# SOBRE LOS ESPACIOS DE ORLICZ DE FUNCIONES VECTORIALES

por

FERNANDO BOMBAL GORDÓN

*Abstract.* Let $(S, \Sigma, \mu)$ be a finite measure space, $X$ a Banach space and $\Phi$ a Young's function [9] with complementary function $\Psi$. We denote by $L^{\Phi}(\Sigma, \mu, X) = L^{\Phi}(X)$ the usual Orlicz space of strongly measurable *X-valued* functions (see, f. i. [8]). For each $g \in L^{\Psi}(X')$, Holder's inequality proves that the scalar function $\langle f, g\rangle$ is integrable, for every $f \in L^{\Phi}(X)$. The map $(f, g) \longmapsto \int\langle f, g\rangle\, d\mu$ defines then a duality between $L^{\Phi}(X)$ and $L^{\Psi}(X')$. In this paper, we study some properties of this duality. In particular, we characterize the weakly sequential compact sets and the weak sequential completeness.

INTRODUCCIÓN.

En este trabajo se estudian algunas propiedades del par dual $\langle L^{\Phi}(X), L^{\Psi}(X')\rangle$, donde $X$ es un espacio de Banach, $(S, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida finito, $\Phi$ y $\Psi$ funciones conjugadas de Young y $L^{\Phi}(X)$, $L^{\Psi}(X')$ los espacios de Orlicz correspondientes (véase, por ej., [8]). En particular, se caracterizan los subconjuntos débilmente secuenciales compactos cuando $X$ tiene la Propiedad de Radon-Nikodym y, como consecuencia, se caracteriza también cuando $L^{\Phi}(X)$ es $\sigma(L^{\Phi}(X), L^{\Psi}(X'))$-secuencialmente completo, extendiendo algunos resultados previos de Batt [2] y Bombal [3].

## § 1. *Preliminares y notaciones.*

Sea $\Phi : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$ una función no decreciente, continua a la izquierda, verificando $\phi(0) = 0$ y no idénticamente nula. La inversa $\psi$ contínua a la izquierda de $\phi$ puede expresarse por las fórmulas $\psi(0) = 0$ y $\psi(v) = \text{Sup}\ \{u : \phi(u) < v\}$. Si $\lim_{n\to\infty} \phi(u) = a$ es finito, entonces $\psi(v) = \infty$ para todo $v > a$. Las funciones definidas por las fórmulas

$$\Phi(u) = \int_0^u \Phi(t)\ dt \qquad , \qquad \Psi(v) = \int_0^v \psi(t)\ dt$$

se llaman *funciones conjugadas de Young*. Se sigue que $\Phi$ y $\Psi$ son convexas, crecientes, no idénticamente nulas y contínuas, excepto a lo más en un punto, a partir del cual la función debe ser igual a $\infty$. Además, verifican la *desigualdad de Young:*

$$uv \leq \Phi(u) + \Psi(v) \qquad , \qquad u, v \geq 0$$

(para éstas u otras cuestiones relacionadas con el tema, puede verse [9], pág. 77 y sgs.).

En lo que sigue, $\Phi$ y $\Psi$ designarán un par de funciones conjugadas de Young, $(S, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida finito, que por comodidad supondremos completo, $X$ un espacio de Banach y $X'$ su dual topológico. Designaremos por $S(\Sigma, X)$ el espacio de las funciones $\Sigma$-simples de $S$ en $X$. Para cada función $f : S \dashrightarrow X$ medible Bochner, escribiremos

$$M_\Phi(f) = \int \Phi(\|f\|)\ d\mu$$

Se define $L^\Phi(\Sigma, \mu, X)$ $(= L^\Phi(X))$ como el espacio vectorial de todas las (clases de) funciones $f : S \dashrightarrow X$ medibles Bochner tales que $M_\Phi(kf) < \infty$ para algún $k > 0$. Cuando $X$ sea el cuerpo base $\mathbf{K}$, escribiremos $L^\Phi(\mathbf{K}) = L^\Phi$. Con la norma

$$|||f|||_\Phi = \inf\ \{1/k : k > 0 \text{ y } M_\Phi(kf) \leq 1\}$$

$L^\Phi(X)$ es un espacio de Banach, que coincide precisamente con el conjunto de funciones medibles Bochner de $S$ en $X$ tales que

$$\|f\|_\Phi = Sup\ \{\textstyle\int \|f\|\, h\, d\mu : h \in L^\Psi \text{ y } M_\Psi(h) \leq 1\} < \infty.$$

