functions f and g. Diverse properties, relative to sum, product, composition, derivative, real and imaginary parts, Nevanlinna's characteristic and Taylor's coefficients, are studied.

1. Definiciones y lemas preparatorios

Clásicamente, para estudiar el crecimiento de una función entera no constante f, s la compara con la función exponencial, y se define su orden de crecimiento ρ por

$$\begin{aligned}\rho &= \inf\{\mu > 0 : F(r) < \exp(r^\mu)\ \forall r > r_0(\mu) > 0\} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\log F(r)}{\log r}\ ,\end{aligned}$$

donde

$$F(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Este estudio ha sido generalizado por diversos autores. Así, por ejemplo, se han generalizado conceptos de orden de crecimiento relativamente a la escala exponencial $\{\exp_n r : n = 1, 2, \ldots\}$, a la escala logarítmico-exponencial

$$\{\log_1 r, \log_2 r, \log_3 r, \ldots ; \exp_1 r, \exp_2 r, \exp_3 r, \ldots\}$$

y a un par (α, β) de funciones positivas de variable real que verifican ciertas condiciones de límite. Se entiende que

$$\exp_1 r = \exp r,$$

$$\log_1 r = \log r,$$

$$\exp_{k+1} r = \exp(\exp_k r) \qquad (k = 1, 2, \ldots ;\ r > 0)$$

y para $r > 0$ suficientemente grande

$$\log_{k+1} r = \log(\log_k r) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Cfr., respectivamente, [6], [2] y [7]. Pretendemos en este artículo introducir una comparación más directa entre el crecimiento de dos funciones enteras, comparación que no esté basada—como en los casos anteriores—en funciones auxiliares. Denotaremos las funciones módulo máximo de las funciones enteras f, g, h, $\ldots$, por $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$, $\ldots$, respectivamente.

Se sabe que la función módulo máximo $F(r)$ de f es continua y no decreciente, y estrictamente creciente si f no es constante. En tal caso, existe la función inversa $F^{-1} : (|f(0)|, \infty) \to (0, \infty)$, la cual es continua, estrictamente creciente y verifica

$$\lim_{n \to \infty} F^{-1}(s) = \infty.$$

Dicho esto, establecemos la definición fundamental junto con un concepto técnico para posteriores referencias.

DEFINICION. Si f y g son funciones enteras, el *orden de crecimiento de f relativo a g* es el siguiente número, finito o infinito:

$$\rho = \rho(f) = \inf\{\mu > 0 : F(r) < G(r^\mu) \quad \forall r > r_0(\mu) > 0\}.$$

El orden clásico de crecimiento de f se da en el caso particular $g(z) = \exp z$. Diremos que una desigualdad que depende de $r > 0$ se verifica asintóticamente (asint.) cuando tal desigualdad se cumple para todo $r > r_0 > 0$.

DEFINICION. Sea g una función entera no constante. Diremos que g *cumple l* *propiedad (A)* si y sólo si para cada $\sigma > 1$, $G(r)^2 \leq G(r^\sigma)$ asint.

Por ejemplo, $g(z) = \exp z$ cumple (A) y, trivialmente, ningún polinomi cumple (A). Proporcionaremos un ejemplo de una función entera trascendente qu no cumpla (A). Por [5], tenemos que si

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

es entera no constante y existe el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log(1/n) \log |1/a_n|} = \alpha,$$

entonces existe

$$\beta = \lim_{r\to\infty} \frac{\log\log G(r)}{\log\log r}$$

y vale $\beta = 1 + \alpha$. Además, si

$$\gamma = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log G(r)}{\log\log r}$$

y existe el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\dfrac{\log |1/a_n|}{(\gamma - 1)^{\gamma - 1}}} = \delta,$$

entonces existe

$$\mu = \lim_{r\to\infty} \frac{\log G(r)}{(\log r)^\gamma}$$

y vale $\mu = 1 + \delta$. Notemos que $\gamma \geq 1$; se adopta por convenio $0^0 = 1$. Definimos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n^2) z^n \qquad (z \in \mathbb{C}). \qquad ($$

Resulta $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 2$, $\delta = 0$, $\mu = 1$. Entonces

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log G(r)}{(\log r)^2} = 1,$$

luego
$$G(r) = \exp\big((1+n(r))(\log r)^2\big),$$
donde
$$\lim_{r\to\infty} n(r) = 0.$$
Sea $\sigma \in (1, \sqrt{2})$; resulta
$$G(r^\sigma) = \exp\big(\sigma^2(1+n(r^\sigma))(\log r)^2\big)$$
y
$$\frac{G(r)^2}{G(r^\sigma)} = \exp\big((\log r)^2(2-\sigma^2 - 2n(r) - \sigma^2 n(r^\sigma))\big).$$
Ya que
$$\lim_{r\to\infty}\big(2n(r) - \sigma^2 n(r^\sigma)\big) = 0,$$
tenemos
$$\big|2n(r) - \sigma^2 n(r^\sigma)\big| < 2 - \sigma^2$$
asint., luego
$$(\log r)^2\big(2-\sigma^2 + 2n(r) - \sigma^2 n(r^\sigma)\big) > 0$$
asint. y $G(r)^2 > G(r^\sigma)$ asint. En consecuencia, g no cumple (A).

Seguidamente damos en forma de lemas algunas propiedades asintóticas del módulo máximo de una función entera, que usaremos después.

Lema 1

Si g es una función entera no constante, entonces g cumple la propiedad (A) si y sólo si para cada $\sigma > 1$ y cada entero positivo n, $G(r)^n \leq G(r^\sigma)$ asint.

