HOMOTOPIE-FREIE RÄUME

WEKING OEHME
(Bremen, Kattenturmer Heerstr. 268)

EINLEITUNG-ÜBERBLICK-AUSSICHT

Ziel dieser Arbeit ist, eine Klasse von topologischen Räumen, sog. homotopie-freie Räume, auszusondern, derart daß die «Homotopie-Eigenschaften» eines solchen Raumes X «voneinander möglichst unabhängig» sind.

Eine solche Unabhängigkeit wird angestrebt, indem man voraussetzt, daß X sich durch eine Deformations-Retraktion auf einen Teilraum S zusammenziehen läßt, welcher ein Bukett von Räumen S_h $(h \in H)$ ist, deren «Homotopie-Eigenschaften» möglichst einfachsind.

Zum Beispiel könnte man für jeden Raum S_h eine besonders einfache Homotopie-Gruppe (direkte, nicht notwendig kommutative, Summe der Homotopie-Gruppen) anstreben, also eine nicht-triviale Homotopie-Gruppe ohne echte Untergruppe. Alle Homotopie-Gruppen von S_h müßten dann Null sein bis auf eine, die zyklisch von der Ordnung o oder von Primzahl-Ordnung ist. Von einfachen Fällen abgesehen, dürften solche Räume, falls sie überhaupt existieren, kompliziert sein. Hier macht sich natürlich der Nachteil der Homotopie-Theorie gegenüber der Homologie-Theorie bemerkbar. Ich verzichte deshalb auf das Anstreben einfacher Homotopie-Gruppen und benutze für die S_h topologische Sphären, deren Homotopie-Gruppen zwar komplizierter sind, deren sonstige Homotopie-Eigenschaften einschließlich der Homologie-Gruppen aber besonders einfach sind.

Gerade weil die Homotopie-Gruppen der Sphären komplizierter sind und man deshalb im allgemeinen mit viel weniger Sphären S_h auskommen kann, als Elemente zur Erzeugung der Homotopie-Gruppe notwendig sind, bietet das Bukett S von Sphären als Deformations-Retrakt eine vielleicht viel einfachere und bequemere Möglichkeit zur Beschreibung der Homotopie-Eigenschaften als die Homotopie-Gruppen.

Anschaulich kann eine Sphäre S_h der Dimension n des Bukettes S als «n-dimensionales Loch» des Raumes X angesehen werden. Anschaulich gesprochen geben die Homotopie-Gruppen an, auf welche verschiedenen Arten man «sich um die verschiedenen Löcher des Raumes herumwinden» kann. Die Sphären S_h aber geben die «Löcher» selbst an. Dies ist eben einfacher und direkter.

In der Arbeit wird nun die Existenz eines Teilraumes S von X mit gewissen Eigenschaften vorausgesetzt. Die gesuchte Deformations-Retraktion von X auf S wird mit Hilfe auf eines Seite 22 oben zitierten allgemeinen Satzes konstruiert. Dazu ist das Verschwinden sämtlicher Homotopie-Gruppen nötig, was durch Bildung des Quotienten X/S erreicht wird.

Im Einzelnen geschieht folgendes:

In der Vorbemerkung wird der Quotient eines LET-Komplexes A nach einem kompakten Unterkomplex B gebildet und mit der Struktur eines LET-Komplexes versehen.

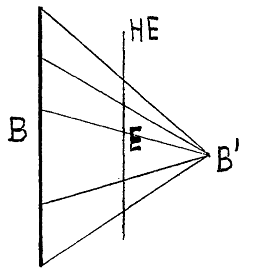
Das geschieht durch Anwendung des Schwerpunkt-Operators auf die Triangulierung von A und Unterteilung der an B angrenzenden Simplices C von A mittels eines affinen Raumes HE, der die in B liegenden Ecken von C von den anderen Ecken von C trennt. Ist B' der von den anderen Ecken erzeugte Unterkomplex, so sind die Verbindungs-Strecken von Punkten in B und Punkten in B' für die Konstruktion der Quotienten-Triangulierung wesentlich. Der Teil K von C, der auf der B zugewandten Seite von HE liegt, wird bei der Quotienten-Bildung zu einem Kegel mit B als Spitze und dem Durchschnitt E von HE mit C als Grundfläche (, den ich zweckmäßig mit einem gewissen euklidischen Kegel KE identifiziere).

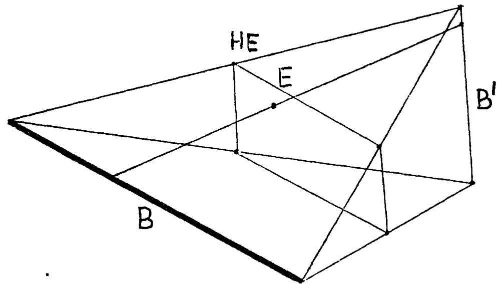
Die Verbindungs-Strecken von Punkten in B und Punkten in E liefern eine Deformations-Retraktion von K auf B (längs dieser Strecken).

Für die lokale Endlichkeit der Quotienten-Triangulierung ist die Kompaktheit von B wesentlich. Die Kompaktheit des Randes von B würde genügen.

Diese Bildung einer Quotienten-Triangulierung ist, abgesehen von Verfeinerungen vor und nach der Quotienten-Bildung, im Falle mehrerer Unterkomplexe transitiv (, was ziemlich elementar ist und hier nicht bewiesen wird). Überhaupt werden Triangulierung, soweit sie nicht wesentlich sind, öfter vernachlässigt.

Zur anschaulichen Vorstellung wird ein Dreieck als A mit einer Seite als B, oder ein Tetraeder als A mit einer Kante als B empfohlen.





Der zweite Abschnitt dient dem «Töten» der Homotopie-Gruppen Es wird ein Homotopie-Erzeuger eines LET-Komplexes X definiert $(D1)$, wobei es sich im Wesentlichen um ein Bukett S von endlich vielen Sphären handelt, das Teilraum von X ist und auf das jedes stetige, in X liegende Bild einer Sphäre zurückgezogen werden kann. Die Forderungen *b*) und *d*) in $D1$ sind etwas unglücklich. Leider konnte ich nicht auf sie versichten.

Im Falle einer Homotopie-Basis $(D2)$ wird außerdem verlangt, daß für jedes Teilbukett S' von S der Quotienten-Raum X/S' einen Homotopie-Erzeuger hat. Die Natürlichkeit dieser Forderung zeigt sich am Gegenbeispiel des Torus:

Der äußere Äquator und ein Meridian können zur Bildung eines Homotopie-Erzeugers benutzt werden. Faßt man den Meridian als Punkt auf (Quotienten-Bildung), so wird der Raum zu einem «Hörnchen mit zusammenfallenden Spitzen», also zu einer S^2, bei der Nord = und Südpol zusammenfallen. Diese «Kugel» müßte sich auf ein Bukett von Sphären zurückziehen lassen, was unmöglich ist. Der oben genannte Homotopie-Erzeuger ist also keine Homotopie-Basis. Äquator und Meridian, bzw. deren Homotopie-Klassen, sind eben topologisch nicht unabhängig genug: Läßt man *z. B.* den Meridian um den Torus geeignet rotieren, so beschreibt jeder seiner Punkte ein Element der Homotopie-Klasse des Äquators.

Dann wird bewiesen $(L1)$, daß, wenn man eine der Sphären eines Homotopie-Erzeugers als Punkt auffaßt, die übrigen einen Homotopie-Erzeuger des neuen Raumes bilden, falls der neue Raum überhaupt einen Homotopie-Erzeuger hat. Würde nämlich beim Quotienten-Bilden eine ganz neue Sphäre entstehen, die sich nicht auf die alten zurückziehen läßt, so muß, wie mit Hilfe von $D1$ *d*) bewiesen wird, ihre Dimension die Dimension der oben genannten Sphäre um 1 überschreiten. Dann läßt sich letztere über erstere zu einem Punkt zusammenziehen, was $D1$ b) widerspricht.