Esta última expresión define una nueva norma en $L^\Phi(X)$ que resulta ser equivalente a la anterior, verificando $|||f|||_\Phi \leq \|f\|_\Phi \leq 2\, |||f|||_\Phi$ para toda $f$ de $L^\Phi(X)$. Siempre es $L^\Phi(X) \subset L^1(X)$ y todos los espacios $L^p(X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ están comprendidos entre los $L^\Phi(X)$.

Si $f \in L^{\Phi}(X)$ y $g \in L^{\Psi}(X')$, la desigualdad de Holder generalizada prueba que $\langle f, g\rangle$ es una función integrable y que $\int |\langle f, g\rangle| \, d\mu \leq \leq \|f\|_{\Phi} \|g\|_{\Psi}$. En consecuencia, todo elemento $g \in L^{\Psi}(X')$ define un funcional lineal contínuo $T_g$ sobre $L^{\Phi}(X)$, por la fórmula $T_g(f) = = \int \langle f, g\rangle \, d\mu$. Además, $\frac{1}{2} \|g\|_{\Psi} \leq \|T_g\| \leq \|g\|_{\Psi}$ ([9], pág. 138) (1). Por tanto, la aplicación $g \mapsto T_g$ es un isomorfismo topológico de $L^{\Psi}(X')$ sobre un s.v. cerrado de $L^{\Phi}(X')$ que distingue puntos, y $\langle L^{\Phi}(X), L^{\Psi}(X')\rangle$ forman un par dual, aunque en general la aplicación $g \mapsto T_g$ no es suprayectiva, ni siquiera cuando $X = \mathbf{K}$ (véase [6]). En este último caso, si $\mu$ posee un conjunto de medida positiva sin átomos, la condición necesaria y suficiente para que $g \mapsto T_g$ sea sobre es que $\Phi$ satisfaga la condición

$$(\Delta_2): \lim_{u \to \infty} \Phi(2u)/\Phi(u) < \infty$$

Finalmente, recordemos que $X$ tiene la propiedad de Radon-Nikodym (PRN) si para todo espacio de medida finito $(S, \Sigma, \mu)$ y toda medida $m : \Sigma \longrightarrow X$ numerablemente aditiva, $\mu$-contínua y de variación acotada, existe $f \in L^1(\Sigma, \mu, X)$ tal que $m(A) = \int_A f \, d\mu$ para cada $A$ de $\Sigma$ (véase, p. ej., [4]).

## § 2. *Compacidad en la topologia $\sigma(L^{\Phi}(X), L^{\Psi}(X'))$.*

Para cada $A \in \Sigma$, las aplicaciones lineales $p_A : L^{\Phi}(X) \longrightarrow X$, $I_A : X \longrightarrow L^{\Phi}(X)$, definidas por

$$p_A(f) = \int f d\mu, \ I_A(x) = \chi_A \, x$$

son claramente contínuas. El siguiente lema, análogo al lema 1 de [3], es fácil de demostrar y queda al cuidado del lector:

LEMA 1. *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

1.1. *$I_A$ y $p_A$ son contínuas para las topologías débiles asociadas a las dualidades $\langle X, X'\rangle$ y $\langle L^{\Phi}(X), L^{\Psi}(X')\rangle$. Además, si $\mu(A) > 0$, $I_A$ es un morfismo estricto para estas topologías.*

(1) Véase también el lema 2 del presente trabajo.

