

MAGNETOIDRODINAMICA E COSMOLOGIA

di

GIUSEPPE ARCIDIACONO

(a Roma)

1. PREMESSA

È noto che le equazioni della magnetoidrodinamica sono state ottenute nel 1950 da H. ALFVÈN accoppiando alle equazioni elettromagnetiche (invarianti per il gruppo di LORENTZ) quelle della idrodinamica classica (invarianti per il gruppo di GALILEO). Nel 1956 suggerivo l'idea che per costruire una teoria più soddisfacente, si dovessero utilizzare le equazioni della idrodinamica relativista, anzi dimostravo che rendendo invarianti le equazioni di MAXWELL per il nuovo gruppo di DE SITTER-FANTAPPPIÉ, si ottenevano delle equazioni più generali, contenenti le due costanti universali c (velocità della luce) ed r (raggio del cronotopo), le quali descrivevano un campo a 10 componenti. Tali equazioni, al limite relativistico (e cioè per r tendente all'infinito) si decomponivano nelle ordinarie equazioni di MAXWELL, nel vuoto e nelle equazioni di EISENHART, SYNGE e LICHTNEROWICZ della idrodinamica relativistica dei fluidi perfetti incompressibili (nei quali le onde di pressione si propagano a velocità c della luce).

Ne segue che passando dall'Universo di MINKOWSKI della relatività ristretta, a quello di DE SITTER a curvatura costante $+1/r^2$ (o meglio alla sua rappresentazione geodetica piana) si può ottenere una magnetoidrodinamica veramente unitaria e non come quella ottenuta sino ad ora della semplice *sovrapposizione* del campo elettromagnetico F_{ik} (con $i, k = 1 \dots 4$) con quello idrodinamico C_i , i quali rimangono due tensori tra loro indipendenti, finché si rimane nel gruppo di LORENTZ. Nella nuova relatività proiettiva i due precedenti tensori si *fondono* in un solo tensore F_{AB} (con $A, B = 1 \dots 5$) dello S_5 e lo stesso accade per il vettore corrente elettrica J_i ed il

tensore vortice Ω_{ik} che vengono fusi in un unico tensore J_{ABC} dello S_5 .

Nella prima parte di questo lavoro, riprendendo alcuni risultati di F. GÜRSEY ed altri, farò vedere che nella relatività proiettiva il momento lineare Q_i ed il momento angolare L_{ik} vengono fusi in un unico tensore L_{AB} dello S_5 , cosa che porta ad una generalizzazione dei principi di conservazione e ad una nuova formulazione della meccanica.

Vengono poi introdotti e studiati il LAPLACIANO ed il DALAMBERTIANO proiettivo, cioè invarianti per il gruppo di FANTAPPIÉ, e si troverà che l'equazione delle onde risulta adesso del tipo misto di TRICOMI, cioè iperbolica nei punti esterni all'assoluto di CAYLEY-KLEIN (spazio fisico), parabolica nei punti dell'assoluto ed ellittica negli altri punti.

Nella seconda parte del lavoro vengono riprese ed approfondite le equazioni di MAXWELL, generalizzate e vien fatto vedere che la teoria di MAXWELL-MINKOWSKI del campo elettromagnetico con induzione e la idrodinamica relativistica dei fluidi (con indice f) di SINGELICHEROWICZ si possono considerare come casi-limiti, per r tendente all'infinito di una unica teoria invariante per il gruppo di FANTAPPIÉ, come del resto é richiesto dalle moderne ricerche sulla magneto-idrodinamica, nelle quali si cerca di stabilire un legame sempre più profondo tra l'elettromagnetismo e la idrodinamica.

2. L'UNIVERSO DI DE SITTER E LA MECCANICA

Nella relatività proiettiva il cronotopo di MINKOWSKI viene sostituito da quello di CASTELNUOVO e cioè dalla rappresentazione geodetica del cronotopo di DE SITTER V_4 su di un suo spazio tangente S_4 .

Come abbiamo visto nei lavori precedenti, il tempo proprio τ della fisica relativistica, viene così generalizzato

$$(2,1) \quad d\tau = dt \frac{\sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}}{1 + \alpha^2 - \gamma^2}$$

con $\alpha = x/r$, $\beta = V/c$, $\gamma = ct/r = t/t_0$ e t_0 é la durata limite r/c .