Man beachte, daß hierdurch das vorhin erwähnte Gegenbeispiel noch klarer wird: Das dort erwähnte stetige Bild einer S^2 müßte sich auf eine S^1 (Äquator) zusammenziehen lassen, was unmöglich ist. Die «Kugel» ist eben erst durch die Quotienten-Bildung ganz neu entstanden. Auch das oben erwähnte» «Zusammenziehen einer Sphäre über eine andere Sphäre» beim Beweis von $L1$ ist hier nicht möglich: Der Meridian läßt sich nicht über die Kugel zu einem Punkt zusammenziehen, weil man dabei bestenfalls wieder zum selben Meridian zurückkommen würde, eben deshalb, weil dieser Meridian einmal als Nordpol und einmal als Südpol der «Kugel» fungiert.

Im Falle einer Homotopie-Basis ist die Aussage $L1$ anwendbar, sogar dann, wenn mehrere Sphären der Basis zu einem Punkt gemacht werden ($L2$). $L2$ wird ziemlich trivial durch Induktion bewiesen.

Der Satz $L3$ wird weiterhin nicht gebraucht.

Im letzten Abschnitt wird eine Homotopie-Basis mit einer gewissen Zusatz-Eigenschaft als frei bezeichnet. Die Existenz einer solchen homotopie-freien Basis ist definitions-gemäß die wesentliche Eigenschaft eines homotopie-freien Raumes.

Macht man das ganze Bukett zu einem Punkt und wendet $L2$ an, so erhält man in diesem Fall einen Raum mit nur trivialen Homotopie-Gruppen.

Mit Hilfe des auf Seite 22 oben zitierten Satzeswird dieser Raum durch eine Deformations-Retraktion auf eine gewisse Umgebung des Bukettes zusammengezogen. Hierfür muß gezeigt werden, daß gewisse relative Homotopie-Gruppen Null sind, was durch Übergang zu den Homologie-Gruppen mit Hilfe des Satzes von Hurewicz, Anwendung des Ausschneidungssatzes (, der in der Homotopie-Theorie leider nicht gilt), und Rückkehr zu den Homotopie-Gruppen erreicht wird. Letzteres geschieht mit Hilfe der Zusatz-Eigenschaft.

Die Umgebung, auf die der Raum zusammengezogen wurde, kann nach der Vorbemerkung auf das Bukett zusammengezogen werden. Hintereinander-Ausführung dieser Deformations-Retraktionen ergibt eine Deformations-Retraktion des Raumes auf das Bukett. Dieses Haupt-Ergebnis der Arbeit wird in $L4$ und $L5$ formuliert.

Hiermit ist auch die Homotopie-Äquivalenz beider Räume gezeigt.

Verzichtet man auf die Deformations-Retraktion und will man nur diese Homotopie-Äquivalenz zeigen, so ist man versucht, den Satz von Whitehead auf den Quotienten-Raum und das (als Punkt aufgefaßte) Bukett anzuwenden. Die Voraussetzungen sind wegen der Trivialität der Homotopie-Gruppen ja erfüllt (für eine beliebige stetige Abbildung zwischen den Räumen. Solch eine gibt es, da ein Raum ein-elementig ist.). Es dürfte aber schwierig sein, die so erhaltene Homotopie-Äquivalenz zwischen Quotienten-Raum und als Punkt aufgefaßtem Bukett zu den ursprünglichen Räumen «hochzuheben».

Weiter wird bewiesen ($L7$), daß Homotopie-Äquivalenz eines Raumes zu einem homotopie-freien Raum mit Homotopie-Äquivalenz zu einem Bukett von endlich vielen Sphären gleichbedeutend ist. Diese Räume bilden eine Kategorie, die ich F nenne, leider keine Menge. FF sei die Unter-Kategorie der homotopie-freien Räume. Aber auch für Kategorien lassen sich die Begriffe Äquivalenz-Relation, Äquivalenzklasse, usw. definieren. (Eigentlich müßte man neue Ausdrücke einführen.). Jede Homotopie-Äquivalenzklasse von F läßt sich also durch mindestens ein Bukett der genannten Art repräsentieren.

Ließe sich nun zeigen, daß zwei Bukette von endlich vielen Sphären homöomorph sind, wenn sie die gleichen Homotopie-Gruppen haben, so würde folgendes gelten:

Seien F_1 und F_2 zwei Räume aus F mit den gleichen Homotopie-Gruppen. Jeder ist homotopie-äquivalent zu einem Bukett der genannten Art. Beide Bukette haben also die gleichen Homotopie-Gruppen, sind homöomorph, also auch homotopie-äquivalent. F_1 und F_2 sind also homotopie-äquivalent, und es gilt:

L: In F und FF fallen die Äquivalenz-Relationen der Homotopie-Äquivalenz und der Gleichheit der Homotopie-Gruppen zusammen. In FF fällt beides mit der Existenz eines gemeinsamen Deformations-Retraktes zusammen.

Für die zugehörigen Äquivalenz-Klasseneinteilungen von F und FF bilden die Bukette von je endlich vielen Sphären ein vollständiges Repräsentanten-System (bis auf Homöomorphie). Jeder Raum dieses Systems ist in seiner Klasse in F oder FF minimal bezüglich Inklusion, und ist gemeinsamer Deformations-Retrakt aller Räume seiner Klasse in FF (bis auf Homöomorphie).

Soviel ich weiß, wurde obige Voraussetzung aber noch nicht bewiesen.

HINWEISE

$X \subset A$ (bzw. $\in A$) bedeutet, daß X Teilmenge (bzw. Element) der Menge A ist. $'A'$ ist die Mächtigkeit von A.

Sind X und Y Teilmengen der Menge A, so sei $X/Y = X/X \cap Y$ der Quotienten-Raum von X, dessen Elemente $X \cap Y$ und alle $\{x\}$ mit $x \in X$-Y sind. Dabei wird oft, falls Mißverständnisse ausgeschlossen sind, ein Element oder eine Teilmenge von X mit dem kanonischen Bild in X/Y identifiziert.

i_A ist die Identität von A.

Eine Abbildung ist eine stetige Funktion.

f/A bedeutet die Einschränkung einer Funktion f auf eine Teilmenge A ihres Definitions-Bereiches. Sie wird oft mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet, ebenso Erweiterungen.

Ist $(A_t)_{t \in T}$ eine Überdeckung der Menge A von abgeschlossenen Mengen $A_t \subset A$, so daß jeder Punkt von A eine Umgebung hat, die nur endlich viele der A_t schneidet, so können Abbildungen $f_t\colon A_t \to B$ $(t \in T)$ mit der Eigenschaft, daß für $t, t' \in T$ f_t und $f_{t'}$ auf $A_t \cap A_{t'}$ übereinstimmen, zu einer Abbildung $f\colon A \to B$ zusammengesetzt werden. Dieser bekannte Satz wird oft benutzt werden, ohne daß explizit auf ihn verwiesen wird.

In einem simplizialen Komplex wird nur die schwache Topologie (Eine Menge ist abgeschlossen, falls sie jedes Simplex in einer abgeschlossenen Menge schneidet.) verwendet.

Unter einem LET-Raum oder LET-Komplex verstehe ich einen zusammenhängenden, lokal-endlich triangulierten topologischen Raum. In einem LET-Komplex enthält jeder kompakte Unter-Komplex nur endlich viele Simplices.

Ist X ein topologischer Raum mit einem Grundpunkt x_0, so ist X_* das Raumpaar (X, x_0).

Eine Abbildung heißt trivial, falls sie homotop zu einer Konstanten ist.

I ist das Einheitsintervall.

Ein linearer Raum ist ein Vektorraum. Ein affiner Teilraum eines linearen Raumes ist eine additive Nebengruppe eines linearen Unterraumes.

Die Summe einer linearen und einer konstanten Funktion heißt affin. Einschränkungen von linearen (bzw. affinen) Funktionen werden auch linear (bzw. affin) genannt.

In einem linearen Raum L bedeutet für a, $b \in L$ $[a, b]$ die konvexe Hülle von a und b, $(a, b] = [a, b] - \{a\}$, $(a, b) = [a, b] - \{a\} - \{b\}$, usw.

Falls nicht ausdrücklich anders definiert, bedeutet N die Menge der natürlichen Zahlen, Z die Menge der genzen Zahlen, und R die Menge der reellen Zahlen.

