SOBRE LAS MEDIDAS INVARIANTES EN UN GRUPO TOPOLOGICO (*)

por

BALTASAR R.-SALINAS

Después de definir la medida de HAAR para un grupo topológico cualquiera, vamos a caracterizar los grupos topológicos que poseen una medida de HAAR, probando que, cuando existe tal medida, ella queda unívocamente determinada salvo un factor constante. También probamos que toda medida de HAAR sobre un grupo topológico determina unívocamente la topología de éste. En general, los resultados que obtenemos aquí completan los obtenidos por A. WEIL en el Apéndice I: «La réciproque du théoreme de Haar» de [3].

Comenzaremos exponiendo algunos conceptos necesarios para la lectura de este trabajo.

Una *medida exterior topológica* sobre un espacio regular E es una medida exterior μ^* sobre E que verifica:

(MT I) *μ^* es una medida exterior de* BOREL, *esto es, los conjuntos de* BOREL *de E son μ^*-medibles.*

(MT II) *μ^* es localmente finita, es decir, para todo $x \in E$ existe un entorno V de x tal que $\mu^*(V) < \infty$.*

(MT III) *Todo abierto de medida finita es μ^*-compacto.* Un conjunto A ($\subset E$) se dice μ^*-compacto si para cada cubrimiento abierto $\mathcal{O}_0$ de A y para todo $\varepsilon > 0$ existe un número finito de $O_i \in \mathcal{O}_0$ que satisfacen

$$\mu^* (A - \bigcup_1^n O_i) < \varepsilon.$$

(*) Este trabajo ha sido realizado con una ayuda de la Junta para el Fomento de la Investigación en la Universidad.

(MT IV) *Si O es un abierto de medida infinita, para todo entero n existe un abierto $O_n \subset O$ tal que $n \leq \mu^* (O_n) < \infty$.*

(MT V) *Si $\mu^* (X) < \infty$ existe un abierto $O \supset X$ de medida finita y un conjunto de* BOREL *$B \supset X$ tal que $\mu^* (B) = \mu^* (X)$* (1).

Una medida topológica μ es la restricción de una medida exterior topológica μ^* sobre la clase de los conjuntos μ^*-medibles.

La medida exterior definida usualmente a partir de una medida de RADON en un espacio localmente compacto (2) es un ejemplo de medida exterior topológica. Igualmente, si μ_0^* es una medida exterior topológica sobre un espacio regular E_0 y $E \subset E_0$, la función real de conjunto μ^* definida sobre $\mathcal{P}(E)$ poniendo

$$(1.1) \qquad \mu^* (O) = \sup \{\mu_0^* (O') \mid O \supset O' \in \mathcal{O},\ \mu_0^*(O') < \infty\}$$

para cada $O \in \mathcal{O}$, siendo $\mathcal{O}$ la clase de los abiertos en E, y

$$(1.2) \qquad \mu^* (A) = \inf \{\mu^* (O) \mid A \subset O \in \mathcal{O}\}$$

para cada $A \subset E$ es una medida exterior topológica sobre E (3).

En particular, si μ_0^* es la medida exterior de HAAR (a izquierda) sobre un grupo G_0 localmente compacto y G es un subgrupo de G_0, la función real de conjunto μ^* definida sobre $\mathcal{P}(E)$ por (1.1) y (1.2), con $E = G$ es una medida exterior topológica sobre G invariante a izquierda.

Como sobre un grupo localmente compacto son idénticos los conceptos de medida de HAAR y de medida topológica, no nula e invariante a izquierda, podemos dar la siguiente definición general de medida de HAAR:

---

(1) Esta condición se puede sustituir de manera equivalente por

$$\mu^* (A) = \inf \{\mu (O) \mid A \subset O \in \mathcal{O}\}$$

para todo $A \subset E$, donde $\mathcal{O}$ es la clase de los abiertos de E.

(2) Un espacio localmente compacto es un espacio topológico E tal que cada punto $x \in E$ posee un entorno compacto. Algunos autores exigen, además, que E sea un espacio de HAUSDORFF.

(3) Evidentemente, $\mu^* (O) = \mu_0^* (O)$ para todo $O \in \mathcal{O}$ de medida exterior $\mu_0^* (O) < \infty$. Si E es unión contable de conjuntos de medida exterior finita se puede probar que $\mu^* (A) = \mu_0^* (A)$ para todo $A \subset E$ y, por tanto, μ^* es la restricción sobre E (o sobre $\mathcal{P}(E)$) de la medida exterior μ_0^*.