Demostración. Es claro que la propiedad enunciada implica (A). Recíprocamente, supongamos que (A) es cierto y sean $\sigma > 1$ y n un entero positivo. Elijamos un entero m con $2^m > n$. Entonces $\sigma^{2^{-m}} > 1$, y
$$\begin{aligned} G(r^\sigma) &= G\left((r^{\sigma^{1/2}})^{\sigma^{1/2}}\right) \\ &\geq G\left(r^{\sigma^{1/2}}\right)^2 \\ &\geq G\left(r^{\sigma^{1/4}}\right)^4 \\ &\geq \cdots \\ &\geq G\left(r^{\sigma^{2^{-m}}}\right)^{2^m} \\ &\geq G(r)^{2^m} \\ &\geq G(r)^n \end{aligned}$$
asint. □

Lema 2

Sean f una función entera no constante, $\alpha > 1$, $0 < \beta < \alpha$, $s > 1$, $0 < \mu < \lambda$ y n un entero positivo. Se verifica:

a) $F(\alpha r) > \beta F(r)$ asint.

b) Existe $K = K(s, f) > 0$ tal que $(f(r))^s \leq KF(r^s)$ para todo $r > 0$.

c)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{F(r^s)}{F(r)} = \infty = \lim_{r\to\infty} \frac{F(r^\lambda)}{F(r^\mu)} .$$

d) Si f es trascendente, entonces

$$\lim_{r\to\infty} \frac{F(r^s)}{r^n F(r)} = \infty = \lim_{r\to\infty} \frac{F(r^\lambda)}{r^n F(r^\mu)} .$$

Demostración. a) Aplicamos el lema de Schwarz a $g(z) = f(z) - f(0)$. Entonce $g(0) = 0$ y

$$|g(z)| \leq |z| \frac{G(R)}{R}$$

si $|z| \leq R$. Si $R = \alpha r$, tenemos

$$G(r) \leq \frac{r}{\alpha r} G(\alpha r)$$

y

$$F(r) - |f(0)| \leq G(r) \leq \frac{G(\alpha r)}{\alpha} \leq \frac{F(\alpha r) + |f(0)|}{\alpha} .$$

Sea

$$\varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{2(1+\alpha)} .$$

Entonces existe $r_0 > 0$ con $|f(0)| < \varepsilon F(r)$ siempre que $r > r_0$, por tanto

$$F(\alpha r) > (\alpha - \alpha\varepsilon - \varepsilon)F(r) > \beta F(r)$$

si $r > r_0$.

b) Basta aplicar el Teorema de las Tres Circunferencias de Hadamard (cfr., pc ejemplo, [8, p. 172]), a saber,

$$F\left(r_1^c r_2^{1-c}\right) \leq (F(r_1))^c (F(r_2))^{1-c} \qquad (0 \leq c \leq 1;\ r_1, r_2 > 0),$$

a

$$r_1 = 1,\ r_2 = r^s,\ c = 1 - \frac{1}{s} .$$

c) Se deduce de

$$\frac{F(r^s)}{F(r)} \geq \frac{F(r)^s}{KF(r)} = \frac{1}{K} F(r)^{s-1} \qquad \forall r > 0.$$

d) Si f es trascendente, $M > 0$ y $\sigma > 0$, entonces $F(r) > Mr^\sigma$ asint. E suficiente tomar ahora $\sigma = n/(s-1)$ y aplicar el razonamiento de c). □

Lema 3 (Pólya)

Supongamos que f y g son funciones enteras, $f(0)=0$ y $h=g\circ f$. Entonces existe una constante $c\in(0,1)$, independiente de f y g, tal que

$$H(r)\geq G(cF(r/2)) \qquad \forall r>0. \tag{2}$$

Demostración. [1, p. 80–81]. □

Lema 4

Sean $R>0$, $\eta\in(0,3e/2)$ y f analítica en $|z|\leq 2eR$ con $f(0)=1$. Entonces en el disco $|z|\leq R$, excluyendo una familia de discos la suma de cuyos radios no es mayor que $4\eta R$, se verifica

$$\log|f(z)|>-T(\eta)\log F(2eR)$$

donde

$$T(\eta)=2+\log\left(\frac{3e}{2\eta}\right).$$

Demostración. [3, p. 21–23]. □

Lema 5

Si f es entera no constante y

$$A(r)=\max\{\Re f(z):|z|=r\} \qquad (r>0),$$

entonces $F(r)<A(145r)$ asint.

Demostración. Por la desigualdad de Borel-Carathéodory (cfr., por ejemplo, [1, p. 53–54]), obtenemos

$$F(r)<\frac{R+r}{R-r}\left(A(r)+|f(0)|\right) \qquad (0<r<R). \tag{3}$$

Haciendo en (3) $R=2r$, resulta $F(r)<3\big(A(2r)+|f(0)|\big)$ $(r>0)$. Ya que f no es constante, tenemos $|f(0)|<A(r)$ asint., luego $F(r)<6A(2r)$ asint. Entonces

$$\begin{aligned} A(145r) &> F\big((145/2)r\big)/6 \\ &= F\big((145/4)2r\big)/6 \\ &> (144/4)F(2r)/6 \\ &= 6F(2r) \\ &\geq 6A(2r) \\ &> F(r) \end{aligned}$$

asint. En la segunda desigualdad hemos usado el Lema 2 a). □

Una desigualdad análoga se verifica para la parte imaginaria. La acotación dada puede hacerse más fina, pero es suficiente para nuestros propósitos.

Si f es una función entera, su función característica de Nevanlinna se define por

$$T(r) = T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \qquad (r > 0)$$

donde $\log^+ x = \max(0, \log x)$ para $x > 0$. Se sabe que $T(r)$ es no decreciente y continua, y estrictamente creciente si f no es constante. Luego, en tal caso, está definida la función $T^{-1} : (T(0), \infty) \longrightarrow (0, \infty)$, siendo también continua y estrictamente creciente. Cfr., por ejemplo, [1, cap. 9] para estos conceptos y propiedades así como para la demostración del siguiente lema.