Dato allora il punto P di coordinate proiettive omogenee \bar{x}_A ($A = 1 \dots 5$), introduciamo il vettore velocità proiettiva nel seguente modo

$$(2.2) \quad \bar{v}_A = d \bar{x}_A / d\tau$$

Per stabilire il legame tra \bar{v}_A e la velocità quadridimensionale v_i ($i = 1 \dots 4$), osserviamo che si passa a coordinate non omogenee con la posizione

$$(2,3) \quad x_i = r \bar{x}_i / \bar{x}_5$$

e derivando i due membri rispetto alla variabile τ avremo

$$(2,4) \quad v_i = r (\bar{x}_5 \bar{v}_i - \bar{x}_i \bar{v}_5) / \bar{x}_5^2 = (r \bar{v}_i - x_i \bar{v}_5) / \bar{x}_5$$

Passando a coordinate non omogenee ($\bar{x}_5 = 1$) otteniamo il legame tra le due velocità proiettiva e quadridimensionale

$$(2,5) \quad \boxed{v_i = r \left(\bar{v}_i - \frac{x_i}{r} \bar{v}_5 \right)}$$

Fatta questa premessa, osserviamo che nella relatività ristretta, il momento della quantità di moto (o *momento angolare*) di un punto materiale di massa m , rispetto ad un punto arbitrario, presso come origine del sistema di riferimento, è dato da

$$(2,6) \quad L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i$$

dove si è indicato con p_i il vettore impulso-energia del punto materiale (o *momento lineare*). Le tre componenti spaziali $L_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) rappresentano il momento della quantità di moto, in senso classico, mentre le componenti temporali $L_{\alpha 4}$ generalizzano il *momento statico* $m x_\alpha$, a meno di un fattore e di una correzione di simultaneità

$$(2,7) \quad L_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha; \quad L_{\alpha 4} = icm (x_\alpha - v_\alpha t)$$

Vediamo adesso cosa accade passando alla relatività proiettiva. A questo scopo poniamo

$$(2,8) \quad \bar{p}_A = m_0 \frac{d \bar{x}_A}{d \tau} = m_0 \bar{v}_A$$

e generalizziamo la (6) nel seguente modo

$$(2,9) \quad \boxed{L_{AB} = r^2 (\bar{x}_A \bar{p}_B - \bar{x}_B \bar{p}_A)}$$

Esso ci dà i due tensori di S_4 :

$$(2,10) \quad L_{ij} = r^2 (\bar{x}_j \bar{p}_i - \bar{x}_i \bar{p}_j); \quad L_{i5} = r^2 (\bar{x}_5 \bar{p}_i - \bar{x}_i \bar{p}_5)$$

Per scrivere tali tensori in coordinate non omogenee, osserviamo che dalla (4) segue $\bar{x}_5 \bar{p}_i = r \bar{p}_i - x_i \bar{p}_5$ e quindi, tenendo conto della (3) si avrà

$$(2,11) \quad \begin{cases} L_{ij} = r \bar{x}_5 (x_i \bar{p}_j - x_j \bar{p}_i) = \bar{x}_5^2 (x_i \bar{p}_j - x_j \bar{p}_i) \\ L_{i5} = r \bar{x}_5 (r \bar{p}_i - x_i \bar{p}_5) = r \bar{x}_5^2 \bar{p}_i \end{cases}$$

Passando infine a coordinate non omogenee ($x_5 = 1$), avremo

$$(2,12) \quad \boxed{L_{ij} = x_i \bar{p}_j - x_j \bar{p}_i; \quad L_{i5} = r \bar{p}_i}$$

cioè *nella relatività proiettiva il momento angolare L_{ij} e quello lineare $\bar{p}_i = L_{i5}/r$, vengono fusi in un unico tensore.*

Se allora introduciamo il tensore

$$(2,13) \quad M_{AB} = \bar{x}_A f_B - \bar{x}_B f_A$$

che al limite relativistico si decompone nella forza f_i e nel suo momento polare f_{ij} , le *equazioni cardinali* della dinamica vengono riunite assieme nel seguente modo

$$(2,14) \quad \boxed{d L_{AB}/d\tau = M_{AB}}$$

e viene allora unificato il duplice aspetto traslatorio e rotatorio della meccanica classica e relativistica: questo avviene perché adesso le traslazioni vengono assimilate a particolari rotazioni. Ne deriva un nuovo legame tra la massa m di un corpo (che esprime la inerzia alla traslazione) ed il suo momento di inerzia polare (inerzia alla rotazione) espresso dalla relazione $J = m_0 r^2$ (analoga alla $E = m_0 c^2$ della fisica relativistica). Inoltre non vale più su scala cosmica il principio di conservazione della massa-energia, che viene sostituito dal principio più generale della conservazione del momento angolare di S_5 .