DEFINICIÓN. — Sobre un grupo topológico cualquiera, se llama *medida* (resp. *medida exterior*) *de* HAAR a toda medida (resp. medida exterior) topológica, no nula e invariante a izquierda.

TEOREMA 1. — *Un grupo topológico G posee una medida de* HAAR *μ si y sólo si es un subgrupo denso de un grupo localmente compacto G_0 tal que, si $\mu_0{}^*$ es una medida exterior de* HAAR *sobre G_0, existe un abierto O en G que verifica*

$$0 < \mu_0{}^* (O) < \infty . \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN.— Desde luego, la condición requerida es suficiente para que exista una medida de HAAR sobre G puesto que entonces la función real de conjunto μ^* definida sobre $\mathcal{P}(G)$ por (1.1) y (1.2) es, evidentemente, una medida exterior topológica sobre G, invariante a izquierda y no nula por ser $\mu^* (O) = \mu_0{}^* (O) > 0$.

Para demostrar que dicha condición es también necesaria bastará probar las cuatro proposiciones siguientes:

PROPOSICIÓN 1. — *Si G es un grupo topológico que posee una medida de* HAAR *μ, entonces todo abierto O, no vacío, es de medida $\mu (O) > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. — Siendo $\mu (G) > 0$ de (MT IV) se deduce que existe un abierto O_0 tal que $0 < \mu (O_0) < \infty$. Entonces, como O_0 es μ^*-compacto según (MT III) y, para todo abierto O, no vacío, $\{xO \mid x \in G\}$ es un cubrimiento abierto de O_0, se deduce que para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número finito de abiertos $O_i = x_i O$ $(1 \leq i \leq n)$ de modo que

$$\mu (O_0 - \bigcup_1^n O_i) < \varepsilon$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mu (O_0) &\leq \mu (\bigcup_1^n O_i) + \mu (O_0 - \bigcup_1^u O_i) \\ &\leq \sum_1^n \mu (O_i) + \varepsilon \\ &= n\mu (O) + \varepsilon , \end{aligned}$$

de donde tomando $\varepsilon < \mu (O_0)$ resulta $\mu (O) > 0$.

Proposición 2. — *Si G es un grupo topológico que posee una medida de* Haar *μ, existe un entorno U de la unidad e acotado en el sentido de que, para todo entorno V de e, hay un número finito de $x_i \in U$ $(1 \leq i \leq n)$ tales que $U \subset \bigcup_1^n x_i V$.*

Demostración. — Según (MT II) existe un entorno U_0 de e de medida exterior $\mu^* (U_0) < \infty$. Sea U un entorno de e tal que $U^2 = UU \subset U_0$ y V un entorno cualquiera de e. Entonces vamos a probar que hay un número finito de $x_i \in U \,(1 \leq i \leq n)$ tales que $U \subset \bigcup_1^n x_i V$. En efecto, como existe un entorno abierto W de e tal que $WW^{-1} \subset U \cap V$, si $x_1 W, \, x_2 W, \, \ldots, \, x_p W \, (x_i \in U)$ son disjuntos, siendo $x_i W \subset U^2 \subset U_0$, resulta

$$\mu^* (U_0) \geq \mu \left(\bigcup_1^p x_i W \right) = \sum_1^p \mu (x_i W) = p\mu (W)$$

y

$$p \leq \frac{\mu^* (U_0)}{\mu (W)} \quad (\mu (W) > 0).$$

Por lo tanto, el máximo n de $x_i \in U$ tales que $x_1 W, x_2 W, \ldots, x_n W$ son disjuntos es finito. De esto se deduce que para cada $x \in U$ existe uno de dichos x_i $(1 \leq i \leq n)$ tal que $xW \cap x_i W \neq \phi$ y $x \in x_i WW^{-1} \subset x_i V$. Por consiguiente, $U \subset \bigcup_1^n x_i V$ (4).

Como la existencia de un entorno de e acotado es condición necesaria y suficiente para que G sea un subgrupo denso de un grupo localmente compacto, de la proposición 2 resulta:

Proposición 3. — *Si G es un grupo topológico que posee una medida de* Haar, *entonces G es un subgrupo denso de un grupo G_0 localmente compacto.*

Proposición 4. — *Si G es un grupo topológico que posee una medida de* Haar *μ (o una medida exterior de* Haar *μ^*) y si G_0 es el grupo*

(4) Véase Weil, [3], pág. 143.

localmente compacto a que hace referencia la proposición 3, *resulta que la función real de conjunto* $\mu_0{}^*$ *definida por*

(3) $$\mu_0{}^* (A) = \inf \{ \mu (O \cap G) \mid A \subset O \epsilon \mathcal{O}_0 \}$$

para cada $A \subset G_0$, *siendo* $\mathcal{O}_0$ *la clase de los abiertos en* G_0, *es una medida exterior de* HAAR *que prolonga a* μ^*.