Lema 6

Si f es una función entera, entonces

$$T(r) \le \log^+ F(r) \le \left(\frac{R+r}{R-r}\right) T(r) \qquad (0 < r < R).$$

Agrupamos en un primer teorema un conjunto de resultados, todos ellos de verificación inmediata a partir de la Definición 1, el Lema 2 y propiedades elementales de las funciones analíticas. Dejamos la prueba para el lector.

Teorema 1

Sean f, g, h funciones enteras no constantes, y L_i $(i = 1,2,3,4)$ funciones lineales no constantes, es decir, $L_i(z) = a_i z + b_i$, para todo $z \in \mathbb{C}$, con $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ $a_i \neq 0$ $(i = 1,2,3,4)$. Se verifica:

a)

$$\rho_g(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log G^{-1}(F(r))}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log G^{-1}(r)}{\log F^{-1}(r)}\ .$$

b) Si g es un polinomio y f es trascendente, entonces $\rho_g(f) = \infty$.

c) Si f y g son polinomios, entonces

$$\rho_g(f) = \frac{\mathrm{grado}(f)}{\mathrm{grado}(g)}\ .$$

d) Si $\rho_g(f)$ es un número irracional, se tiene que f y g son trascendentes.

e) Si g es un polinomio y $p > 0$ es un número racional, entonces existe un polinomio f tal que $\rho_g(f) = p$ si y sólo si el producto de p y el grado de g es un entero.

f) Si $F(r) \le G(r)$ asint., se tiene $\rho_h(f) \le \rho_h(g)$.

g) Si $G(r) \le H(r)$ asint., se tiene $\rho_g(f) \ge \rho_h(f)$.

h) $\rho_{L_4 \circ g \circ L_3}(L_2 \circ f \circ L_1) = \rho_g(f)$.

2. Orden relativo de la composición

El siguiente teorema resuelve el problema del crecimiento relativo de la composición de funciones enteras.

Teorema 2

Sean f, f_1, f_2, g y m funciones enteras no constantes, y sea $h = g \circ f$. Se verifica:

a) $\rho_{g\circ f_2}(g \circ f_1) = \rho_{f_2}(f_1)$.

b) $\max(\rho_m(f), \rho_m(g)) \leq \rho_m(h)$.

c) Si f es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces

$$\rho_m(h) = \rho_m(g)n \qquad \text{y} \qquad \rho_g(h) = n.$$

d) Si f no es un polinomio, entonces $\rho_g(h) = \infty$. Si además $\rho_m(g) > 0$, entonces $\rho_m(h) = \infty$.

e) Si $\rho_m(h) < \infty$, entonces o bien f es un polinomio y $\rho_m(g) < \infty$, o bien f no es un polinomio de modo que $\rho_m(f) < \infty$ y $\rho_m(g) = 0$.

Demostración. a) Llamemos $h_i = g \circ f_i$ $(i = 1, 2)$, entonces h_i es entera no constante. Podemos suponer que $f_i(0) = 0$ pues, en otro caso, definiendo $f_i^*(z) = f_i(z) - f_i(0)$ y $g_i^*(z) = g_i(z + f_i(0))$, tendríamos $h_i = g_i^* \circ f_i^*$, y por el Teorema 1 h) se verifica $\rho_{f_2^*}(f_1^*) = \rho_{f_2}(f_1)$, así que a) estaría probado. Tenemos :

$$H_i(r) \geq G(cF_i(r/2)) \qquad \forall r > 0 \ (i = 1, 2)$$

por (2). Por el Lema 2 a),

$$F_i(r/2) > \frac{1}{c} F(dr/2) \text{ asint.} \qquad \forall d \in (0, c),$$

luego

$$H_i(r) > G(F_i(dr/2)) \geq H_i(dr/2) \text{ asint.} \qquad (i = 1, 2) \tag{4}$$

porque $H_i \leq G \circ F_i$, lo cual es una consecuencia de la definición. Entonces

$$H_2^{-1}(H_1(r)) > H_2^{-1}(G(F_1(dr/2))).$$

Pero

$$H_2^{-1}(G(t)) \geq F_2^{-1}(t),$$

por tanto

$$H_2^{-1}\big(H_1(r)\big) > F_2^{-1}\big(F_1(dr/2)\big)$$

asint. debido a (4). Haciendo $t = H_2(r)$ en (4) para $i = 1,2$ deducimos que

$$t > G\big(F_2((d/2)H_2^{-1}(t))\big)$$

asint. y

$$H_2^{-1}(t) < \frac{2}{d}\, F_2^{-1}\big(G^{-1}(t)\big)$$

asint. Si ahora $t = H_1(r)$, entonces

$$H_2^{-1}\big(H_1(r)\big) < \frac{2}{d}\, F_2^{-1}\big(G^{-1}(H_1(r))\big) \leq \frac{2}{d}\, F_2^{-1}\big(F_1(r)\big)$$

asint. Combinando estas desigualdades obtenemos

$$F_2^{-1}\big(F_1(dr/2)\big) < H_2^{-1}\big(H_1(r)\big) < \frac{2}{d}\, F_2^{-1}\big(F_1(r)\big)$$

asint. Si tomamos logaritmos, dividimos los tres miembros de la desigualdad pc $\log r$ y aplicamos el Teorema 1 a), obtenemos inmediatamente a).