1.2. *$I_A(X)$ es $\sigma(L^{\Phi}(X), L^{\Psi}(X'))$-cerrado.*

Como dijimos en la introducción, si $f \in L^{\Phi}(X)$ y $g \in L^{\Psi}(X')$, la función $\langle f, g\rangle$ es integrable. Se tiene entonces

LEMA 2. *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

2.1. *Para cada $g \in L^{\Psi}(X')$, la aplicación $L^{\Phi}(X) \ni f \longmapsto \langle f, g\rangle \in L^1$, es lineal y continua para las topologías $\sigma(L^{\Phi}(X), L^{\Psi}(X'))$ y $\sigma(L^1, L^{\infty})$.*

2.2. *Para cada $f$ de $L^{\Phi}(X)$ se tiene*

$$\|f\|_{\Phi} = \operatorname{Sup} \{|\textstyle\int \langle f, g \rangle d\mu| : g \in S(\Sigma, X') \text{ y } M_{\Psi'}(g) \leq 1\}$$

2.3. *Una función $f$ de $S$ en $X$ pertenece a $L^{\Phi}(X)$ si y sólo si es integrable y*

$$\operatorname{Sup} \{|\textstyle\int \langle f, g\rangle d\mu| : g \in S(\Sigma, X') \text{ y } M_{\Psi'}(g) \leq 1\} < \infty.$$

*Demostración.* 2.1 es inmediato. 2.2 se prueba procediendo como en [4], IV. 1 en donde se trata el caso $L^{\Phi}(X) = L^p(X)$. Finalmente, si $f$ es integrable y $(A_n)$ es una sucesión creciente de elementos de $\Sigma$ tal que $\cup A_n = S$ y $f$ esté acotada en cada $A_n$, resulta que $f_n = f\chi_{A_n} \in L^{\Phi}(X)$, luego por 2.2

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{\Phi} &= \operatorname{Sup} \{|\textstyle\int \langle f_n, g\rangle d\mu| : g \in S(\Sigma, X') \text{ y } M_{\Psi'}(g) \leq 1\} \leq \\ &\operatorname{Sup} \{|\textstyle\int \langle f, g\rangle d\mu| : g \in S(\Sigma, X') \text{ y } M_{\Psi'}(g) \leq 1\} = M < \infty.\end{aligned}$$

Por tanto, si $h \in L^{\Psi}, h \geq 0$ y $M_{\Psi'}(h) \leq 1$, se tiene $\|f_n\| h \uparrow \|f\| h$ y $\int \|f_n\| h \, d\mu \leq M$, $\forall\, n$. El teorema de la convergencia monótona prueba entonces que $\int \|f\| h \, d\mu \leq M$, luego $f \in L^{\Phi}(X)$. ▮

TEOREMA 3. *Si $K \subset L^{\Phi}(X)$ es $\sigma(L^{\Phi}(X), L^{\Psi}(X'))$-relativamente secuencialmente compacto, se verifica:*

3.1. *$K$ es acotado en norma.*

3.2. *Para cada $A \in \Sigma$, el conjunto $K(A) = \{\int_A f d\mu : f \in K\}$ es débilmente relativamente compacto en $X$.*

3.3. *Para cada $g \in L^{\Psi}(X')$,*

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \operatorname{Sup} \{\int_A \langle f, g\rangle \, d\mu : f \in K\} = 0$$

*Además, de X tiene la* P.R.N., *el recíproco es cierto.*

*Demostración.* Supongamos que $K$ es $\sigma(L^{\Phi}(X), L^{\Psi}(X'))$-relativamente secuencialmente compacto. Cada $f \in L^{\Phi}(X) \subset L^{\Phi}(X'')$ define una forma lineal contínua $T_f$ sobre $L^{\Psi}(X')$, y $\|f\|_{\Phi} \leq 2\|T_f\|$. Para cada $g \in L^{\Psi}(X')$, $\{T_f(g) : f \in K\}$ es acotado. El principio de acotación uniforme prueba entonces que $\|f\|_{\Phi} \leq 2\|T_f\| \leq M < \infty$, $\forall f \in K$. Del lema 1.1 y el teorema de Eberlein se deduce inmediatamente 3.2. En cuanto a 3.3, resulta del lema 2.1 y el conocido criterio de compacidad débil en $L^1$ (Véase, p. ej., [5], IV. 8.11).