DEMOSTRACIÓN 1. — Desde luego $\mu_0{}^*$ es una medida exterior sobre G_0 según es fácil comprobar. Entonces, para demostrar que $\mu_0{}^*$ es una medida exterior topológica bastará probar que cumple las condiciones:

(MT I) $\mu_0{}^*$ es una medida exterior de BOREL. En efecto, sea B un conjunto de BOREL en G_0. Entonces, como cualquiera que sea el conjunto X, para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto $O \epsilon \mathcal{O}_0$ que contiene a X y verifica $\mu (O \cap G) \leq \mu_0{}^* (X) + \varepsilon$ y, evidentemente, $B \cap G$ es μ^*-medible, resulta:

$$\begin{aligned} \mu_0{}^* (X) + \varepsilon \geq \mu (O \cap G) &= \mu (O \cap B \cap G) + \mu [(O - B) \cap G] \\ &\geq \mu_0{}^* (X \cap B) + \mu_0{}^* (X - B) \end{aligned}$$

para cada $\varepsilon > 0$, de donde se deduce que B es $\mu_0{}^*$-medible.

(MT II) $\mu_0{}^*$ es localmente finita. Como, evidentemente, hay un entorno abierto $U = O \cap G$ en G $(O \epsilon \mathcal{O}_0)$ de e de medida $\mu (U) < \infty$ y $\{xO \mid x \epsilon G\}$ es un cubrimiento abierto (en G_0) de G_0 por ser G denso en G_0, se deduce que todo $y \epsilon G_0$ posee un entorno xO $(x \epsilon G)$ de medida $\mu_0 (xO) = \mu (xO \cap G) = \mu(O \cap G) < \infty$.

(MT III) Todo abierto $O (\epsilon \mathcal{O}_0)$ de medida $\mu_0(O)$ finita es $\mu_0{}^*$-compacto. En efecto, si $\mathcal{O}'_0$ es un cubrimiento abierto (en G_0) de O y $\mathcal{U}$ es la clase de los abiertos U $(\epsilon \mathcal{O}_0)$ cuya clausura $\overline{U}$ (en G_0) está contenida en un abierto $O' \epsilon \mathcal{O}'_0$, resulta que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de O. Entonces, como $\mu (O \cap G) = \mu_0 (O) < \infty$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de $U_i \epsilon \mathcal{U}$ $(1 \leq i \leq n)$ y de $O_i \epsilon \mathcal{O}'_0$ con $\overline{U}_i \subset O_i$ tales que

$$\begin{aligned} \mu_0 (O - \bigcup_1^n O_i) \leq \mu_0 (O - \bigcup_1^n \overline{U}_i) &= \mu [(O - \bigcup_1^n \overline{U}_i) \cap G] \\ &\leq \mu [(O \cap G) - \bigcup_1^n (U_i \cap G)] < \varepsilon. \end{aligned}$$

(MT IV) Si O es un abierto en G_0 de medida $\mu_0(O) = \infty$, para todo entero n existe un abierto $O_n \subset O$ tal que $n \leq \mu_0(O_n) < \infty$. En efecto, como entonces $O \cap G$ es un abierto en G de medida $\mu(O \cap G) = \infty$ existe un abierto $U_n = O_n' \cap G$ en G $(O'_n \in \mathcal{O}_0)$ contenido en $O \cap G$ tal que $n \leq \mu(O_n' \cap G) < \infty$. De esto se deduce que el abierto $O_n = O_n' \cap O$ satisface las condiciones requeridas puesto que $O_n \subset O$ y

$$\mu_0(O_n) = \mu(O_n \cap G) = \mu(O_n' \cap G).$$

(MT V) Si $\mu_0^*(X) < \infty$ existe un abierto $O \supset X$ $(O \in \mathcal{O}_0)$ de medida $\mu_0(O) < \infty$ y un conjunto de BOREL $B \supset X$ tal que $\mu_0(B) = \mu_0^*(X)$. Basta tener en cuenta que

$$\mu_0^*(X) = \inf \{\mu_0(O) \mid X \subset O \in \mathcal{O}_0\}$$

según se deduce de (3).