b) Como en la parte a), podemos suponer que $f(0) = 0$. Ya que f y g son n constantes, existe $\alpha > 0$ tal que $F(r) > \alpha$ y $G(r) > \alpha r$ asint. Aplicando los Lemas y 3, tenemos que para cada $\sigma \in (0,1)$,

$$H(r) \geq G\big(cF(r/2)\big) > G(c\alpha r/2) > G(r^\sigma)$$

asint. y, análogamente,

$$H(r) > c\alpha F(r/2) > F(r^\sigma)$$

asint. Entonces

$$M^{-1}\big(G(r^\sigma)\big) < M^{-1}\big(H(r)\big)$$

asint., luego

$$\rho_m(g) \leq \frac{1}{\sigma}\, \rho_m(h) \qquad \forall \sigma \in (0,1).$$

De modo análogo,

$$M^{-1}\big(F(r^\sigma)\big) < M^{-1}\big(H(r)\big),$$

luego

$$\rho_m(f) \leq \frac{1}{\sigma}\, \rho_m(h) \qquad \forall \sigma \in (0,1),$$

y obtenemos b).

c) Si f es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ con $\alpha r^n < F(r) < \beta r^n$ asint. De nuevo por (2) tenemos

$$G(\gamma r^n) < G\big(cF(r/2)\big) \leq H(r) \leq G\big(F(r)\big) < G(\beta r^n)$$

asint., donde $\gamma = c(\alpha/2)^n$, así que

$$M^{-1}\big(G(\gamma r^n)\big) < M^{-1}\big(H(r)\big) < M^{-1}\big(G(\beta r^n)\big)$$

asint. Tomando logaritmos en los tres miembros, dividiendo por $\log r$ y tomando los límites superiores, resulta $\rho_m(h) = \rho_m(g)n$. Si hacemos $m = g$, obtenemos $\rho_g(h) = n$, pues es obvio que $\rho_g(g) = 1$.

d) Si f no es un polinomio y n es un entero positivo, se tiene $F(r) > r^n$ asint. Razonando como en c) resulta

$$M^{-1}\big(G(\gamma r^n)\big) < M^{-1}\big(H(r)\big) \qquad \text{asint.} \qquad (\gamma = c/2^n),$$

luego $\rho_m(g)n \leq \rho_m(g \circ f)$, para cada n. Por consiguiente $\rho_m(h) = \infty$ si $\rho_m(g) > 0$. Además $\rho_g(h) = \infty$, pues $\rho_g(g) = 1 > 0$.

e) Es consecuencia obvia de b), c), d). □

Observemos que la parte e) generaliza el correspondiente resultado para el orden clásico de crecimiento: Si f y g son funciones enteras y $h = g \circ f$ es de orden finito, entonces o bien f es un polinomio y g es de orden finito, o bien f no es un polinomio, siendo $\rho(f)$ finito y $\rho(g) = 0$ en este caso. Cfr., por ejemplo, [1, p. 81–82].

A la vista de la parte a), podría esperarse que $\rho_{f_2 \circ g}(f_1 \circ g) = \rho_{f_2}(f_1)$. Sin embargo, esto es falso: considerar, por ejemplo, $g(z) = \exp z$, $f_1(z) = z^2$, $f_2(z) = z$.

3. Orden relativo de la suma y del producto

Se sabe que el orden clásico de una suma finita de funciones enteras es como máximo el mayor de los órdenes de los sumandos. Esto también es cierto en nuestra teoría. Asimismo, el orden clásico de un producto finito de funciones enteras es como máximo el mayor de los órdenes de los factores. No puede esperarse que el mismo resultado sea válido para el orden relativo. Por ejemplo, si $f_1(z) = f_2(z) = g(z) = z$, se tiene $\rho_g(f_1 f_2) = 2 > 1 = \max\big(\rho_g(f_1), \rho_g(f_2)\big)$. Hemos de introducir, por tanto, alguna restricción sobre las funciones en cuestión.

Teorema 3

Sean f, g, f_1, f_2 funciones enteras no constantes, P un polinomio no idénticamente nulo y n un entero positivo. Se verifica:

a) $\rho_g(f_1 + f_2) \leq \max(\rho_g(f_1), \rho_g(f_2))$, *dándose la igualdad si* $\rho_g(f_1) \neq \rho_g(f_2)$.

b) Si f es trascendente, entonces $\rho_g(Pf) = \rho_g(f)$. Si g es trascendente, entonces $\rho_{Pg}(f) = \rho_g(f)$.

c) $\rho_g(f) \leq \rho_g(f^n) \leq n\rho_g(f)$.

d) Si g cumple la propiedad (A), entonces

$$\rho_g(f_1 f_2) \leq \max(\rho_g(f_1), \rho_g(f_2)),$$

dándose la igualdad si $\rho_g(f_1) \neq \rho_g(f_2)$. El mismo resultado es cierto para f_1/f_2, suponiendo que sea una función entera. Además, $\rho_g(f^n) = \rho_g(f)$.

Demostración. a) Llamemos $h = f_1 + f_2$, $\rho = \rho_g(h)$, $\rho_i = \rho_g(f_i)$ $(i = 1, 2)$. Si h es constante, es trivial. Supongamos pues que h no es constante y que, por ejemplo, $\rho_1 \leq \rho_2$. Dado $\varepsilon > 0$,

$$F_1(r) \leq G\left(r^{\rho_1+\varepsilon}\right) \leq G\left(r^{\rho_2+\varepsilon}\right)$$

y

$$F_2(r) \leq G(r^{\rho_2+\varepsilon})$$

asint., luego

$$H(r) \leq F_1(r) + F_2(r) \leq 2G\left(r^{\rho_2+\varepsilon}\right) \leq G\left(3r^{\rho_2+\varepsilon}\right)$$

asint. por el Lema 2 a) y

$$\frac{\log G^{-1}(H(r))}{\log r} \leq \frac{\log 3 + (\rho_2 + \varepsilon)\log r}{\log r}$$