Recíprocamente, supongamos que $K$ verifica 3.1, 3.2 y 3.3, y sea $(f_n)$ una sucesión en $K$. Por 3.1, podemos suponer que $\|f\|_{\Phi} \leq 1$, $\forall f \in K$. Como consecuencia de 3.2, existe un álgebra contable $\Sigma_0 \subset \Sigma$ y una subsucesión de $(f_n)$, que seguiremos denotando igual, tal que

$$(*) \quad m(A) = \lim \int_A f_n d\mu$$

existe en $\sigma(X, X')$ para cada $A$ de $\Sigma_0$.

Si $m_k(A) = \int_A f_k d\mu$, las funciones $x' \cdot m_k$ ($x' \in X'$, $k \in N$) son uniformemente numerablemente aditivas como consecuencia de 3.3 y para cada $x' \in X'$, $x' \cdot m_k(A)$ converge a $x' \cdot m(A)$ ($A \in \Sigma_0$). Por [5] IV.8.8, existe entonces el límite de $x' \cdot m_k(A)$ para todo $A$ de la $\sigma$-álgebra $\Sigma_1$ engendrada por $\Sigma_0$. De 3.2 resulta entonces que el límite (*) existe para todo $A$ de $\Sigma_1$ en la topología débil de $X$, y por [5] III.7.4, $m$ es débilmente numerablemente aditiva. El teorema de Orlicz-Pettis prueba entonces que $m$ es numerablemente aditiva y claramente $\mu$-contínua.

Como $\Phi$ es convexa, existe $K_0 > 0$ tal que $t \leq K_0 \Phi(t) + K_0$, $\forall t \geq 0$.

Por tanto, si $A \in \Sigma_1$, $\mu(A) > 0$,

$$\|m(A)\| = \frac{\|m(A)\|}{\mu(A)} \cdot \mu(A) \leq K_0 \Phi\left(\frac{\|m(A)\|}{\mu(A)}\right) \mu(A) + K_0 \mu(A)$$

Por la semicontinuidad inferior de la norma respecto de la topología débil, se tiene $\|m(A)\| \leq \lim_k \inf \|\int_A f_k d\mu\|$, luego

$$\Phi\left(\frac{\|m(A)\|}{\mu(A)}\right) \leq \lim_k \inf \Phi\left(\frac{\|\int_A f_k d\mu\|}{\mu(A)}\right) \leq \lim_k \inf \frac{1}{\mu(A)} \int_A \Phi(\|f_k\|) \, d\mu,$$

por la desigualdad integral de Jensen (véase [6], págs. 133-134) (1). Por tanto, si $\alpha$ es una partición finita de $S$ en conjuntos de $\Sigma_1$ de medida positiva:

$$\sum_{A \in \alpha} \| m(A) \| \leq \sum_{A \in \alpha} K_0 \Phi\left( \frac{\| m(A) \|}{\mu(A)} \right) \mu(A) + K_0 \mu(A) \leq$$

$$\leq \liminf K_0 \sum_{A \in \alpha} \int_A \Phi(\| f_k \|) \, d\mu + \mu(S) = \liminf K_0 M_\Phi(f) +$$

$$+ K_0 \mu(S) \leq K_0 (1 + \mu(S)),$$

ya que al ser $\| f_k \|_\Phi \leq 1$, se tiene $M_\Phi(f_k) \leq 1$. ([9], pág. 80).