3. L'OPERATORE «MOMENTO ANGOLARE»

L'operatore *momento angolare* di S_5 viene così definito

$$(3,1) \quad L_{AB} = ih (\bar{x}_A \partial_B - \bar{x}_B \partial_A)$$

dove h é la costante di PLANCK diviso 2π . Esso si scinde nei due operatori di S_4

$$(3,2) \quad L_{ij} = ih (\bar{x}_i \partial_j - \bar{x}_j \partial_i); \quad L_{i5} = i\hbar r (\bar{x}_5 \partial_i - \frac{\bar{x}_i}{r} \partial_5)$$

Se le funzioni $\varphi(\bar{x}_A)$ alle quali sono applicati tali operatori sono omogenee di grado zero nelle \bar{x}_A , avremo per il teorema di EULERO sulle funzioni omogenee $\bar{x}_s \partial_s + \bar{x}_5 \partial_5 = 0$, e passando a coordinate non omogenee ($\bar{x}_5 = 1$), ne segue che

$$(3,3) \quad \boxed{r \partial_5 = -x_s \partial_s}$$

(la quale risulta analoga alla relazione $v_s \partial_s = d/d\tau$ valida nella relatività ristretta). Ne segue che le (2) si riducono alle

$$(3,4) \quad L_{ij} = ih (x_i \partial_j - x_j \partial_i); \quad L_{i5} = i\hbar r (\partial_i + \frac{x_i x_s}{r^2} \partial_s)$$

Possiamo quindi dire che L_{ij} coincide con l'operatore *momento angolare* di S_4 , mentre il secondo operatore, se introduciamo il *momento lineare* $\pi_i = L_{i5}/r$ e poniamo $P_i = ih \partial_i$, assume la forma

$$(3,5) \quad \pi_i = P_i + \frac{x_i x_s}{r^2} P_s$$

Ora osserviamo che si ha

$$\pi_i = P_i + \frac{1}{r^2} (x_i P_s - x_s P_i) x_s + \frac{1}{r^2} x_s x_s P_i.$$

Ne segue che introducendo il momento angolare L_{ij} e ponendo $x^2 = x_s x_s$ otteniamo la formula

$$(3,6) \quad \boxed{\pi_i = \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right) P_i + \frac{1}{r^2} x_s L_{is}}$$

Quindi nella relatività proiettiva il momento lineare π_i dipende anche dal momento angolare L_{ij} . Al limite relativistico $\pi_i \rightarrow P_i$ e scompare tale dipendenza.

L'operatore di massa é dato dall'invariante di CASIMIR del 2.º ordine, cioè

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{r^2} L_{AB} L_{AB} = \pi_i \pi_i + \frac{1}{r^2} L_{is} L_{is} = \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)^2 P_i P_i + \frac{1}{r^4} x_s x_m L_{is} L_{im} + \frac{1}{r^2} L_{is} L_{is} \end{aligned}$$

Avremo quindi

$$(3,7) \quad \boxed{I_2 = \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)^2 P_i P_i + \frac{1}{r^2} \left(\delta_{sm} + \frac{x_s x_m}{r^2}\right) L_{is} L_{im}}$$

da cui si vede che *appare una interazione tra la massa e lo spin della particella.*

Questi risultati sono in accordo con quanto ottenuto recentemente da F. GÜRSEY, il quale ha studiato l'Universo di DE SITTER V_4 dal punto di vista gruppale, servendosi della *proiezione sereografica* di V_4 su di un suo iperpiano tangente, e cioè adoperando coordinate conformi [1]. Se invece delle coordinate proiettive da noi usate, si utilizzano quelle conformi, la (6) viene sostituita dalla

$$(3,8) \quad \pi_i = \left(1 + \frac{x^2}{4r^2}\right) P_i + \frac{1}{2r^2} x_s L_{is}$$

mentre la (7) viene così modificata

$$(3,9) \quad I_2 = \left(1 + \frac{x^2}{4r^2}\right)^2 P_i P_i + \frac{1}{2r^2} \left(\delta_{sm} + \frac{x_s x_m}{r^2}\right) L_{is} L_{im}$$