asint., así que $\rho \leq \rho_2 + \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, y en consecuencia $\rho \leq \rho_2 = \max(\rho_1, \rho_2)$. Hemos considerado el caso $\rho_2 < \infty$; el caso $\rho_2 = \infty$ es trivial. Supongamos ahora que $\rho_1 < \rho_2$ y tomemos $\lambda \in (\rho_1, \rho_2)$ y $\mu \in (\rho_1, \lambda)$. Entonces $F_1(r) < G(r^\mu)$ asint. y existe una sucesión $r_n \to \infty$ con $G\left(r_n^\lambda\right) < F_2(r_n)$ para todo n. Por el Lema 2 c), $G(r^\lambda) > 2G(r^\mu)$ asint. Por tanto

$$2F_1(r_n) < F_2(r_n)$$

y

$$H(r_n) \geq F_2(r_n) - F_1(r_n) > (1/2)F_2(r_n) > (1/2)G\left(r_n^\lambda\right) > G\left((1/3)r_n^\lambda\right)$$

para n suficientemente grande. En la última desigualdad hemos usado el Lema 2 a). Por consiguiente,

$$\rho \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log G^{-1}(H(r_n))}{\log r_n} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(1/3) + \lambda \log r_n}{\log r_n} = \lambda,$$

para cada $\lambda \in (\rho_1, \rho_2)$. Así que $\rho \geq \rho_2 = \max(\rho_1, \rho_2)$.

b) Existen $\alpha > 0$ y n entero positivo con $2\alpha < |P(z)| < r^n$ ($|z| = r$) asint. Si f es trascendente, $h = Pf$ y $s > 1$, entonces

$$F(\alpha r) < 2\alpha F(r) < H(r) < r^n F(r) < F(r^s) \tag{5}$$

asint., donde se ha usado el Lema 2 a), d). En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{\log G^{-1}(F(\alpha r))}{\log(\alpha r)} \frac{\log \alpha + \log r}{\log r} &< \frac{\log G^{-1}(H(r))}{\log r} \\ &< \frac{\log G^{-1}(F(r^s))}{\log(r^s)} \frac{\log(r^s)}{\log r} \end{aligned}$$

asint. Tomando límites superiores,

$$\rho_g(f) \leq \rho_g(h) \leq s\rho_g(f) \qquad \forall s > 1,$$

luego $\rho_g(h) = \rho_g(f)$.

Sea ahora g trascendente, $h = Pg$ y $s > 1$. Si establecemos la desigualdad asintótica análoga a (5) para G en vez de F, obtenemos

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log F^{-1}(H(r))}{\log r} = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log F^{-1}(G(r))}{\log r}.$$

Por último, utilizando el Teorema 1 a), resulta

$$\begin{aligned} \rho_h(f) &= \frac{1}{\liminf_{r\to\infty} \frac{\log F^{-1}(r)}{\log H^{-1}(r)}} \\ &= \frac{1}{\liminf_{r\to\infty} \frac{\log F^{-1}(H(r))}{\log r}} \\ &= \frac{1}{\liminf_{r\to\infty} \frac{\log F^{-1}(G(r))}{\log r}} \\ &= \frac{1}{\liminf_{r\to\infty} \frac{\log F^{-1}(r)}{\log G^{-1}(r)}} \\ &= \rho_g(f). \end{aligned}$$

c) Por el Lema 2 a), b),

$$max\{|f^n(z)| : |z| = r\} = F(r)^n \leq KF(r^n) < F((K+1)r^n)$$

asint., luego $\rho_g(f^n) \leq n\rho_g(f)$. Pero $(F(r))^n > F(r)$ asint., así que $\rho_g(f^n) \geq \rho_g(f)$.

d) Podemos partir de que f_1, f_2 son trascendentes; de otro modo sería trivial. Denotemos $\rho_i = \rho_g(fi)$ $(i = 1,2)$, $h = f_1 f_2$, $\rho = \rho_g(h)$, y suponemos que $\rho_1 \leq \rho_2 < \infty$ (si $\rho_2 = \infty$, es trivial). Dado $\varepsilon > 0$, $F_i(r) < G(r^{\rho_2+(\varepsilon/2)})$ asint. $(i = 1,2)$, luego

$$H(r) \leq F_1(r)F_2(r) < G\left(r^{\rho_2+(\varepsilon/2)}\right)^2$$

asint. Aplicando la propiedad (A) con

$$\sigma = \frac{\rho_2 + \varepsilon}{\rho_2 + (\varepsilon/2)} > 1,$$

resulta $H(r) < G(r^{\rho_2+\varepsilon})$ asint. para cada $\varepsilon > 0$, luego $\rho \leq \rho_2 = \max(\rho_1, \rho_2)$. Supongamos ahora que $\rho_1 < \rho_2$. Por la parte b) el producto de f_1 por un facto c/z^m no altera su orden, así que podemos suponer sin pérdida de generalidad qu $f_1(0) = 1$. Sean λ, μ con $\rho_1 < \mu < \lambda < \rho_2$. Entonces existe una sucesión $R_n \nearrow \infty$ tal que $F_2(R_n) > G(R_n^\lambda)$ para todo n, y $F_1(r) < G(r^\mu)$ asint. Apliquemos el Lema a $f = f_1$, $R = 2R_n$ y $\eta = 1/16$. Se verifica

$$\log|f_1(z)| > -\big(2 + \log(24e)\big)\log F_1(4eR_n)$$

en el disco $|z| \leq 2R_n$, excluyendo una familia de discos la suma de cuyos radios n excede $R_n/2$. Por tanto existe $r_n \in (R_n, 2R_n)$ tal que $|z| = r_n$ no intersecta ningun de los discos excluidos, luego