Así pues, $m$ es de variación acotada, luego como $X$ tiene la P.R.N. por hipótesis, existe $f_0 \in L^1(\Sigma^1, \mu, X)$ tal que

$$m(A) = \int_A f_0 \, d\mu \qquad , \qquad \forall A \in \Sigma_1 .$$

Si $g \in S(\Sigma_1, X')$, $g = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} x_i'$, con $M_\Psi(g) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \Psi(\| x_i' \|) \leq$ $\leq 1$, se tiene

$$\left| \int \langle f_0, g \rangle \, d\mu \right| \leq \sum_{i=1}^{n} | \langle m(A_i), x_i' \rangle | \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A) \left[ \Phi\left( \frac{\| m(A_i) \|}{\mu(A_i)} \right) + \Psi(\| x_i' \|) \right] \leq 2$$

El lema 2.3 prueba entonces que $f_0 \in L^\Phi(X)$. Además, si $s \in S(\Sigma_1, X')$

$$\lim \int \langle f_n, s \rangle \, d\mu = \int \langle f_0, s \rangle \, d\mu.$$

Sea entonces $g \in L^\Psi(\Sigma_1, X')$ y $(s_n)$ una sucesión en $S(\Sigma_1, X')$ que converge a $g$ en casi todo punto. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $\mu(A) < \delta$, $A \in \Sigma_1$, implique

$$\operatorname{Sup} \{ \int_A | \langle f_k, g \rangle | \, d\mu : k \geq 0 \} \leq \varepsilon.$$

(1) En [6] se prueba esta desigualdad en la hipótesis de ser $\Phi$ continua. Una sencilla adaptación prueba que el resultado es también cierto en nuestro caso.

Por el teorema de Egoroff, existe $A \in \Sigma_1$ con $\mu(A) < \delta$ tal que $(s_n)$ converge a $g$ uniformemente en el complementario $A^c$ de $A$. Sea $s_\varepsilon$ tal que $\|(g - s_\varepsilon)\chi_{A^c}\|_\Psi > \varepsilon$.

Entonces

$$\left|\int \langle f_n - f_0, g\rangle \, d\mu\right| \le \int_A |\langle f - f_0, g\rangle| \, d\mu + \left|\int_{A^c} \langle f_n - f_0, g\rangle \, d\mu\right| \le$$

$$\le 2\varepsilon + \int_{A^c} |\langle f_n - f_0, g - s_\varepsilon\rangle| \, d\mu + \left|\int_{A^c} \langle f_n - f_0, s_\varepsilon\rangle\right| d\mu \le$$

$$\le 2\varepsilon + 2M\varepsilon + \left|\int \langle f_n - f_0, s_\varepsilon\rangle\right| d\mu \le (3 + 2M)\,\varepsilon$$

si $n$ es suficientemente grande, siendo $\|f_n\|_\Phi \le M$ $(n \ge 0)$. Esto prueba que

$$\lim_{n \to \infty} \int \langle f_n, g\rangle \, d\mu = \int \langle f_0, g\rangle \, d\mu \quad , \quad \forall\, g \in L^\Psi(\Sigma_1, X').$$

Si $g \in L^\Psi(\Sigma, X')$ y $E$ es el operador esperanza condicional respecto a la $\sigma$-álgebra $\Sigma_1$, se tiene entonces $E(g) \in L^\Psi(\Sigma_1, X')$ ([8]) y

$$\lim_{n \to \infty} \int \langle f_n - f_0, g\rangle \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int \langle f_n - f_0, E(g)\rangle \, d\mu = 0,$$

lo que termina la demostración. ♯

Observación 4.

a) Para el caso en que $X$ sea el cuerpo de escalares, el resultado anterior es bien conocido. Véase por ej. [1] y [7]. Naturalmente, la condición 3.2 es superflua en este caso. El caso $L^\Phi(X) = L^1(X)$ (y por tanto $L^\Psi(X') = L^\infty(X')$), ha sido tratado por Batt en [2], en donde se obtiene una caracterización análoga a la del teorema 3, sustituyendo 3.3 por la condición más fuerte de que $K$ sea uniformemente integrable. El caso $L^\Phi(X) = L^p(X)$ $(1 < p < \infty)$ ha sido estudiado en [3]. En esta situación, 3.1 implica ya que $K$ es uniformemente integrable, siendo pues superflua 3.3.