Una vez que hemos demostrado que μ_0^* es una medida exterior topológica pasamos a probar que es también invariante a izquierda. En efecto, si $x \in G$ resulta inmediatamente que

$$\begin{aligned}\mu_0^*(xA) &= \inf \{\mu(xO \cap G) \mid A \subset O \in \mathcal{O}_0\} \\ &= \inf \{\mu(O \cap G) \mid A \subset O \in \mathcal{O}_0\} \\ &= \mu_0^*(A)\end{aligned}$$

para todo conjunto $A \subset G_0$. Sea x un elemento cualquiera de G_0. Entonces, como G es denso en G_0, existe una sucesión generalizada $(x_i)_I$ de puntos $x_i \in G$ convergente a x y, por tanto, para toda función $f \geq 0$ continua sobre G_0 y con soporte compacto se verifica

$$\mu_0(xf) = \int f(x^{-1} y)\, d\mu_0(y) = \lim_i \int f(x_i^{-1} y)\, d\mu_0(y)$$

$$= \lim_i \int f(y)\, d\mu_0(x_i y) = \int f(y)\, d\mu_0(y) = \mu_0(f).$$

Por tanto, como entonces

$$\int^* f(x^{-1} y)\, d\mu_0(y) = \int^* f(y)\, d\mu_0(y)$$

para toda función real $f \geq 0$ [5], en particular, para la función característica φ_A de A resulta

$$\mu^*{}_0 (xA) = \int^* \varphi_A (x^{-1} y)\, d\mu_0 (y)$$

$$= \int^* \varphi_A (y)\, d\mu_0 (y) = \mu_0{}^* (A) .$$

Finalmente, de (MT V), [1] y (3) se deduce que $\mu_0{}^*$ es una prolongación de μ^* y, en particular, que $\mu_0{}^* \neq 0$.

Demostración 2. — Sea C_{00} el espacio lineal de las funciones continuas sobre G_0 con soporte compacto. Entonces

$$\mu_0 : f \to \int_G f d\mu$$

es un funcional lineal no negativo sobre C_{00} [6] y, por consiguiente, define una medida exterior topológica $\mu_0{}^* \geq 0$. De esto se deduce, si denotamos por φ_X la función característica de $X \subset G_0$, que

$$\mu_0 (O) = \sup \left\{ \int_G f\, d\mu \mid \varphi_{O \cap G} \geq f \in C_{00} \right\}$$

para todo $O \in \mathfrak{O}_0$.

Como por otra parte, si C_u^+ es el espacio lineal de las funciones uniformemente continuas $f \geq 0$ sobre G con soporte acotado se puede probar que

$$\sup \left\{ \int_G f d\mu \mid \varphi_{O \cap G} \geq f \in C_{00} \right\}$$

---

(5) Si C_{00}^+ es la clase de las funciones $f \geq 0$ continuas sobre G_0 con soporte compacto y si I_0^+ es la clase de las funciones $f \geqslant 0$ semicontinuas inferiormente sobre G_0, se tiene

$$\mu (f) = \sup \{\mu (\varphi) \mid f \geqslant \varphi \in C_{00}^+\}$$

para toda $f \in I_0^+$ y

$$\mu^* (f) = \inf \{\mu (\varphi) \mid f \leqslant \varphi \in I_0^+\}$$

para toda función $f \geq 0$ definida sobre G_0.

(6) La restricción $f \mid G$ de toda función $f \in C_{00}$ es uniformemente continua y por lo tanto, μ-medible.

$$= \sup \left\{ \int_G f d\mu \mid \varphi_{O \cap G} \geq f \in C_u^+ \right\}$$

$$= \mu (O \cap G) \, (^7),$$

resulta

$$\mu_0 \, (O) = \mu(O \cap G)$$

para todo $O \in \mathcal{O}_0$ y, por tanto,

$$\mu_0{}^* \, (A) = \inf \, \{ \mu \, (O \cap G) \mid A \subset O \in \mathcal{O}_0 \} \, .$$

Entonces la función real de conjunto $\mu_0{}^*$ definida por (3) es una medida exterior topológica. Para probar que es una medida de HAAR basta proceder de igual modo que antes.