$$\log|f_1(z)| > -7\log F_1(4eR_n) \qquad \text{en } |z| = r_n.$$

Además

$$F_2(r_n) > F_2(R_n) > G(R_n^\lambda) > G(r_n^\lambda/2^\lambda).$$

Si z_r es un punto en $|z| = r$ con $F_2(r) = |f_2(z_r)|$, se tiene

$$H(r) \geq |f_1(z_r)|\,|f_2(z_r)| = |f_1(z_r)|\,F_2(r),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} H(r_n) &> G\left(r_n^\lambda/2^\lambda\right) F_1(4eR_n)^{-7} \\ &> G\left(r_n^\lambda/2^\lambda\right) G\left((4eR_n)^\mu\right)^{-7} \\ &> G\left(r_n^\lambda/2^\lambda\right) G\left((4er_n)^\mu\right)^{-7} \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Si tomamos $\nu \in (\mu, \lambda)$ y aplicamos el Lema 1 para $\sigma = \nu/\mu$, obtenemos

$$\begin{aligned} H(r_n) &> G\big((4er_n)^{\nu}\big)G\big((4er_n)^{\mu}\big)^{-7} \\ &> G\big((4er_n)^{\mu}\big)^{8}G\big((4er_n)^{\mu}\big)^{-7} \\ &> G\big(r_n^{\mu}\big) \end{aligned}$$

si n es suficientemente grande. En consecuencia $\mu \leq \rho$ para cada $\mu < \rho_2$, así que $\rho = \rho_2$.

Sea $h = f_1/f_2$ una función entera. Mantenemos las mismas notaciones para los órdenes y partimos de que $\rho_1 \leq \rho_2$. Entonces $f_1 = hf_2$, y si fuese $\rho > \rho_2 = \max(\rho_1, \rho_2)$, entonces $\rho_1 = \max(\rho, \rho_2) = \rho$ por la parte anterior, luego $\rho_1 > \rho_2$ y llegamos a contradicción, así que $\rho \leq \rho_2$. Si ahora es $\rho_1 < \rho_2$ y fuese $\rho < \rho_2$, entonces $\max(\rho, \rho_2) = \rho_1$ por la parte anterior, luego $\rho_2 = \rho_1$ y llegamos de nuevo a contradicción. Por tanto $\rho = \rho_2$.

Finalmente,

$$\rho_g(f^n) = \rho_g\Bigg(\overbrace{f \cdots f}^{n \text{ veces}}\Bigg) \leq \rho_g(f)$$

por aplicación de la primera parte de d). Ahora se aplica c) y el teorema queda demostrado. □

Demos un ejemplo de funciones f_1, f_2, g enteras trascendentes con $\rho_g(f_1 f_2) > \max\big(\rho_g(f_1), \rho_g(f_2)\big)$. Sean $a \in (1,2)$ y $b = \log 2/\log a > 1$. Consideremos la función g definida por (1) y sea $f_1 = f_2 = g$. Vimos que $G(r)^2 > G\big(r^{\sigma}\big)$ asint. para cada $\sigma \in (1, \sqrt{2})$. Entonces

$$\rho_g(f_1 f_2) \geq \sqrt{2} > 1 = \max\big(\rho_g(f_1), \rho_g(f_2)\big).$$

4. Orden relativo de la derivada

Se sabe que el orden clásico de una función entera es el mismo que el de su derivada. Cfr., por ejemplo, [8, p. 265]. Generalmente, este resultado es falso para nuestro orden relativo; por ejemplo, si $f(z) = g(z) = z$, entonces $\rho_g(f) = 1 > 0 = \rho_g(f')$. Pero el resultado es válido si alguna de las funciones f o g no es un polinomio, de modo que obtenemos una generalización del caso clásico.

Teorema 4

Sean f y g funciones enteras no constantes tales que al menos una de ellas e trascendente. Entonces

$$\rho_g(f') = \rho_{g'}(f) = \rho_{g'}(f') = \rho_g(f).$$

Demostración. Podemos suponer que f y g son trascendentes. Los restantes caso son triviales. Por el Teorema 1 h), podemos suponer que $f(0) = 0$. Denotaremos

$$\tilde{F}(r) = \max\{|f'(z)| : |z| = r\}.$$

Se verifica que

$$f(z) = \int_0^z f'(t)\,dt,$$

donde hemos tomado la integral sobre el segmento que une el origen con z. Entonce $F(r) \leq r\tilde{F}(r)$. Usando la Fórmula de Cauchy, es

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z)^2}\,dt,$$

donde z tiene módulo r y C es la circunferencia $|t - z| = r$; luego $\tilde{F}(r) \leq F(2r)/r$ Resumiendo, $F(r)/r \leq \tilde{F}(r) \leq F(2r)/r$ para cada $r > 0$. Sea $\sigma \in (0,1)$. Por e Lema 2 d), es $rF(r^\sigma) < F(r)$ asint., así que

$$F(r^\sigma) < \tilde{F}(r) < F(2r) \qquad \text{asint.} \tag{6}$$

Aplicando G^{-1}, tomando logaritmos, dividiendo por $\log r$ y tomando límites supe riores, resulta $\sigma\rho_g(f) \leq \rho_g(f') \leq \rho_g(f)$ para cada $\sigma \in (0,1)$, así que $\rho_g(f') = \rho_g(f)$ Si tomamos también límites inferiores y tenemos en cuenta que g, f', y g' son tambié trascendentes, observamos que las cuatro expresiones

$$\frac{\log G^{-1}(r)}{\log F^{-1}(r)}, \quad \frac{\log \tilde{G}^{-1}(r)}{\log F^{-1}(r)}, \quad \frac{\log G^{-1}(r)}{\log \tilde{F}^{-1}(r)} \quad \text{y} \quad \frac{\log \tilde{G}^{-1}(r)}{\log \tilde{F}^{-1}(r)}$$

tienen todas el mismo límite inferior y el mismo límite superior, así como sus res pectivas expresiones recíprocas.