Für $n \in N$ sei E^{n+1} die Teilmenge

$$\{(x_i)_{i \in N} : \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \leqslant 1\}$$

von R^N, S^n ihr Rand, und $o \in R^N$ der Punkt $(x_i)_{i \in N}$ mit $x_i = 0$ für $i \neq 0$ und $x_0 = 1$. Dieser Punkt wird alle $n \in N$ als Grundpunkt von E^{n+1} und S^n benutzt. E^{+n} und E^{-n} sind die bekannten Teilmengen von S^n: In E^{+n} ist die 0 — te Komponente nicht negativ, in E^{-n} nicht positiv.

Die «kanonischen» Abbildungen

$$\text{a}: (E^n \cup E^{+n}, E^{+n}) \to (S^n, 0)$$

und

$$b: (E^n \cup E^{+n}, E^{+n}) \to (S^n, E^{+n})$$

sind die aus der elementaren Homotopie-Theorie bekannten Funktionen.

Das Bukett einer Familie $(A_h)_{h \in H}$ von topologischen Räumen mit Grundpunkten $a_h \in A_h$ $(h \in H)$ ist der Quotient ihrer Summe nach dem Teilraum der Grundpunkte.

Für diese Arbeit benutzte ich ausschließlich folgende Literatur:
P. J. Hilton: An Introduction To Homotopy Theory.
N. Bourbaki: Topologie Générale.

VORBEMERKUNG

Ist A ein LET-Komplex, B ein nicht-leerer kompakter Unterkomplex von A, so kann A/B auf folgende Weise zu einem LET-Komplex gemacht werden:

Auf die Triangulierung T von A wende man den Schwerpunktsoperator Sd. an. Die neue (lokal-endliche) Triangulierung Sd (T) hat dann die Eigenschaft, daß jedes Simplex von A, dessen Ecken in B

liegen, in B liegt. Sei nämlich D ein Simplex der Triangulierung Sd (T) mit Ecken in B und $\overline{D}$ das Simplex der Triangulierung T gleicher Dimension, das D enthält. Der Schwerpunkt von $\overline{D}$ ist Ecke von D, liegt also in B. Dann liegt $\overline{D}$, also auch D, in B. Im Folgenden wird Sd (T) verwendet.

Alle auftretenden Räume sind separiert.

Sei A als Unterkomplex von $\Delta_{N'-1}$, dem singulären Simplex des R^N gedeutet, wobei N die Menge der Ecken von A und $M \subset N$ die (endliche) Menge der Ecken von B ist. Sei $M' = N - M$.

Sei $L = r + V$, bzw. $L' = r' + V'$, der von M, bzw. M', erzeugte affine Raum ($r, r' \in R^N$, V, V' lineare Teilräume)

$HE = 1/2. (L + L') = r/2 + r'/2 + V + V'$ ist ein affinerRaum. L und L' liegen in Koordinatenräumen mit dem Nullpunkt 0 als Durchschnitt und enthalten nicht 0, sind also disjunkt. Aus Affinitätsgründen sind dann auch L und HE, bzw. L' und HE, disjunkt.

Wegen $R^M \cap R^{M'} = 0$ ist $V \cap V' = 0$, also ist $V + V'$ direkte Summe von V und V'. Die Darstellung

$$a = r/2 + r'/2 + v + v' = (r/2 + v) + (r'/2 + v')$$

für $e \in HE$ mit $r/2 + v \in L/2$, $r'/2 + v' \in L'/2$ ist also eindeutig.

Sei $E = HE \cap A$ und C der (kompakte) Komplex der (endlich vielen) Simplices von A, die sowohl R^M als auch $R^{M'}$ schneiden. Es ist nach obiger Eigenschaft $B = A \cap R^M$. Sei $B' = A \cap R^{M'}$ und $BB = C \cap B$, $BB' = C \cap B'$. Also ist C die konvexe Hülle von $BB \cup BB'$ und $E = HE \cap C$ kompakt. Wegen obiger eindeutiger Darstellbarkeit ist $E = 1/2. (BB + BB')$.

Sei K, bzw. K', die von $E \cup BB$, bzw. $E \cup BB'$, erzeugte konvexe Menge. Es ist $K \cup K' = C, K \cap K' = E$. BB, BB', K, und K' sind kompakt.

Sind für $i = 1,2$ $b_i \in BB$, $b_i' \in BB'$ und schneiden sich die «offenen» Strecken (b_1, b'_1) und (b_2, b'_2), so sind $b_1 - b_2 \in V$ $b'_1 - b'_2 \in V'$ linear abhängig, also ist $b_1 = b_2$ und $b'_1 = b'_2$. Die (b, b') mit $b \in BB$, $b' \in BB'$ sind also disjunkt, also auch die $(b, e]$ mit $b \in BB$, $e \in E$ deren Vereinigung $K - B = K - BB$ ist.

Für $b \in BB$, $b' \in BB'$ sei

$$f(b, b') = 1/2. \ (b + b')$$

f ist stetig von $BB \times BB'$ in E, nach Obigem eineindeutig auf, also ein Homöomorphismus, da $BB \times BB'$ kompakt ist.

Speziell ist $p_0 = pr_1 \circ f^{-1}: E \to BB$ stetig.

Sei ϕ: $E \times I \to K$ mit

$$\phi(e, t) = (1 - t).\ P_0(e) + t.\ e$$

und $\phi' = \phi_{/E \times (o,1]}$. ϕ ist stetig. ϕ' ist nach Obigem bijektiv von $o \times (0,1]$ auf $K - B$.

Bemerkung: Sind $R' \subset R$, $S' \subset S$ topologische Räume, R kompakt, S' lokal-kompakt, und ist f: $R \to S$ stetig und $f' = f_{/R}$: $R' \to S'$ bijektiv, so ist f' ein Homöomorphismus von R' auf S'.

Beweis: Jedes $s = f'(r) \in S'$ ($r \in R'$) hat in S' eine kompakte, also in S abgeschlossene, Umgebung $U. f'^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ ist in R abgeschlossen, also eine kompakte Umgebung in R' von r. f ist von $f^{-1}(U)$ auf U bijektiv, also ein Homöomorphismus. Da dies für alle $r \in R'$ gilt, folgt die Behauptung.

Wendet man die Bemerkung auf $R = E \times I$, $R' = E \times (0,1]$, $S = K$, $S' = K - B$ an, so folgt, daß ϕ': $E \times (0,1] \to K - B$ ein Homöomorphismus ist.

Da mit HE auch E nicht den Nullpunkt 0 enthält, ist der Kegel $KE = \bigcup_{e \in E} [0, e]$ «mit Grundfläche E und Spitze 0» nicht ausgeartet.

Sei G: $E \times I \to KE$ mit

$$G(e, t) = e.\ t$$

und $G' = G_{/E \times (o,1]}$. G ist stetig. G' ist bijektiv von $E \times (0,1]$ auf $KE - 0$.

Wendet man die Bemerkung auf $R = E \times I$, $R' = E \times (0,1]$, $S = KE$, $S' = KE - 0$ an, so folgt, daß G': $E \times (0,1] \to KE - 0$ ein Homöomorphismus ist.

Sei nun

$$\begin{array}{ll} F\colon K \to KE & \text{mit} \\ F_{/K-B} = G' \circ \phi'^{-1} & \text{und} \\ F(b) = 0 \text{ für } b \in BB. & \end{array}$$

$F_{/K-B}$ ist ein Homöomorphismus von $K - B$ auf $KE - 0$.

Bemerkung: Sind R und S topologische Räume, R kompakt, S separiert, f: $R \to S$ stetig von R auf S, R/f der Quotienten-Raum $\{f^{-1}(f(x)): x \in R\}$ von R, und P: $R \to R/f$ die kanonische Projektion, so ist durch $\overline{f}(\overline{r}) = f(r)$ für $r \in R$ und $\overline{r} = p(r)$ ein Homöomorphismus $\overline{f}$: $R/f \to S$ definiert.