Il GÜRSEY arriva allora alla conclusione che nell'Universo di DE SITTER il momento lineare può essere trasformato in quello angolare L_{ij} e viceversa, per uno spostamento, cosa che non accadeva nella relatività ristretta dove P_i è un invariante per traslazioni. Ne segue che l'energia ed il momento, definiti dall'operatori $P_i = i\hbar\partial_i$, non sono conservati dalle trasformazioni del gruppo di DE SITTER. Nell'Universo di DE SITTER poi la massa di una particella risulta una combinazione della massa relativistica e del momento angolare, in accordo con quanto da me ottenuto nei precedenti lavori.

Anche il GÜRSEY afferma che se si adoperano le usuali definizioni del momento e dell'energia, tali grandezze non vengono più conservate, e alla luce di queste nuove leggi potranno essere discusse quelle vaghe nozioni come la creazione di nuova materia, sostenuta da alcuni cosmologi (JEANS, HOYLE). A conclusioni analoghe sono giunti altri Autori, i quali hanno studiato l'universo di DE SITTER dal punto di vista gruppeale, come per es. P. ROMAN, J.J. AGHASSI ed. A. M. SUTTON [2].

4. STUDIO DEL LAPLACIANO PROIETTIVO

Fatta questa premessa ci proponiamo di studiare l'operatore di LAPLACE nel cronotopo di DE SITTER, utilizzando la rappresentazione geodetica di BELTRAMI e cioè le coordinate proiettive.

L'operatore di LAPLACE è stato studiato da L. BIANCHI nel 1900 e successivamente da G. ASCOLI [3] adoperando la rappresentazione stereografica e quindi le coordinate conformi.

Se (x, y, z) sono le coordinate conformi e la curvatura è positiva, indicando con r il raggio di curvatura, si ha la metrica di RIEMANN

$$(4,1) \quad ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(1 + \varrho^2/r^2)^2}$$

dove si è posto $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Ora è noto che se $g_{\alpha\beta}$ è il tensore fondamentale ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), e g il suo determinante, il LAPLACIANO $\bar{\Delta}$ è dato da [4]

$$(4,2) \quad \bar{\Delta}\varphi = \partial_\alpha (\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi) = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi = 0$$

e sviluppando i relativi calcoli, otteniamo l'espressione del laplaciano in coordinate conformi

$$(4,3) \quad r^2 \bar{\Delta} \varphi = (r^2 + \varrho^2) \Delta \varphi + 2 r x_\alpha \partial_\alpha \varphi = 0$$

Se invece ci poniamo nel caso della rappresentazione geodetica, si ha la metrica di BELTRAMI

$$(4,4) \quad (r^2 + \varrho^2)^2 ds^2 = r^2 [(r^2 + \varrho^2) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - (x_\alpha dx_\alpha)^2]$$

che si può scrivere anche sotto la forma

$$(4,5) \quad \begin{aligned} (r^2 + \varrho^2)^2 ds^2 = r^2 [(r^2 + y^2 + z^2) dx^2 + (r^2 + x^2 + z^2) dy^2 + \\ + (r^2 + x^2 + y^2) dz^2 - 2xy dx dy - 2xz dx dz - 2yz dy dz \end{aligned}$$

Per calcolare il LAPLACIANO *proiettivo* Δ^* , applichiamo la (2) e con calcoli laboriosi, ma elementari, si trova che

$$g = r^6 (r^2 + \varrho^2)^{-4}; g^{\alpha\alpha} = r^{-2} (r^2 + \varrho^2) (r^2 + x_\alpha^2); g^{\alpha\beta} = r^{-2} x_\alpha x_\beta (r^2 + \varrho^2)$$

e quindi in definitiva

$$(4,6) \quad \boxed{r^2 \Delta^* \varphi = (r^2 + x^2) \varphi_{xx} + (r^2 + y^2) \varphi_{yy} + (r^2 + z^2) \varphi_{zz} + \\ + 2xy \varphi_{xy} + 2xz \varphi_{xz} + 2yz \varphi_{yz} + 2rx \varphi_x + 2ry \varphi_y + 2rz \varphi_z = 0}$$

che é una equazione alle derivate parziali del 2.^o ordine, di tipo ellittico. Allo stesso risultato si perviene più facilmente senza ricorrere alla geometria riemanniana, ma osservando che l'invariante del gruppo di FANTAPPIÉ é l'operatore

$$(4,7) \quad \Delta^* \varphi = (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 + \frac{1}{r^2} \partial_5^2) \varphi = 0$$