Hemos usado aquí desigualdades análogas a (6) para G y $\tilde{G}$, siendo

$$\tilde{G}(r) = \max\{|g'(z)| : |z| = r\}.$$

Es suficiente ahora aplicar el Teorema 1 a). $\square$

5. Orden relativo y partes real e imaginaria

El orden de f relativo a g queda completamente determinado por las partes real e imaginaria de f y de g, separadamente. Tal es el contenido del próximo teorema.

Teorema 5

Sean f y g funciones enteras no constantes. Denotemos

$$A(r) = \max\{\Re f(z) : |z| = r\}, \qquad B(r) = \max\{\Im f(z) : |z| = r\},$$
$$C(r) = \max\{\Re g(z) : |z| = r\} \qquad \text{y} \qquad D(r) = \max\{\Im g(z) : |z| = r\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \rho_g(f) &= \inf\{\mu > 0 : M(r) < N(r^\mu) \text{ asint.}\} \\ &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log N^{-1}(M(r))}{\log r} \\ &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log N^{-1}(r)}{\log M^{-1}(r)}, \end{aligned} \tag{7}$$

donde M es cualquiera de las funciones A, B o F y N es cualquiera de las funciones C, D o G.

Demostración. Se sabe que A, B, C y D son continuas y estrictamente crecientes hacia infinito, luego tienen sentido A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} y D^{-1}. Sólo probaremos la primera igualdad en (7). Las otras dos se deducen sin dificultad. Del Lema 5 se obtiene la existencia de una constante $\alpha > 0$ con

$$M(r) \le F(r) < M(\alpha r) \qquad \text{asint.}$$

y

$$N(r) \le G(r) < N(\alpha r) \qquad \text{asint.}$$

Llamemos $\rho = \rho_g(f)$ y

$$\beta = \inf\{\mu > 0 : M(r) < N(r^\mu) \text{ asint.}\}.$$

Probemos en primer lugar que $\beta \le \rho$. Si $\rho = \infty$, es trivial. Si ρ es finito, sean λ, μ con $\rho < \lambda < \mu < \infty$. Entonces $F(r) < G(r^\lambda)$ asint. y

$$M(r) \le F(r) < G(r^\lambda) < N(\alpha^\lambda r^\lambda) < N(r^\mu) \qquad \text{asint.},$$

luego $\mu \ge \beta$ para todo $\mu > \rho$, así que $\beta \le \rho$. Por último, probemos que $\beta \ge \rho$. Si $\rho = 0$, es trivial. Si $\rho > 0$, sean λ, μ con $0 < \mu < \lambda < \rho$. Entonces existe una sucesión $\{r_n\} \nearrow \infty$ tal que $F(r) > G(r_n^\lambda)$ para cada n. Por tanto

$$M(\alpha r_n) > G(r_n^\lambda) > G((\alpha r_n)^\mu) \ge N((\alpha r_n)^\mu)$$

para cada n suficientemente grande, así que$\beta \ge \mu$ para cada $\mu < \rho$, luego $\beta \ge \rho$. □

6. Orden relativo y característica de Nevanlinna

Se sabe que si ρ es el orden clásico de una función entera no constante f, entonces

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T_f(r)}{\log r} \ .$$

Habida cuenta de que $T_{\exp}(r) = r/\pi$ para todo $r > 0$ [4, vol. II, p. 431], el siguiente teorema generaliza el resultado anterior.

Teorema 6

Sean f y g funciones enteras no constantes. Entonces

$$\begin{aligned}\rho_g(f) &= \inf\{\mu > 0 : T_f(r) < T_g(r^\mu) \text{ asint.}\}\\ &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T_g^{-1}(T_f(r))}{\log r}\\ &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T_g^{-1}(r)}{\log T_f^{-1}(r)} \ .\end{aligned}$$

Demostración. Probaremos sólo la primera igualdad. Las otras dos expresiones de orden son inmediatas. Denotemos $\rho = \rho_g(f)$ y

$$\alpha = \inf\{\mu > 0 : T_f(r) < T_g(r^\mu) \text{ asint.}\}.$$

Probemos que $\alpha \le \rho$. Si $\rho = \infty$, es trivial. Si ρ es finito, sean γ, δ, λ, μ con $\rho < \gamma < \delta < \lambda < \mu < \infty$. Es obvio que

$$\frac{\gamma}{\delta} < \frac{r^\mu - r^\lambda}{r^\mu + r^\lambda} \qquad \text{asint.}$$

Por el Lema 2 b), c) aplicado a g, resulta

$$\left(G(r^\gamma)\right)^{\delta/\gamma} \le KG(r^\delta) < G(r^\lambda) \qquad \text{asint.},$$

de donde

$$\log G(r^\gamma) < \frac{\gamma}{\delta} \log G\left(r^\lambda\right) < \frac{\left(r^\mu - r^\lambda\right)\log G\left(r^\lambda\right)}{\left(r^\mu + r^\lambda\right)} \le T_g(r^\mu) \qquad \text{asint.},$$

donde se ha usado el Lema 6. Pero

$$T_f(r) \le \log F(r) < \log G(r^\gamma) \qquad \text{asint.},$$

luego $T_f(r) < T_g(r^\mu)$ asint. para cada $\mu > \rho$, así que $\alpha \leq \rho$. Probemos ahora que $\alpha \geq \rho$. Si $\rho = 0$, es trivial. Si $\rho > 0$, sean γ, λ, μ con $0 < \mu < \lambda < \gamma < \rho$. Existe una sucesión $\{r_n\} \nearrow \infty$ tal que $F(r_n) > G(r_n^\gamma)$ para cada n. Fijemos $c \in (\lambda/\gamma, 1)$ y

$$d > \frac{1+c}{1-c}\,.$$

Utilizando de nuevo los Lemas 2 b), c) y 6, resulta

$$\begin{aligned} T_f(dr_n) &> \frac{(dr_n - r_n)\log F(r_n)}{(dr_n + r_n)} \\ &= \frac{(d-1)}{(d+1)} \log F(r_n) \\ &> \log\left(G(r_n^\gamma)^c\right) \\ &> \log\left(\frac{G(r_n^{\gamma c})}{K}\right) \\ &> \log G\left(r_n^\lambda\right) \\ &> \log G\left((dr_n)^\mu\right) \\ &\geq T_g\left((dr_n)^\mu\right) \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Por tanto $\alpha \geq \mu$ para cada $\mu < \rho$, así que $\alpha \geq \rho$. $\square$