Beweis: $\overline{f}$ ist bijektiv, da f auf ist. Da R kompakt ist, ist auch R/f als kanonisches Bild von R kompakt. S ist separiert. Zu zeigen ist nur noch die Stetigkeit von $\overline{f}$. Ist $U \subset S$ offen in S, so auch $f^{-1}(U)$ in R. Da $f^{-1}(U)$ Vereinigung von Elementen von R/f ist, ist $f^{-1}(U) = p(f^{-1}(U)$ offen in R/f.

Wendet man diese Bemerkung auf $R = E \times I$, $S = K$, $f = \phi$ an, so folgt wegen $\phi(E \times 0) = BB$ und $G(E \times 0) = 0$ für eine offene Umgebung U von 0 in KE, daß $G^{-1}(U)$ Umgebung von $E \times 0$ in $E \times I$, also wegen der Eineindeutigkeit von ϕ auf $E \times (0,1]$ Vereinigung von Elementen von $E \times I/\phi$ ist. Dann ist $p(G^{-1}(U))$ Umgebung von $p(E \times 0)$ in $E \times I/\phi$ und $\phi(G^{-1}(U)) = \overline{\phi}(p(G^{-1}(U)))$ Umgebung von $\overline{\phi}(p(E \times 0)) = \phi(E \times 0) = BB$ in K. Wegen $F^{-1}(U) = \phi(G^{-1}(U))$ ist damit die Stetigkeit von F auch in BB gezeigt. Da $K - B$ offen in K ist, ist F überall stetig. Wegen $\phi(e, 1) = G(e, 1) = e$ für $e \in E$ ist F auf E die Identität. Da $BB \cup E$ der Rand von K in $A = B \cup K \cup K' \cup B'$ ist, ist die Fortsetzung von F zu F: $A \to KE \cup K' \cup B'$ durch $F(b) = 0$ für $b \in B$ und $f(a) = a$ für $a \in K' \cup B'$ stetig und auf und von $A - B = (K - B) \cup K' \cup B'$ auf $(KE - 0) \cup K' \cup B'$ bijektiv. Es ist $F^{-1}(0) = B$. Also ist $A/F = A/B$.

Wendet man die Bemerkung auf $R = K \cup B$, $S = KE$, $f = F_{/K \cup B}$ an, so folgt, daß $\overline{F_{/K \cup B}}$: $K \cup B/B \to KE$ ein Homöomorphismus ist.

Da F auf $K' \cup B'$ die Identität ist, ist $\overline{F_{/K' \cup B'}} = F_{/K' \cup B'}$: $K' \cup B' \to K' \cup B'$ auch ein Homöomorphismus.

$$\overline{F}: A/F \to KE \cup K' \cup B'$$

ist also ein Homöomorphismus.

Da E Durchschnitt des LET-Komplexes A und des affinen Raumes HE ist, läßt sich die Triangulierung von A so zu einer lokalendlichen Triangulierung TT verfeinern, daß E zu einem Unterkomplex von A wird. Da E Rand von $K' \cup B'$ in A ist, ist dann auch $K' \cup B'$ Unterkomplex von A.

Durch Adjunktion von 0 als Ecke zu jedem Simplex von E wird der Kegel zu einem LET-Komplex. Dadurch wird $KE \cup K' \cup B'$ zu einem LET-Komplex.

Offenbar sind, wie der Reihe nach folgt, folgende Abbildungen affin: $f : BB \times BB' \to E$,

p_0: $E \to BB$,

$\phi : E \times I \to K$,

$G : E \times I \to KE$,

$F_{/K-B}$: $K - B \to KE - 0$.

Wegen $K = \overline{K - B}$ und $KE = \overline{KE - 0}$ ist dann $F\colon K \to KE$ auf jedem Simplex von TT in K affin.

Jedes Simplex der Triangulierung TT in $K' \cup B'$ wird durch F auf sich, also auf ein Simplex von $KE \cup K' \cup B'$, abgebildet. Jedes andere Simplex D von TT in A liegt in $K \cup B$. Eine Ecke von D liegt entweder in E oder in B. Das Simplex $D \cup E$ von TT wird durch F auf ein Simplex von $KE \cup K' \cup B'$ abgebildet, und die Ecken von D in B werden auf die Ecke 0 von $KE \cup K' \cup B'$ abgebildet. Da F auf D affin ist, wird also nach Konstruktion der Triangulierung von KE D auf ein Simplex von KE abgebildet. Es gibt eine Verfeinerung TT der Triangulierung von A, bezüglich der $F\colon A \to KE \cup K' \cup B'$ simplizial ist.

Identifizieren wir nun mittels $\overline{F}$ A/B mit $KE \cup K' \cup B'$, so wird durch $\overline{F}$ die Triangulierung von $KE \cup K' \cup B'$ auf A/B übertragen, wodurch A/B zu einem LET-Komplex wird. Dabei wird F zu $F^{-1} \circ F$, also zur kanonischen Projektion von A auf A/B. Die Triangulierung von A kann also so verfeinert werden, daß die kanonische Projektion von A auf A/B simplizial ist.

Eine Triangulierung von A/B, die durch Anwendung des Schwerpunktsoperators auf die Triangulierung von A, anschließendes Verfeinern, Durchlaufen der beschriebenen Konstruktion, und nochmalige Verfeinerung der entstandenen Triangulierung entsteht, nennen wir «aus der Triangulierung von A hervorgegangen». Hat A einen Grundpunkt $a \in B$, so wird B als kanonisches Bild von a als Grundpunkt von A/B angesehen.

Sei die Abbildung $H\colon E \times I \times I \to E \times I$ definiert durch

$$H\,(e, t, s) = (e, t.\,(1 - s)) \text{ für } e \in E,\; t \in I,\; s \in I.$$

Es gilt
$$\begin{aligned} H\,(e, t, 0) &= (e, t), \\ H\,(e, t, 1) &= (e, o), \\ H\,(e, o, s) &= (e, o). \end{aligned}$$

Seien $p\colon E \times I \to E \times I/\phi$ und $p'\colon E \times I \times I \to E \times I \times I/\phi \times i_1$ die kanonischen Projektionen auf die Quotienten-Räume.

Für $(e, t, s) \in E \times I \times I$, $(e', t', s') \in E \times I \times I$ mit $p'\,(e, t, s) = {}$ $= p'\,(e', t', s')$ gilt

$$(\phi\,(e, t)\,, s) = \phi \times i_1\,(e, t, s) = \phi \times i_1\,(e', t', s') = (\phi\,(e', t'), s'),$$

also $s = s'$ und $\phi\,(e, t) = \phi\,(e', t')$, woraus $t = t'$ folgt.

1. Fall: $t.\,(1 - s) \neq o$: Da ϕ auf $E \times (o,1]$ injektiv ist, folgt aus $t \neq o \neq t'$: $(e, t) = (e', t')$, also $p\,(H\,(e, t, s)) = p\,(H\,(e', t', s'))$.

2. Fall: $t.\,(1 - s) = o$:

a) $t \neq o$: Aus $\phi\,(e, t) = \phi\,(e', t')$ folgt $e = e'$, $\phi\,(e, o) = \phi\,(e', o)$.

b) $t = o$: $\phi\,(e, o) = \phi\,(e, t) = \phi\,(e', t') = \phi\,(e', o)$.

In beiden Fällen gilt

$$\phi\,(H\,(e, t, s)) = \phi\,(e, o) = \phi\,(e', o) = \phi\,(H\,(e', t', s')),$$
$$\text{also } p\,(H\,(e, t, s)) = p\,(H\,(e', t', s')).$$

Für $x, y \in E \times I \times I$ folgt also aus $p'\,(x) = p'\,(y)$:

$$p\,(H\,(x)) = p\,(H\,(y)).$$

Bekanntlich ist dann durch

$$H'\,(\bar{x}) = p\,(H\,(x)) \text{ für } \bar{x} = p'\,(x)$$

eine Abbildung

$$H'\colon E \times I \times I/\phi \times i_I \to E \times I/\phi$$

zwischen den Äquivalenzklassen definiert.