b) Si $\mu$ contiene un conjunto de medida positiva sin átomos y $\Phi$ satisface la condición $(\Delta_2)$, puede probarse, procediendo como en

[4], IV.1.1, que $L^{\Phi}(X)' = L^{\Psi}(X')$ si y sólo si $X'$ verifica la P.R.N. Por tanto, si $X$ y $X'$ verifican la P.R.N., las condiciones 3.1, 3.2 y 3.3 caracterizan los conjuntos débilmente compactos (= débilmente secuencialmente compactos, por el teorema de Eberlein) de $L^{\Phi}(X)$.

COROLARIO 5. *Sea $X$ un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

5.1. *Para toda medida finita $\mu$ y todo par $\Phi$, $\Psi$ de funciones conjugadas de Young, un conjunto $K \subset L^{\Phi}(\Sigma, \mu, X)$ es $\sigma(L^{\Phi}(\Sigma, \mu, X), L^{\Psi}(\Sigma, \mu, X'))$-relativamente secuencialmente compacto si y sólo si verifica* 3.1 ,3.2 y 3.3.

5.2. *Si $\mathcal{B}$ es la $\sigma$-álgebra de Borel y $\lambda$ la medida de Lebesgue en* $[0, 1]$, *existen un par de funciones conjugadas de Young, $\Phi$ y $\Psi$, tales que $K \subset L^{\Phi}(\mathcal{B}, \lambda, X)$ es $\sigma(L^{\Phi}(\mathcal{B}, \lambda, X), L^{\Psi}(\mathcal{B}, \lambda, X'))$-relativamente secuencialmente compacto si y sólo si verifica* 3.1, 3.2 y 3.3.

5.3. *$X$ tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

*Demostración.* Trivialmente 5.1 implica 5.2, y del teorema 3 se deduce que 5.3 implica 5.1. Para ver que 5.2 implica 5.3, sea $m : \mathcal{B} \longrightarrow X$ una medida tal que $\|m(A)\| \leq \lambda(A)$ para $A \in \mathcal{B}$. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión creciente de particiones finitas de $[0,1]$ en intervalos, de modo que el máximo de las longitudes de los intervalos de $\alpha_n$ tienda a 0 cuando $n \to \infty$, y definamos

$$f_n = \sum_{A \in \alpha_n} \frac{m(A)}{\lambda(A)} \cdot \chi_A \,.$$

Como $\|f_n\|_\infty \leq 1$ para todo $n$, resulta que $K = \{f_n : n \in N\} \subset L^{\Phi}(X)$ está acotado, y verifica 3.3. Como en [4] IV.2.3, se prueba que $K$ verifica también 3.2. Si $g \in L^{\Phi}(X)$ es un punto de aglomeración de $K$ para $\sigma(L^{\Phi}(X), L^{\Psi}(X'))$, entonces para cada $x' \in X'$ y $A \in \bigcup \alpha_n$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \chi_A x' \rangle = \langle m(A), x' \rangle = \langle \textstyle\int_A g d\lambda, x' \rangle,$$

es decir

$$m(A) = \int_A g \, d\lambda \quad , \quad \forall \, A \in \bigcup \alpha_n .$$

Como $\bigcup \alpha_n$ engendra la $\sigma$-álgebra de Borel $B$, resulta entonces que $g$ es una función de densidad para $m$. Por [4] V.3.8, resulta que $X$ tiene la P.R.N. $\dashv$

El resultado anterior permite obtener una caracterización de la completitud secuencial para la topología $\sigma(L^\Phi(X), L^\Psi(X'))$, como muestra el siguiente teorema:

TEOREMA 6. *Si $X$ es un espacio de Banach y $\Phi$, $\Psi$ un par de funciones conjugadas de Young, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