7. Orden relativo y coeficientes de Taylor

Si $\sum_0^\infty a_n z^n$ es el desarrollo de Taylor de una función entera f, se sabe que su orden clásico viene dado por

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{\log(1/|a_n|)} \qquad [1, \text{p. } 74\text{–}76].$$

En este último parágrafo proporcionaremos un resultado parcial para nuestro orden relativo.

Teorema 7

Sean

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \qquad \text{y} \qquad g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$$

dos funciones enteras que cumplen la propiedad (A), y sea $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ *la sucesión constituida por el conjunto*

$$S = \{m \in \{0,1,2,\ldots\} : |a_m| < 1, |b_m| < 1, |a_m| + |b_m| > 0\}.$$

Denotemos, para cada $k \in \{1,2,3,\ldots\}$,

$$\varphi(k) = \begin{cases} \dfrac{\log|b_{n_k}|}{\log|a_{n_k}|} & \text{si } a_{n_k} \neq 0 \neq b_{n_k} \\ 0 & \text{si } a_{n_k} = 0 \\ \infty & \text{si } b_{n_k} = 0. \end{cases}$$

Si existe $\alpha \equiv \lim_{k\to\infty} \varphi(k)$ *y* $\alpha \in (0,\infty)$, *entonces*

$$\rho_g(f) = \alpha.$$

Demostración. Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$$

por ser f y g enteras, así que existe n_0 con $|a_n| < 1$, $|b_n| < 1$ si $n \geq n_0$. Ya que f y g son trascendentes, resulta que S no es vacío y está constituido por aquellos $m \geq n_0$ con $a_m \neq 0$ o $b_m \neq 0$. De la hipótesis podemos suponer que $0 < \varphi(k) < \infty$ para todo k, luego $0 < |a_{n_k}| < 1$ y $0 < |b_{n_k}| < 1$ para todo k. Tenemos que

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^{n_k} \qquad \text{y} \qquad g(z) = \sum_0^\infty b_n z^{n_k}.$$

LLamemos $\beta = 1/\alpha$. Entonces $\beta \in (0,\infty)$ y

$$\beta = \lim_{k\to\infty} \frac{\log(1/|a_{n_k}|)}{\log(1/|b_{n_k}|)}\,.$$

Fijado un $\gamma \in (0,\beta)$, existe un entero positivo k_1 tal que

$$\log(1/|a_{n_k}|) > \gamma \log(1/|b_{n_k}|)$$

para $k > k_1$. Por tanto, si $|z| = r$ es

$$|f(z)| < Ar^{n_{k_1}} + \sum_{k=1+k_1}^{\infty} |b_{n_k}|^{\gamma} r^{n_k} \qquad \text{asint.}$$

para cierta constante $A > 0$. Si $\delta \in (0, \gamma)$, entonces

$$|b_{n_k}| \left(r^{1/\delta}\right)^{n_k} \leq G\left(r^{1/\delta}\right)$$

por las desigualdades de Cauchy. Además

$$Ar^{n_{k_1}} < G\left(r^{1/\delta}\right)^{\delta} \qquad \text{asint.}$$

Si $\sigma > 1$ y B es la suma de serie convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{n_k}|^{\gamma-\delta},$$

entonces

$$|f(z)| < (1+B)\, G\left(r^{1/\delta}\right)^{\delta} \dot{<} G\left(r^{\sigma/\delta}\right) \qquad \text{asint.}$$

por los Lemas 1 y 2 c), luego $F(r) < G\left(r^{\sigma/\delta}\right)$ asint. para cada $\sigma > 1$ y cada $\delta \in (0, 1/\alpha)$, así que $\rho_g(f) \leq \mu$ para todo $\mu > \alpha$. En consecuencia $\rho_g(f) \leq \alpha$.

Hemos deducido que

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log G^{-1}(r)}{\log F^{-1}(r)} \leq \alpha$$

si g cumple (A). Análogamente, deduciríamos que

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log F^{-1}(r)}{\log G^{-1}(r)} \leq \beta = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\varphi(k)}$$

si f cumple (A). Pero entonces

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log G^{-1}(r)}{\log F^{-1}(r)} \geq \frac{1}{\beta} = \alpha.$$

Por tanto, $\rho_g(f) = \alpha$ si f y g cumplen (A). $\square$

Referencias

1. A. S. B. Holland, *Introduction to the Theory of Entire Functions*, Academic Press, New York, 1973.
2. G. P. Kapoor and S. K. Bajpai, On the (p, q)–order and lower (p, q)–order of an entire function, *J. Reine Angew. Math.* **282** (1976), 53–67.
3. B. J. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, American Mathematical Society, Providence, 1980.
4. A. I. Markushevich, *Teoría de las funciones analíticas*, Mir, Moscow, 1970.
5. A. R. Reddy, Approximation of an entire function, *J. Approx. Theory* **3** (1970), 128–137.
6. D. Sato, On the rate of growth of entire functions of fast growth, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 410–414.
7. M. N. Seremeta, On the connection between the growth of the maximum modulus and the moduli of the coefficients of its power series expansion, *American Mathematical Society Translations* **88** (1970), 291–301.
8. E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, second edition, Oxford University Press, Oxford 1968.