OBSERVACIÓN 1. — Si G es unión contable de conjuntos de medida exterior finita se puede sustituir la condición (2) por

(2)' $$\mu^* \, (G) > 0.$$

Del teorema 1 o de la proposición 3 resulta:

COROLARIO 1. — *Si G es un grupo topológico que posee una medida de* HAAR, *entonces G es localmente precompacto.*

OBSERVACIÓN 2. — Un grupo topológico G, como el grupo aditivo de los números racionales, puede ser localmente precompacto y, sin embargo, no poseer ninguna medida de HAAR.

Como consecuencia de la proposición 4 resulta:

COROLARIO 2. — *Si G_0 es un grupo topológico y G es un subgrupo denso de G_0 que posee una medida de* HAAR *μ, entonces la función real de conjunto $\mu_0{}^*$ definida por* (3) *es una medida exterior de* HAAR *sobre G_0 que prolonga a μ^*.*

TEOREMA 2. — *Sobre un grupo topológico existe a lo más (salvo un factor constante) una medida de* HAAR.

---

(7) Esta igualdad se deduce del teorema 18 de la tesis doctoral de J. GARAY DE PABLO [1] teniendo en cuenta que $\varphi_G = \sup\{f \mid \varphi_G \geqslant f \in C_u^+\}$, es decir, que G es completamente regular respecto de C_u^+ según la terminología adoptada allí.

DEMOSTRACIÓN. — Si μ_1 y μ_2 son dos medidas de HAAR sobre el grupo topológico G se puede completar G, según la proposición 3, en un grupo localmente compacto G_0. Sea μ^*_{i0} la medida exterior de HAAR sobre G_0 definida por (3) a partir de μ_i $(i = 1,2)$. Entonces, por el teorema de unicidad de la medida de HAAR sobre un grupo localmente compacto, se deduce que existe una constante $c > 0$ tal que $\mu^*_{20} = c\mu_{10}^*$ y, por consiguiente, $\mu_2^* = c\mu_1^*$ por ser μ_i^* la restricción sobre G (o $\mathcal{P}(G)$) de la medida exterior μ_{i0}^*.

Del corolario 2 y del teorema 2 resulta:

COROLARIO 3. — *Sea G_0 un grupo topológico con una medida exterior de* HAAR μ^*_0 *y G un subgrupo denso de G_0. Entonces, si existe un abierto O en G tal que*

$$0 < \mu_0^* (O) < \infty, \tag{2}$$

la restricción sobre G (o $\mathcal{P}(G)$) de la medida exterior μ^*_0 es una medida exterior de HAAR *sobre G.*

De la proposición 4 y de una bien conocida propiedad de la medida de HAAR sobre los grupos localmente compactos se obtiene:

TEOREMA 3. — *Si μ^* es una medida exterior de* HAAR *sobre un grupo topológico G, entonces existe una función continua Δ sobre G tal que*

$$\mu^* (Ax) = \mu^* (A)\, \Delta (x) \tag{4}$$

para todo $A \subset G$ y $x \in G$.

TEOREMA 4. — *Si G es un grupo topológico que posee una medida de* HAAR *μ y si G_0 y μ_0 tienen el mismo significado que en el teorema 1, resulta*

$$\int_G^* f(x)\, d\mu(x) = \int_G^* f(x)\, d\mu_0(x) \tag{5}$$

para toda función real $f \geq 0$ definida sobre G_0.

DEMOSTRACIÓN. — En primer lugar,

$$\int_A^* f d\mu_0 = \int_{A_1}^* f d\mu_0 + \int_{A_2}^* f d\mu_0$$

si $A = A_1 \cup A_2$ y $\mu_0^*(A) = \mu_0^*(A_1) + \mu_0^*(A_2) < \infty$ y f es una función real definida sobre G_0. En efecto, si E_1 y E_2 son dos conjuntos μ_0^*-medibles tales que

$$E_i \supset A_i,\ \mu_0^*(E_i) = \mu_0^*(A_i),\ \mu_0^*(E_1 \cup E_2) = \mu_0^*(A) \quad (i = 1,\ 2)$$

y si g es una función μ_0^*-medible tal que $g \geq f\varphi_A$ y

$$\int g\, d\mu_0 = \int_A^* f\, d\mu_0 ,$$

resulta

$$\begin{aligned}\int_A^* f\, d\mu_0 &\geq \int_{E_1 \cup E_2} g\, d\mu_0 \\ &= \int_{E_1} g\, d\mu_0 + \int_{E_2} g\, d\mu_0 - \int_{E_1 \cap E_2} g\, d\mu_0 \\ &\geq \int_{A_1}^* f\, d\mu_0 + \int_{A_2}^* f\, d\mu_0 \quad (\mu_0(E_1 \cap E_2) = 0).\end{aligned}$$