6.1. *Para toda medida finita $\mu$, $L^\Phi(\Sigma, \mu, X)$ es $\sigma(L^\Phi(\Sigma, \mu, X), L^\Psi(\Sigma, \mu, X'))$-secuencialmente completo.*

6.2. *Si $B$ es la $\sigma$-álgebra de Borel y $\lambda$ la medida de Lebesgue en $[0,1]$, $L^\Phi(B, \lambda, X)$ es $\sigma(L^\Phi(B, \lambda, X), L^\Psi(B, \lambda, X'))$-secuencialmente completo.*

6.3. *$X$ es débilmente secuencialmente completo y tiene la PRN.*

*Demostración.* Trivialmente, 6.1 implica 6.2.

6.2 $\Rightarrow$ 6.3.: Por 1.1 y 1.2, resulta que $X$ debe ser débilmente secuencialmente completo. Para probar que $X$ tiene la $PRN$, bastará demostrar, en virtud del corolario 5, que si $(f_n) \subset L^\Phi(B, \lambda, X)$ es una sucesión que verifica 3.1, 3.2 y 3.3, posee una subsucesión convergente para la topología $\sigma(L^\Phi(B, \lambda, X), L^\Psi(B, \lambda, X'))$ La $\sigma$-álgebra $B$ está generada por una familia contable de subconjuntos, luego procediendo como en el teorema 3, resulta que existe una subsucesión $(f_{n_k})$ de $(f_n)$ tal que $\{\int \langle f_{n_k}, g\rangle \, d\lambda\}$ converge para cada $g \in L^\Psi(B, \lambda, X')$. Por hipótesis, resulta entonces que $(f_{n_k})$ converge para la topología $\sigma(L^\Phi(B, \lambda, X), L^\Psi(B, \lambda, X'))$.

6.3 $\Rightarrow$ 6.1: Sea $(f_n)$ una sucesión de Cauchy para $\sigma(L^\Phi(X), L^\Psi(X'))$. Bastará demostrar que $(f_n)$ es $\sigma(L^\Phi(X), L^\Psi(X'))$-relativamente secuencialmente compacto, esto es, que satisface las condiciones del teorema 3. Por el lema 1.1, $\{\int_A f_n \, d\mu\}$ es débilmente de Cauchy para cada $A$ de $\Sigma$, luego converge. Por tanto $(f_n)$ satisface 3.2. Que satisface 3.1 se prueba como en el teorema 3. Finalmente, por el lema 2.1, para cada $g \in L^\Psi(X')$, $\{\langle f_n, g\rangle\}$ es débilmente de Cauchy en el espacio débilmente secuencialmente completo $L^1(\Sigma, \mu, \mathbf{K})$, luego por [5], IV.8.11, resulta que satisface 3.3. $\dashv$

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDO, T. (1962). *Weakly compact sets in Orlicz spaces.* Canad. J. of Math., *14*, 170-176.

[2] BATT, J. (1974). *On weak compactness in spaces of vector-value measures and Bochner-integrable functions in connection with the Radon-Nikodym property of Banach spaces.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., XIX, 285-304.

[3] BOMBAL, F. (1980). *Sobre el espacio* $L^p(\mu, X)$. Rev. Acad. Ciencias de Madrid, LXXIV, 131-135.

[4] DIESTEL, J. AND UHL, J. (1977). *Vector Measures.* Math. Surveys, no. 15. Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[5] DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T. (1966). *Linear Operators, Part I.* Interscience Pub. New York.

[6] KUFNER ET ALT. (1977). *Function spaces.* Noordhoff Int. Pub. Leyden.

[7] LUXEMBURG, W.A.J. (1955). *Banach function spaces.* Tesis, Delft.

[8] UHL, J.J. (1969). *Applications of Radon-Nikodym theorems to martingale convergence.* Trans. of the Amer. Math. Soc., *145*, 271-285.

[9] ZAANEN, A.C. (1953). *Linear Analysis.* North-Holland Pub. Co. Amsterdam.

Fernando Bombal Gordón

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas.
Universidad Complutense.
Madrid.