Nach der Bemerkung von Seite 3 sind

$$\bar{\phi}\colon E \times I/\phi \to K \qquad \text{und}$$

$$\overline{\phi \times i_I}\colon E \times I \times I/\phi \times i_I \to K \times I$$

Homöomorphismen. Sei

$$H'' = \bar{\phi} \circ H' \circ (\overline{\phi \times i_I})^{-1}\colon K \times I \to K.$$

H'' ist stetig, und es gilt offenbar für $k \in K$, $b \in BB$, $t \in I$

$$H''\,(k, o) = k,$$
$$H''\,(k, 1) \in \phi\,(E \times o) = BB,$$
$$H''\,(b, t) = b.$$

H'' ist also eine Deformationsretraktion von K auf BB.

HOMOTOPIE-BASEN

Im Folgenden bezeichnen wir mit X einen LET-Raum mit einer Ecke $x_0 \in X$ als Grundpunkt, dessen Triangulierung wir T nennen. In Quotienten-Räumen von X benutzen wir stets eine aus T hervorgehende Triangulierung.

*D*1: Eine endliche Familie $(s_h)_{h \in h}$ von stetigen, injektiven, und simplizialen Abbildungen s_h: $S_*^{n(h)} \to X_*$ mit $n(h) \in N$ heißt Homotopie-Erzeuger von X_*, falls für $S_h = s_h(S^{n(h)})$ und $S = \bigcup_{h \in H} S_h$ (Im Falle $H = \phi$ setzen wir $S = \{x_0\}$.) Folgendes gilt:

a) Für $h \in H$ sind die $S_h - x_0$ disjunkt.

b) Für jedes $H' \subset H$, $h \notin H'$, ist für $S' = \bigcup_{h' \in H'} S_{h'}$, $S_{h'} = s_h(S^{n(h')})$, $X' = X/S'$ die Homotopie-Klasse in X'_* der kanonischen Projektion von s_h in X' von der Ordnung o.
Speziell hat also $[s_h]$ in X_* die Ordnung o, und s_h ist nicht-trivial.

c) Jede stetige Abbildung s: $S^n{}_* \to X_*$ mit $n \in N$ ist in X_* homotop zu einer stetigen Abbildung s': $S_*{}^n \to S_*$.

d) Für jedes $h \in H$ gibt es auf S_h einen Punkt $x \neq x_0$, der in X eine euklidische Umgebung einer Dimension höchstens $n(h) + 1$ hat.

Die s_h sind Homöomorphismen, da die $S^{n(h)}$ kompakt sind und X separiert ist. Die S_h sind also topologische Sphären.

Da die s_h simplizial sind, sind alle S_h und S Unterkomplexe von X. Nach dem simplizialen Approximations-Satz kann also in c) s' sogar simplizial gewählt werden (bei geeigneter Verfeinerung der Triangulierung der Sphären).

Da X wege-zusammenhängend ist (wie aus dem Zusammenhang folgt), und da die s_h nicht-trivial sind, ist $n(h)$ für alle $h \in H$ positiv.

*D*2: Ein Homotopie-Erzeuger $(s_h)_{h \in H}$ von X_* heisst Homotopie-Basis von X_*, falls für jedes $H' \subset H$ und $S' = \bigcup_{h \in H'} S_h$ auch $(X/S')_*$ einen Homotopie-Erzeuger hat (für eine aus der Triangulierung T hervorgehende Triangulierung).

*L*1: Ist $(s_h)_{h \in H}$ ein Homotopie-Erzeuger von X_* und hat für ein gewisses $h \in H$ und für $S_h = s_h(S^{n(h)})$, $X' = X/S_h = X'_*$ einen Homotopie-Erzeuger, so ist für $H' = H - h$ die kanonische Projektion von $(s_{h''})_{h'' \in H'}$ in X' ein Homotopie-Erzeuger von X'_*.

Beweis: Sei für positives m s: $S^m_* \to X'_*$ ein Element eines Homotopie-Erzeugers von X'_* mit $S = s\,(S^m)$. s ist Homöomorphismus von S^m auf S mit $s\,(o) = S_h$ und $s\,(S^m - o) \subset X - S_h$. Sei $\overline{S}$ die abgeschlossene Hülle von $s\,(S^m - o)$ in X. Es ist $\overline{S} \subset s\,(S^{m-o}) \cup S_h$. Da s bezüglich einer aus T hervorgehenden Triangulierung von X' simplizial ist, gibt es eine Verfeinerung von T, so daß $\overline{S}$ Unterkomplex von X ist und für jedes Simplex D von S^m $D - o$ durch s affin in ein Simplex von $\overline{S}$ abgebildet wird.

Die «kanonische» Abbildung

$$a\colon (E^m \cup E^{+m},\ E^{+m})_* \to (S^m, o)_*,$$

die auf $E^m - S^{m-1}$ ein Homöomorphismus auf $S^m - o$ ist, ist bei geeigneter Triangulierung von E^m eine simpliziale Abbildung. Es ist dann $s \circ a_{/E}\, m_{-S}\, m - 1$ auf jedem Simplex affin und auf $\overline{S} - S_h$. Hat der Durchschnitt von Simplices aus E^m, die nicht ganz in S^{m-1} liegen, einen nicht-leeren Durchschnitt mit S^{m-1}, dann auch schon mit $E^m - S^{m-1}$, woraus wegen $E^m = \overline{E^m - S^{m-1}}$ und $\overline{S} = \overline{\overline{S} - S_h}$ folgt, daß $s \circ a_{/E}\, m_{-S}\, m - 1$ auf eine (auf jedem Simplex affine) Abbildung s: $(E^m, S^{m-1}) \to (\overline{S}, \overline{S} \cap S_h)$ fortgesetzt werden kann.

Fall a) Sei $s_{/S}\, m - 1$: $S^{m-1} \to S_h$ nicht-trivial in S_h und $m - 1 = n\,(h)$:

Da $\overline{s}_{/S}\, m - 1$ Einschränkung einer Abbildung $\overline{s}$: $E^m \to X$ ist, ist $\overline{s}_{/S}\, m - 1$ trivial in X. s_h: $S^{m-1} = S^{n(h)} \to S_h$ ist als Homöomorphismus erzeugende Abbildung der Gruppe $\pi_{n(h)}\,(S_h) = Z$. $\overline{s}_{/S}\, m - 1$ ist also homotop zu einer nicht-trivialen Potenz von s_h, die in X trivial ist. Dies ist nach $D1$ b) unmöglich.

Fall b) Sei $s_{/S}\, m - 1$ nicht-trivial in S_h und $m - 1 \neq n\,(h)$:

Wäre $m - 1$ kleiner als $n\,(h)$, so wäre wegen $\pi_{m-1}\,(S_h) = \pi_{m-1}\,(S^{n(h)}) = o$ $\overline{s}_{/S}\, m - 1$ trivial. Es ist also $m - 1$ größer als $n\,(h)$. Nach $D1$ *d)* gibt es auf S_h einen Punkt $x \neq x_0$, der in X eine euklidische Umgebung U einer Dimension d kleiner-gleich $n\,(h) + 1$, also kleiner als m, hat. Da $\overline{s}_{/S}\, m - 1$ nicht-trivial, also auf S_h, ist, gibt es einen Punkt $y \in S^{m-1}$ mit $\overline{s}\,(y) = x$. Wegen der Stetigkeit gibt es eine Umgebung V von y in E^m mit $\overline{s}\,(V) \subset U$. Das Innere V^o von V in R^m ist eine m dimensionale Euklidische Teilmenge von $E^m - S^{m-1}$, die durch den Homöomorphismus $s_{/E}\, m_{-S}\, m - 1$ in die Euklidische Menge U der Dimension d kleiner als m abgebildet wird. Nach dem Dimensionssatz ist dies unmöglich. (Die Voraussetzung $D1$ *d)* wird nur hier gebraucht!) Eintreten kann also nur der

Fall c) Sei $s_{/S^{m-1}}: S^{m-1} \to S_h$ trivial in S_h:
Sei

$$b: (E^m \cup E^{+m}, E^{+m})_* \to (S^m, E^{+m})_*$$

der «kanonische» Homöomorphismus, der auf E^{+m} die Identität ist. Bekanntlich sind a und b in $(S^m, E^{+m})_*$ homotop.