De esto se deduce, siendo $\mu^*(A) = \mu_0^*(A)$ para todo $A \subset G$, que

$$\int_A f\, d\mu = \int_A^* f\, d\mu_0$$

para cada $A \subset G$, μ^*-medible de medida $\mu(A) < \infty$ y para toda función real $f \geq 0$, definida sobre G_0, cuya restricción sobre G sea una función simple respecto de μ. Entonces, por la monotonía de las integrales superiores $\int_A^* g\, d\mu$ y $\int_A^* g\, d\mu_0$, se deduce que dicha igualdad vale también para cada función $f \geq 0$, definida sobre G_0, cuya restricción sobre G sea μ^*-medible. En estas condiciones, si $\int_G^* f\, d\mu$ o $\int_G^* f\, d\mu_0$ es finita y si

$$A_n = \left\{x \in G \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \text{ y } f_n = f\varphi_{A_n},$$

resulta que A_n es un conjunto μ^*-medible de medida $\mu(A_n) = \mu_0^*(A_n) < \infty$ y, por tanto,

$$\int_G f_n\, d\mu = \int_{A_n} f d\mu$$

$$= \int_{A_n}^* f\, d\mu_0 = \int_G^* f_n\, d\mu_0 ,$$

de donde haciendo $n \to \infty$ se obtiene

$$\int_G f d\mu = \int_G^* f\, d\mu_0 .$$

Es obvio que esta igualdad vale también si $\int_G f\, d\mu$ y $\int_G^* f\, d\mu_0$ son infinitas.

Sea I_0^+ el conjunto de las funciones $g \geq 0$ definidas sobre G_0 que son semicontinuas inferiormente y, análogamente, I^+ el conjunto de las funciones $g \geq 0$ definidas sobre G_0, cuyas restricciones sobre G son semicontinuas inferiormente. Entonces, como

$$\int_G^* f\, d\mu_0 = \inf \left\{ \int g\, d\mu_0 \mid f \varphi_G \leq g \in I_0^+ \right\}$$

$$\geq \inf \left\{ \int_G^* g\, d\mu_0 \mid f \varphi_G \leq g \in I^+ \right\} \qquad (I_0^+ \subset I^+)$$

$$\geq \int_G^* f\, d\mu_0$$

y

$$\int_G^* f\, d\mu = \inf \left\{ \int_G g\, d\mu \mid f \varphi_G \leq g \in I^+ \right\}$$

$$= \inf \left\{ \int_G^* g\, d\mu_0 \mid f \varphi_G \leq g \in I^+ \right\}$$

según la igualdad probada anteriormente, resulta (5).

PROPOSICIÓN 5. — *Si G es un grupo topológico que posee una medida de* HAAR, *entonces en el espacio* $L_p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$ *hay un conjunto denso formado por funciones uniformemente continuas sobre G con soporte acotado.*

DEMOSTRACIÓN. — Evidentemente, para demostrar la proposición en el caso $p = 1$, bastará probar que para cada $\varepsilon > 0$ y toda función $f \geq 0$, integrable sobre G, existe una función g uniformemente continua sobre G con soporte acotado tal que

$$\int |g - f| \, d\mu < \varepsilon.$$

Sean G_0 y μ_0 el grupo localmente compacto y la medida considerados anteriormente. Sea $0 \leq f \in L(\mu)$ y f_0 la función definida por

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } x \in G \\ 0 & \text{para } x \in G_0 - G. \end{cases}$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ hay una función $h_0 \geq f_0$ semicontinua inferiormente sobre G_0 y una función $g_0 \leq h_0$ continua sobre G_0 y con soporte compacto tales que

$$\int h_0 \, d\mu_0 < \int^* f_0 \, d\mu_0 + \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\int g_0 \, d\mu_0 > \int h_0 \, d\mu_0 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, si h y g son, respectivamente, las restricciones sobre G de h_0 y g_0, resulta, según (5), que

$$\int_G (h - f) \, f d\mu = \int_G h \, d\mu - \int_G f \, d\mu \leq \int h_0 \, d\mu_0 - \int^* f_0 \, d\mu_0 < \frac{\varepsilon}{2} \quad (h \geq f)$$

y

$$\int_G (h - g) \, d\mu \leq \int (h_0 - g_0) \, d\mu_0 < \frac{\varepsilon}{2} \quad (g \leq h)$$

y, por tanto,

$$\int_G |g - f| \, d\mu < \varepsilon,$$

donde g como restricción sobre G de g_0 es una función uniformemente continua con soporte A acotado ([8]).