Per passare alle coordinate non omogenee, supponiamo che la funzione φ sia omogenea di grado n nelle \bar{x}_A , ed allora come si é visto in un precedente lavoro [5], si avrà applicando il teorema di EULERO sulle funzioni omogenee

$$(4,8) \quad \partial_5^2 \varphi = n(n-1) \varphi + 2(n-1) x_\alpha \partial_\alpha \varphi + x_\alpha x_\beta \partial_\alpha \partial_\beta \varphi$$

e quindi si ottiene l'operatore di LAPLACE proiettivo

$$(4,9) \quad \boxed{r^2 \Delta^* \varphi = r^2 \Delta \varphi + x_\alpha x_\beta \partial_\alpha \partial_\beta \varphi + (n-1)(n\varphi - 2 x_\alpha \partial_\alpha \varphi)}$$

il quale, per $n = 0$, viene a coincidere con l'operatore (6).

Della equazione (6) é facile trovare una soluzione del tipo

$$(4,10) \quad \varphi(x, y, z) = X(x) + Y(y) + Z(z)$$

Se indichiamo con k la costante di separazione, otteniamo la equazioni alle derivate ordinarie

$$(r^2 + x^2) X'' + 2rx X' = k$$

e le analoghe. Per $k = 0$ avremo allora la soluzione

$$\varphi = r \operatorname{arctg} x/r + r \operatorname{arctg} y/r + r \operatorname{arctg} z/r$$

la quale, indicando con ξ, η, ζ le distanze spaziali non euclidee dalla origine, si può scrivere così

$$(4,11) \quad \varphi = \xi + \eta + \zeta$$

Se invece cerchiamo una soluzione della (9) a simmetria sferica, cioè del tipo $\varphi = \varphi(\varrho)$, avremo [4]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{\varrho} \frac{d\varphi}{d\varrho}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{\varrho^3} \frac{d\varphi}{d\varrho} + \frac{xy}{\varrho^2} \frac{d^2 \varphi}{d\varrho^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{\varrho^2} \frac{d^2 \varphi}{d\varrho^2} + \frac{\varrho^2 - x^2}{\varrho^3} \frac{d\varphi}{d\varrho} \quad \text{e le analoghe.}$$

Ne segue che il *laplaciano proiettivo* (9) assume la forma

$$(4,12) \quad \boxed{\left(1 + \frac{\varrho^2}{r^2}\right) \frac{d^2 \varphi}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \left(1 - \frac{n-1}{r^2} \varrho^2\right) \frac{d\varphi}{d\varrho} + \frac{n(n-1)}{r^2} \varphi = 0}$$

In particolare, per $n = 1$ si ottiene l'equazione

$$(4,13) \quad \left(1 + \frac{\varrho^2}{r^2}\right) \frac{d^2 \varphi}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{d\varphi}{d\varrho} = 0$$

che é a variabili separabili, e ci dà

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} \quad \text{cioé} \quad \varphi = -\frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{r^2}$$

in accordo con quanto ottenuto precedentemente [5].

Se invece $n = 0$, la (12) si riduce alla

$$(4,14) \quad \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \left(\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho}\right) = 0$$

e poiché il primo fattore é diverso da zero, ci riduciamo alla stessa equazione che si ottiene per il laplaciano classico, ottenendo la soluzione $\varphi = -1/\rho$.

Nel caso generale, la (12) é una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti variabili.