Nach Voraussetzung gibt es eine Abbildung

$$\hat{s}: (E^m \cup E^{+m}, E^{+m})_* \to (\overline{S} \cup S_h, S_h)_*$$

mit $\hat{s}_{/E^m} = \overline{s}$. Ist P die kanonische Projektion von X auf X', so ist $P \circ \hat{s}_{/E^{+m}} = x_0$ (konstant) und $\hat{s}_{/E^m - S^{m-1}} = P \circ \overline{s}_{/E^m - S^{m-1}} = P \circ s \circ a_{/E^m - S^{m-1}} = s \circ a_{/E^m - S^{m-1}}$, also $p \circ \hat{s} = s \circ a$. Für $t = \hat{s} \circ b^{-1}: S^m_* \to X_*$ gilt also $P \circ t = P \circ \hat{s} \circ b^{-1} = s \circ a \circ b^{-1} \sim s \circ b \circ b^{-1} = s$.

Da $(s_h)_{h \in H}$ Homotopie-Erzeuger von X_* ist, gibt es ein in X_* zu t homotopes $t': S^m_* \to (\bigcup_{h' \in H} S_{h'})_*$. Die kanonische Projektion in X'_* der Homotopie-Funktion zwischen t und t' ist eine Homotopie-Funktion zwischen $P \circ t \sim s$ und $s' = P \circ t': S^m_* \to P(\bigcup_{h' \in H'} S_{h'})_*$. s ist also homotop zu s'.

Sei nun $(s_k)_{k \in K}$ ein Homotopie-Erzeuger von X'_*, $s_k: S^{n(k)}_* \to X'_*$, und t eine Abbildung von S^n_* (n positiv) in X'_*. t ist homotop zu einer Abbildung $t': S^n_* \to T_*$ mit $T = \bigcup_{k \in K} T_k$, $T_k = s_k(S^{n(k)})$.

Wie bewiesen, gibt es zu jedem $k \in K$ ein zu s_k in X'_* homotopes $s'_k: S^{n(k)}_* \to P(\bigcup S_{h'})_*$. Wegen $T_k \cong S^{n(k)}$ gibt es für jedes $k \in K$ also auch eine Abbildung

$$L_k: T_k \times I \to X' \text{ mit}$$

$$L_k(x_0 \times I) = x_0, \; L_{k/T_k \times 0} = i_{T_k}, \text{ und}$$

$$L_k(T_k \times 1) \in P(\bigcup_{h' \in H'} S^k_{h'}).$$

Da K endlich ist, lassen sich die L_k zu einer stetigen Abbildung $L: T \times I \to X'$ zusammensetzen. Es gilt

$$L(x_0 \times I) = x_0, \; L_{/T \times 0} = i_T, \text{ und}$$

$$L(T \times 1) \subset P(\bigcup S_{h'}).$$

i_T ist also in X'_* homotop zu einer Abbildung

$$j: T \to P(\bigcup_{h' \in H'} S_{h'}).$$

Für t': $S_*{}^n \to T$ gilt also

$$t \sim t' = i_T \circ t' \sim j \circ t' \colon S_*{}^n \to P\,(\bigcup_{h' \in H'} S_{h'})_*.$$

Damit ist die Eigenschaft $D1$ c) gezeigt.

Die Familie $P\,(s_{h'})_{h' \in H'}$ ist endlich.

Für $h' \in H'$, also $h' \neq h$, gibt es auf $S_{h'}$ einen Punkt $x \neq x_0$, der in X eine euklidische Umgebung U einer Dimension höchstens $n\,(h') + 1$ hat. U kann wegen $D1$ *a*), da S_h kompakt, also abgeschlossen ist, so gewählt werden, daß es S_h nicht schneidet. Also enthält $P\,(U) = U$ nicht den Grundpunkt von X' und erfüllt die Bedingungen der Eigenschaft $D1$ d).

Auch die übrigen Eigenschaften eines Homotopie-Erzeugers sind erfüllt. Damit ist der Beweis beendet.

*L*2: Ist $(s_h)_{h \in H}$ mit s_h: $S_*^{n(h)} \to X_*$ eine Homotopie-Basis von X_* und ist $H' \subset H$, so ist für $S_h = s_h\,(S^{n(h)})$, $S = \bigcup_{h \in H'} S_h$, $X' = X/S$, die kanonische Projektion auf X' von $(s_h)_{h \in H - H'}$ eine Homotopie-Basis von X'.

Beweis: Sei $H = \{h_1, h_2, \ldots\ldots, h_d\}$ und

$$H' = \{h_1, h_2, \ldots\ldots, h_c\},\ c \leqslant d.$$

Nach Definition einer Homotopie-Basis haben alle Räume $X/\bigcup_{1 \leq i \leq k} S_i$ $(S_i = S_{h_i},\ 1 \leqslant k \leqslant c)$ einen Homotopie-Erzeuger. Nach $L1$ ergibt sich wegen

$$X/\bigcup_{1 \leq i \leq k} S_i = (X/\bigcup_{1 \leq i \leq k-1} S_i)/S_k$$

für $1 \leqslant k \leqslant c$ durch Induktion nach k, daß die kanonische Projektion von $(s_{h_i})_{k < i \leq d}$ in $X/\bigcup_{1 \leq i \leq k} S_i$ Homotopie-Erzeuger von $X/\bigcup_{1 \leq i \leq k} S_i$ ist. Für $k = c$ folgt, daß $(s_h)_{h \in H - H'}$ Homotopie-Erzeuger von X' ist. Da für $H'' \subset H - H'$ $X'/\bigcup_{i \in H''} S_i = X/\bigcup_{i \in H'' \cup H'} S_i$ nach Voraussetzung einen Homotopie-Erzeuger hat, folgt die Behauptung. (Die Reihenfolge der h_i beim Induktionsprozess ist beliebig!)

Ist in $L2$ $H' = H$, $S = \bigcup_{h \in H} S_h$, $X' = X/S$, so hat X' eine leere Homotopie-Basis. Jede Abbildung s: $S^n{}_* \to X_*$ mit natürlichen n ist homotop zur Konstanten x_0, und alle Homotopie-Gruppen von X' sind gleich Null.

Noch etwas über Homotopie-Erzeuger:

*L*3: Sei $(s_h)_{h \in H}$ mit $s_h\colon S_*^{n(h)} \to X_*$ ein Homotopie-Erzeuger von X_* und $h' \in H$. Für $S_h = s_h\,(S^{n(h)})$, $S = \bigcup\limits_{h \in H - h'} S_h$ gibt es keine Abbildung $s\colon S_*^{n(h')} \to S_*$, die in X_* zu einer Potenz $s_{h'}{}^n$ (n positiv) homotop ist.

Beweis: Sei s homotop zu $s_{h'}{}^n$ mit einer Homotopie-Funktion K. Dann ist, wenn P die kanonische Projektion von X in $X' = X/S$ ist, die Konstante $P \circ s\colon S_*^{n(h')} \to S \in X'$ homotop zu $P \circ s_{h'}{}^n = (P \circ s_{h'})^n$ mit der Homotopie-Funktion $P \circ K$, was $D1$ b) widerspricht.

Ist nun H' eine echte Teilmenge von H, so existiert ein $h' \in H - H'$, und nach $L3$ für den Fall $n = 1$ ist $s_{h'}$ zu keiner Abbildung, deren Bild in $\bigcup\limits_{h \in H'} S_h \subset \bigcup\limits_{h \in H - h'} S_h$ enthalten ist, homotop. Daraus folgt, daß $(s_h)_{h \in H'}$ kein Homotopie-Erzeuger von X_* ist. Ein Homotopie-Erzeuger ist also als solcher minimal.

HOMOTOPIE-FREIE RÄUME

*D*3: X heißt homotopie-frei, falls X (bezüglich eines geeigneten Grundpunktes x_0) eine Homotopie-Basis $(s_h)_{h \in H}$ mit $s_h\colon S_*^{n(h)} \to X_*$ mit folgender Eigenschaft hat:

Jede Umgebung von $S = \bigcup\limits_{h \in H} S_h$ mit $S_h = s_h\,(S^{n(h)})$ enthält eine Umgebung U von S, so daß $(X - U^0, \overline{U} - U^0)$ einfach zusammenhängend ist, *d. h.* $(X - U^0, \overline{U} - U^0)$ hat die erste Homotopie-Menge Null.