Finalmente, para demostrar la proposición con toda generalidad, bastará probar que para cada $\varepsilon > 0$ y toda función f integrable sobre G y acotada: $|f| \leq M$, existe una función g uniformemente continua sobre G con soporte acotado tal que $\|g - f\|_p < \varepsilon$. En efecto, como en estas condiciones hay, según acabamos de ver, una función uniformemente continua h con soporte acotado y tal que

$$\int |h - f| \, d\mu < \frac{\varepsilon^p}{(2M)^{p-1}},$$

si g es la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} M & \text{cuando } h(x) > M, \\ h(x) & \text{cuando } |h(x)| \leq M, \\ -M & \text{cuando } h(x) < -M, \end{cases}$$

se deduce que g es una función uniformemente continua sobre G con soporte acotado que verifica

$$\| g - f \|_p = \left[\int |g - f|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[(2M)^{p-1} \int |h - f| \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon .$$

PROPOSICIÓN 6. — *Si G es un grupo topológico que posee una medida de* HAAR *μ, entonces para cada $\varepsilon > 0$ y toda función $f \in L_p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$ el conjunto*

$$W_p(f, \varepsilon) = \{ x \mid \| xf - f \|_p < \varepsilon \} \tag{5}$$

es un entorno del elemento unidad e de G.

DEMOSTRACIÓN. — Según la proposición 5 si $f \in L_p(\mu)$ existe una función uniformemente continua g sobre G con soporte acotado A

([8]) Es obvio que entonces hay un entorno W (en G) del elemento unidad e tal que WA es acotado y, por tanto, de medida exterior $\mu^*(WA)$ finita.

que verifica $\|g - f\|_p < \varepsilon/3$. Entonces, como hay un entorno W de e tal que WA es acotado y

$$|xg(y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3\,\mu^*(WA)^{1/p}} \qquad (\mu^*(WA) < \infty)$$

para todo $x \in W$ e $y \in G$, resulta

$$\|xg - g\|_p = \left[\int |xg - g|^p\, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $x \in W$. Por tanto, como

$$W \subset W_p(g, \varepsilon/3) \subset W_p(f, \varepsilon),$$

se deduce que $W_p(f, \varepsilon)$ es un entorno de e.

TEOREMA 5. — *Si G es un grupo topológico que posee una medida de* HAAR μ, *entonces las dos clases siguientes (V_1) y (V_2) de conjuntos forman un sistema fundamental de entornos del elemento unidad e de G:*

(V_1) $W_p(f, \varepsilon)$ *para cada* $\varepsilon > 0$ *y toda función* $f \in L_p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$.

(V_2) AA^{-1} *para todo conjunto* A μ-*medible de medida* $0 < \mu(A) < \infty$.

DEMOSTRACIÓN. — Como los conjuntos UU^{-1}, donde U es un entorno abierto de e de medida finita, forman un sistema fundamental de entornos de e tales que $0 < \mu(U) < \infty$, bastará probar, según la proposición 6, que

$$W_p(\varphi_A, \varepsilon) \subset AA^{-1}$$

para cada $\varepsilon < [2\mu(A)]^{1/p}$, siendo φ_A la función característica de A. En efecto, si $x \in W_p(\varphi_A, \varepsilon)$ y $\varepsilon^p < 2\mu(A)$, resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon^p > \int |x\varphi_A - \varphi_A|^p\, d\mu &= \mu(xA - A) + \mu(A - xA) \\ &= 2[\mu(A) - \mu(xA \cap A)] \\ &> \varepsilon^p - 2\mu(xA \cap A) \end{aligned}$$

y, por tanto, $\mu(xA \cap A) > 0$ y $x \in AA^{-1}$.

En particular, del teorema 5 se obtiene:

TEOREMA 6. — *Toda medida de* HAAR μ *sobre un grupo topológico* G *determina univocamente la topologia de* G.

OBSERVACIÓN 3. — El grupo aditivo G de los números reales posee dos topologías que le convierten en dos grupos localmente compactos con dos medidas de HAAR diferentes. En efecto, una de ellas puede ser, evidentemente, la topología usual y la otra la topología discreta. Entonces las dos medidas de HAAR correspondientes son la medida de LEBESGUE y la que asigna a cada conjunto el número, finito o infinito, de puntos que contiene.