(Eine solche Homotopie-Basis heißt frei)

Sei im Folgenden $(s_h)_{h \in H}$ mit $s_h\colon S_*^{n(h)} \to X_*$ freie Homotopie-Basis von X_* und $S_h = s_h\,(s^{n'h)})$, $S = \bigcup\limits_{h \in H} S_h$. Setzt man $A = X$, $B = S$, so kann man die Vorbemerkung anwenden. Wir verwenden die dortigen Bezeichnungen.

K enthält als Umgebung von S eine Umgebung U von S mit $\pi_1\,(X - U^0, \overline{U} - U^0) = o$. U enthält eine kompakte Umgebung $V = \phi\,(E \times [o, e])$ mit $o < e < 1$. Sei $R = \phi\,(E \times e)$, also $R = V - V^0$.

Sei nun $\dot{I} = \{o, 1\}$ und $s\colon (I, \dot{I}) \to (X - V^0, V - V^0) = (X - V^0, R)$.

$s^{-1}\,(X - \overline{U})$ ist offen in I, also Vereinigung (höchstens abzählbar vieler) disjunkter Intervalle $I_n = (t_n, t'_n)$, $n = 1, 2 \ldots\ldots$ Für jedes n sind dann t_n und $t'_n \in$ Rand $(X - U) = U - U^0$, und $s_{/[t_n, t_n']}\colon ([t_n, t'_n], \{t_n, t'_n\}) \to (X - U^0, U - U^0)$ ist wegen $\pi_1\,(X - U^0, \overline{U} - U^0) = o$ homotop in $(X - U^0, \overline{U} - U^0)$ zu einem $s'_n\colon [t_n, t'_n] \to \overline{U} - U^0$.

$I - s^{-1}(X - U)$ ist ebenfalls Vereinigung (höchstens abzählbar vieler) Intervalle (t^m, t'^m). Für jedes m ist $s_{/[t^m, t'^m]}: [t^m, t'^m] \to \overline{U}$ homotop in $(X - U^0, U - U^0)$ zu sich selbst. Durch Zusammensetzen der Homotopie-Funktionen (Die Voraussetzungen der Abgeschlossenheit und lokalen Endlichkeit sind offenbar erfüllt), erhält man in $(X - U^0, \overline{U} - U^0)$ eine Homotopie-Funktion zwischen

$$s\colon (I, \dot{I}) \to (X - V^0, V - V^0) \text{ und } s'\colon (I, \dot{I}) \to (\overline{U} - V^0. \ V - V^0),$$

wobei s' die Zusammensetzung der $s_{/[t^m, t'^m]}$ und s'_n ist. s und s' sind also in $(X - U^0)$, also auch in $(X - V^0, V - V^0)$, homotop.

Sei $p\colon [e,1] \times I \to I$ eine Deformations-Retraktion von $[e, 1]$ auf e. Dann ist $p'\colon (E \times [e, 1]) \times I \to E \times e$ mit $p'(a, t, t') = (a, \mathrm{p}(t, t'))$ eine Deformations-Retraktion von $E \times [o, 1]$ auf $E \times e$, und wegen $V^0 = \phi(E \times [o, e))$ ist

$$p'' = \phi \, o \, p' \, o \ (\phi \times i_I)^{-1}\colon \ K \times I \to K$$

eine Deformations-Retraktion von $K - V^0$ auf $V - V^0$. Wegen s': $(I, \dot{I}) \to (K - V^0, V - V^0)$ ist s', also auch s, in $(X - V^0, V - V^0)$ homotop zu einem Weg $s''\colon I \to V - V^0$. Damit ist $\pi_1(X - V^0, V - V^0) = o$ gezeigt.

Sei nun $P\colon X \to X' = X/S$ die kanonische Projektion. Da V^0 Umgebung von $S \in X'$ ist, ist $(X - V^0, V - V^0) = P(X - V^0, V - V^0) = (X' - W^0, W - W^0)$, wobei $W = P(V)$ ist. Also gilt $\pi_1(X' - W^0, W - W^0) = o$.

Wegen $W = P(V) = F(V) = G(\phi^{-1}(V)) = (E \times [o, e]) = E. [o, e] \subset KE$ gemäß der in der Vorbemerkung beschriebenen Identifizierung ist $S = 0 \in KE \subset X'$ Deformations-Retrakt von W. Also sind die Homotopie-Gruppen von W gleich Null. Nach der Bemerkung auf Seite 18 unten sind die Homotopie-Gruppen von X' gleich Null. Dies gilt dann auch, nach dem Satz von Hurewicz, für die Homologie-Gruppen von X' und W. Nach der exakten Homologie-Sequenz sind auch die Homologie-Gruppen des Paares (X', W) gleich Null.

Sei $WW = E. [o, e/2]$. Es ist $\overline{WW} = WW \subset W^0$. Auf das Paar (X', W) ist also der Ausschneidungssatz mit WW als auszuschneidender Menge anwendbar: Für alle $q \in Z$ gilt $H_q(X' - WW, W - WW) = H_q(X', W) = o$. Ferner ist mit $R = V - V^0 = W - W^0 = E. e$ $(X' - W^0, R) = (X' - W^0, W - W^0)$ ein Deformations-Retrakt von $(X' - WW, W - WW)$ und somit $H_q(X' - W^0, R) = o$.

Oben war $\pi_1(X' - W^0, R) = o$ gezeigt worden.

Sei nun

$$R = \bigcup_{j \in J} R_j$$

die Zerlegung von R in Zusammenhangs-Komponenten. Es ist auch die Zerlegung in Wegezusammenhangs-Komponenten, denn in einem simplizialen Komplex stimmt beides überein, und E ist ein zu $R = E$. e homöomorpher simplizialer Komplex.

Sei $X' - W^0 = T = \bigcup_{j' \in J'} T_j$, die Zerlegung von T in Zusammenhangs-Komponenten. Es sind auch die Wegezusammenhangs-Komponenten, da $T = E \times [e, 1] \cup K' \cup B'$ triangulierbar ist.

Wegen $R \subset T$ gibt es zu jedem $j \in J$ ein $j' \in J'$ mit $R_j \subset T_{j'}$. Sei für $j_1, j_2 \in J$ mit $j_1 \neq j_2$ und $j' \in J'$ $R_{j_1} \subset T_{j'}$, $R_{j_2} \subset T_{j'}$. Wegen $R_{ji} \neq \phi$ $(i = 1,2)$ gibt es $a_1 \in R_{j_1} \subset T_{j'}$, $a_2 \in R_{j_2} \subset T_j$, und einen Weg s: $I \to T_{j'}$ mit $s(o) = a_1$, $s(1) = a_2$.

Wegen $\pi_1(T, R) = o$ ist s homotop zu einem Weg s': $I \to R$ mit $s'(o) = s(o) \in R_{j_1}$, $s'(1) = s(1) \in R_{j_2}$, was wegen $j_1 \neq j_2$ unmöglich ist. Zu jedem $j' \in J'$ gibt es also höchstens ein $j \in J$ mit $R_j \subset T_{j'}$. Andererseits kann für $j' \in J'$, da X' wegezusammenhängend ist, ein beliebiger Punkt $x \in T_j$, durch einen *Weg* s mit $0 \in KE$ verbunden werden. Wegen $0 \in W$ und $T_{j'} \cap W^0 = \phi$ ist $s(I) \cap \text{Rand}\ (W) = s(I) \cap R \neq \phi$. Wegen $s(I) \cap R \subset T$ und $s(I) \cap T_{j'} \neq \phi$ ist $s(I) \cap R \cap T_{j'} \neq \phi$, also $T_{j'} \cap R \neq \phi$. Zu jedem $j' \in J'$ gibt es also genau $j \in J$ mit $R_j \in T_{j'}$. Die Umkehrung ist trivial.

Man kann also $J' = J$ und $R_j \subset T_j$ für $j \in J$ annehmen.

Nach Obigem gilt auch für alle $q \in Z$, $j \in J$:

$$H_q(T_j, R_j) = o \text{ und } \pi_1(T_j, R_j) \sim o.$$

(T_j, R_j) ist also q — simpel für alle $q \in Z$.

Behauptung: Für $j \in J$ und positives q gilt

$$\pi_q(T_j, R_j) = o.$$

Beweis: Für $q = 1$ wurde dies gezeigt. Ist es für alle positiven q, die kleiner als n sind $(n \in N)$, richtig, so folgt nach dem Satz von Hurewicz für die relativen Gruppen (Hilton, «An Introduction To Homotopy Theory», III, 3, 4):

$$\pi_n(T_j, R_j) = H_n(T_j, R_j) = o,$$

womit die Behauptung für n bewiesen ist.

Im oben genannten Buch wird bei III, 3, 6 bewiesen, daß eine Abbildung f von einem endlichen, zusammenhängenden, simplizialen Komplex Z in einen endlichen, zusammenhängenden, simplizialen Komplex Y mit einem zusammenhängenden Unter-Komplex Y_0 homotop in Y zu einer Abbildung $f'\colon Z \to Y_0$ ist, wenn für alle positiven q

$$\pi_q (Y, Y_0) = o$$

gilt. Der Beweis gilt mit leichten Abänderungen auch für LET-Komplexe beliebiger (auch unendlicher) Dimension, da eine Homotopie-Funktion $H\colon Z \times I \to Y$ durch sukzessive Fortsetzung auf Simplizes höherer Dimension definiert werden kann, sogar so, daß für einen Unter-Komplex Z' von Z mit $f(Z') = H(Z'. o) \subset Y_0$ auch $H(z, t) = H(z, o) = f(z)$ für alle $z \in Z'$ gilt.

Die T_j $(j \in J)$ sind als Zusammenhangs-Komponenten des LET-Komplexes T Unter-Komplexe von T, und R_j ist ebenso LET-Komplex, und zwar Unter-Komplex von T_j. Wenden wir den genannten Satz für jedes $j \in J$ auf $Z = T_j$, $Y = T_j$, $Y_0 = R_j$ und $f = i_{T_j}$ (Identität von T_j) an. so ergibt sich eine Abbildung

$$\begin{array}{ll} L_j\colon T_j \times I \to T_j & \text{mit} \\ L_j (x, o) = x & (x \in T_j) \ , \\ L_j (x, 1) \in R_j & \quad » \ , \\ L_j (x, t) = x & (x \in R_j), \ (t \in I). \end{array}$$

T ist als LET-Komplex lokal-kompakt. Jeder Punkt $x \in T$ hat also eine kompakte Umgebung U_x. U_x schneidet nur endlich viele Simplices von T, also auch nur endlich viele T_j $(j \in J)$. Also ist für jedes $t \in I$ $U_x \times I$ eine Umgebung von (x, t), die nur endlich viele der $T_j \times I$ schneidet. Außerdem sind die T_j als Zusammenhangs-Komponenten in T abgeschlossen, also auch die $T_j \times I$ in $T \times I$. Somit lassen sich die Abbildungen L_j $(j \in J)$ zu einer Abbildung

$$L'\colon T \times I \to T$$

zusammensetzen. Es gilt:

$$\begin{array}{ll} L' (x, o) = x & (x \in T) \ , \\ L' (x, 1) = R & \quad » \ , \\ L' (x, t) = x & (x \in R) \ , \ (t \in I). \end{array}$$

Die kanonische Projektion

$$P\colon X - V^0 \to X' - W^0 \text{ ist ein Homöomorphismus}$$

auf mit $P(V - V^0) = W - W^0 = R$.

Für $L'' = P^{-1} \circ L' \circ (P \times i_I)\colon (X - V^0) \times I \to X - V^0$

gilt:

$$L''(x, o) = x \qquad (x \in X - V^0) ,$$
$$L''(x, 1) = V - V^0 \qquad » \qquad ,$$
$$L''(x, t) = x \qquad (x \in V - V^0) , \ (t \in I).$$

L'' läßt sich zu einer Abbildung

$$L'''\colon X \times I \to X$$

fortsetzen, indem man

$$L'''(x, t) = x \qquad (x \in V) , \quad (t \in I)$$

setzt Auf $(V - V^0) \times I$ stimmen nämlich L'' und L''' überein. Es gilt:

$$L'''(x, o) = x \qquad (x \in X) ,$$
$$L'''(x, 1) \in V \qquad » \qquad ,$$
$$L'''(x, t) = x \qquad (x \in V) , \quad (t \in I).$$

L''' ist also Deformations-Retraktion von X auf V.

Nun existiert, wie in der Vorbemerkung bewiesen wurde, eine Deformations-Retraktion von K auf BB

$$H''\colon K \times I \to BB.$$

Da K und B abgeschlossen sind und BB als Durchschnitt haben, läßt sich H'', indem man

$$H'''(x, t) = x \qquad (x \in B) , \quad (t \in I)$$

setzt, zu einer Deformations-Retraktion

$$H'''\colon (K \cup B) \times I \to B$$

fortsetzen.

Sei nun

$$L\colon X \times I \to X$$

definiert durch

$$L(x, t) = L'''(x, 2.\,t)\ (x \in X),\ (t \in [o, 1/2]),$$
$$= H'''(L'''(x, 1), 2.\,t - 1)\ (x \in X),\ (t \in [1/2, 1]).$$

Wegen $L'''(x, 2.\,1/2) = L'''(x, 1) \in V\,K\,C\,K \cup B$ und $H'''(L'''(x, 1), 2.\,1/2 - 1) = H'''(L'''(x, 1), o) = L'''(x, 1)$ ist L wohl-definiert. Offenbar ist L eine Deformations-Retraktion von X auf $B = S$. Damit ist bewiesen:

$L4$: Ist $(s_h)_{h \in H}$ mit s_h: $S_*^{n(h)} \to X_*$ eine Homotopie-Basis von X_*, und ist $S_h = s_h(S^{n(h)})$, $S = \bigcup_{h \in H} S_h$, so ist S Deformations-Retrakt von X.

$L5$: Jeder homotopie-freie Raum hat ein Bukett von endlich vielen Sphären als Deformations-Retrakt.

$L6$: Ein Bukett von endlich vielen Sphären ist ein homotopiefreier Raum.

Beweis von $L6$: Sei $S = \bigcup_{h \in H} S_h$ mit endlicher Indexmenge H ein Bukett der S_h, die in $x_0 \in S$ zusammengeheftet sind. Sei für alle $h \in H$ $n(h)$ Dimension der topologischen Sphäre S_h. Es gibt einen Homöomorphismus s_h von $S^{n(h)}$ auf S_h. s_h kann so gewählt werden, daß $s_h(o) = x_0$ ist. Die $S^{n(h)}$ und S können so lokal-endlich trianguliert werden, daß die s_h simplizial sind. $(s_h)_{h \in H}$ ist ein Homotopie-Erzeuger von S, da die Bedingungen a) bis d) in $D1$ trivial erfüllt sind.

Für beliebiges $H' \subset H$ sei $S' = \bigcup_{h \in H'} S_h$ und p: $S \to S'' = \bigcup_{h \in H - H'} S_h$ die kanonische Projektion des Bukettes S auf das Teil-Bukett S''. Dann ist nach der Bemerkung auf Seite 11 $\overline{p}$: $S/p = S/S' \to S''$ ein Homöomorphismus. S'' hat als Bukett von endlich vielen Sphären, wie gezeigt, einen Homotopie-Erzeuger, also auch S/S'. Somit ist $(s_h)_{h \in H}$ auch eine Homotopie-Basis von s.

Die Zusatz-Eigenschaft in $D3$ ist erfüllt, da jede Umgebung von S in S gleich S ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Da ein Deformations-Retrakt eines Raumes zu diesem homotopieäquivalent ist, folgt aus $L5$ und $L6$:

$L7$: Ein topologischer Raum ist genau dann homotopie-äquivalent zu einem homotopie-freien Raum, wenn er homotopie-äquivalent zu einem Bukett von endlich vielen topologischen Sphären ist.

LITERATUR

[1] P. J. HILTON: *An Introduction to Homotopy theory.*

[2] N. BOURBAKI: *topologie générale.*