COROLARIO 4. — *Si* G_0 *es un grupo topológico que posee una medida* de HAAR μ_0, *entonces todo subgrupo* G *de* G_0 *que contiene un conjunto medible* A *tal que* $0 < \mu_0(A) < \infty$ *es abierto y, por tanto, cerrado.*

DEFINICIÓN. — Una *medida de* WEIL sobre un grupo G es una medida $m \neq 0$, invariante a izquierda, definida sobre una tribu (o un σ-anillo de conjuntos) $\mathcal{M}$ que satisface:

(W_1) Todo conjunto $A \in \mathcal{M}$ es unión contable de conjuntos $A_\nu \in \mathcal{M}$ de medida $m(A_\nu) < \infty$.

(W_2) Si $\mathcal{M}_0$ es la familia de los conjuntos $A \in \mathcal{M}$ que verifican $0 < m(A) < \infty$, para cada $f \in L_p(m)$ $(1 \leq p < \infty)$, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, todo conjunto $E \in \mathcal{M}_0$ contiene un conjunto $A \in \mathcal{M}_0$ tal que

$$AA^{-1} \subset W_p(f, \varepsilon) = \{x \mid \| xf - f \|_p < \varepsilon\}. \tag{6}$$

TEOREMA 7. — *Si* G *es un grupo con una medida de* WEIL m, *se puede asociar a* m *una topologia sobre* G, *que llamaremos topologia de* WEIL, *compatible con su estructura de grupo donde las dos clases siguientes* (V_1) *y* (V_2) *de conjuntos forman un sistema fundamental de entornos del elemento unidad:*

(V_1) $W_p(f, \varepsilon)$ *para cada* $\varepsilon > 0$ *y toda función* $f \in L_p(m)$ $(1 \leq p < \infty)$.

(V_2) AA^{-1} *para todo* $A \in \mathcal{M}_0$.

Sobre el grupo topológico así construido existe una medida de HAAR μ *tal que*

$$\int f \, d\mu = \int f \, dm. \tag{7}$$

para toda función f uniformemente continua con soporte acotado.

DEMOSTRACIÓN. — Véase WEIL [3] págs. 141, 142 y 144 y téngase en cuenta el corolario 3 y el teorema 4.

TEOREMA 8. — *Sea m una medida definida sobre una tribu de partes de un grupo G, no nula, invariante a izquierda y que verifique* (W_1) *y*

(W) *La tribu* $\mathcal{M}_2$ *de partes de* $G \times G$ *sobre la cual se define la medida* $m_2 = m \times m$ *es invariante por la transformación* $(x, y) \to (y^{-1} x, x)$ *de* $G \times G$ *en sí mismo* (9).

Entonces m es una medida de WEIL.

DEMOSTRACIÓN. — Véase WEIL [3] págs. 141 y 142.

TEOREMA 9. — *Sea m una medida de* WEIL *sobre un grupo topológico G tal que* 1) *la topología de G es más fina que la topología de* WEIL *asociada a m,* 2) *todo entorno (en G) de la unidad e de G contiene un conjunto medible A de medida finita* $m(A) > 0$. *Entonces la topología de* WEIL *asociada a m coincide con la topología dada de G.*

DEMOSTRACIÓN. — Bastará demostrar que todo entorno V (en G) de e contiene un entorno AA^{-1} del sistema fundamental (V_2) de la topología de WEIL. En efecto, como para todo entorno V (en G) de e se puede hallar un entorno U de e de modo que $UU^{-1} \subset V$ y un conjunto medible A de medida finita $m(A) > 0$ tal que $A \subset U$, resulta $V \supset AA^{-1}$.

OBSERVACIÓN 4. — Si m es una medida de WEIL sobre un grupo topológico G que satisface la propiedad de la proposición 5 para $\mu = m$, entonces vale la correspondiente proposición 6 para $\mu = m$ y, por tanto, la topología de G es más fina que la topología de WEIL asociada a m.

---

(9) Si A y $B \in \mathcal{M}$, entonces $A \times B \in \mathcal{M}_2$ y $m_2(A \times B) = m(A)m(B)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Garay de Pablo, J. — *Integración en espacios topológicos.* — Tesis doctoral. (En elaboración).

[2] Rodríguez-Salinas, B. — *Medidas topológicas.* (En elaboración).

[3] Weil, A. — *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* — Act. Sci. et Ind. 869-1145. — Paris, Hermann, 1953.

Universidad de Zaragoza