5. STUDIO DEL DALAMBERTIANO PROIETTIVO

Il Dalambertiano proiettivo in due dimensioni, nel caso in cui la funzione φ é di grado zero nelle \bar{x}_A , é dato da

$$(5,1) \quad \boxed{\square^* \varphi = \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right) \varphi_{xx} + 2 \frac{xct}{r^2} \varphi_{xy} - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{c^2 t^2}{r^2}\right) \varphi_{tt} + 2 \frac{x}{r} \varphi_x + 2 \frac{ct}{r} \varphi_t = 0}$$

Se poniamo allora $\alpha = x/r$, $\beta = V/c$, $\gamma = ct/r = t/t_0$, l'equazione differenziale delle caratteristiche risulta la seguente

$$(1 - \gamma^2) \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\alpha \gamma}{c} \left(\frac{dx}{dt}\right) - (1 + \alpha^2) = 0$$

la quale, tenendo presente che $\beta = dx/cdt$ si può scrivere così

$$(5,2) \quad (1 - \gamma^2) \beta^2 + 2 \alpha \beta \gamma - (1 + \alpha^2) = 0$$

Ne seguono le due equazioni delle caratteristiche

$$(5,3) \quad \frac{dx}{dt} = c \frac{-\alpha\gamma \pm \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma^2}}{1 - \gamma^2}$$

La (1) é una equazione differenziale alle derivate parziali del tipo misto di TRICOMI [6], la quale é quindi *parabolica* nei punti dell'assolutamente di equazione $1 + \alpha^2 - \gamma^2 = 0$, *iperbolica* nei punti dello spazio fisico ed *ellittica* fuori. Per trovare le caratteristiche, osserviamo che la (2) si può scrivere così

$$(5,4) \quad \boxed{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2 = 0}$$

e tale espressione coincide con quella che interviene sotto il radicale nella (2,1) e nelle trasformazioni del gruppo di FANTAPPIÉ. Se poniamo $\alpha = y$ e $\gamma = x$, si avrà $\beta = dy/dx = y'$ e la (4) si scrive così

$$(5,5) \quad y = xy' \pm \sqrt{y'^2 - 1}$$

che é una equazione differenziale ordinaria di CLAIRAUT. Come é noto, la sua soluzione si trova sostituendo ad y , una costante k , e così otteniamo per caratteristiche della (1) le due famiglie di rette $y = kx \pm \sqrt{k^2 - 1}$, cioè tornando alle variabili primitive:

$$(5,6) \quad \boxed{x = kct \pm r \sqrt{k^2 - 1}}$$

Le soluzioni singolari della (4) si ottengono trovando l'involuppo delle famiglie di rette (6), cioè eliminando il parametro k tra la (6) e la sua derivata rispetto a k :

$$x = kct \pm r \sqrt{k^2 - 1}; \quad 0 = ct \pm rk/\sqrt{k^2 - 1}$$

da cui seguono le due soluzioni singolari, la prima data dalla quartica

$$x^2 (c^2 t^2 - r^2) = (r^2 + c^2 t^2)^2$$

mentre la seconda soluzione

$$(5,7) \quad (c^2 t^2 - r^2) (r^2 + x^2 - c^2 t^2) = 0$$

si spezza nell'assoluto $1 + \alpha^2 - \gamma^2 = 0$ e nelle due rette $\gamma = \pm 1$ tangenti all'assoluto nei due punti $P(0, t_0)$ e $Q(0, -t_0)$.

Per trovare le caratteristiche che passano per un generico punto $P(\alpha_0, \gamma_0)$ sostituendo tali coordinate nella (6) si ha l'equazione nella incognita k :

$$(1 - \gamma_0^2) k^2 + 2k \alpha_0 \gamma_0 - (1 + \alpha_0^2) = 0$$

dalla quale segue che

$$(5,8) \quad k = \frac{-\alpha_0 \gamma_0 \pm \sqrt{1 + \alpha_0^2 - \gamma_0^2}}{1 - \gamma_0^2}$$

Possiamo quindi dire che per $t = \pm t_0$, si ha k infinito, mentre

a) nella origine $P(0,0)$ si ha $k = \pm 1$ e quindi le caratteristiche sono le due rette

$$\alpha = \pm \gamma \quad \text{cioé} \quad x = \pm ct$$

(asintoti dell'assoluto), come nella relatività ristretta.

b) Sui punti dell'assoluto, per i quali $1 + \alpha_0^2 - \gamma_0^2 = 0$, si avrà $k = \gamma_0/\alpha_0$ ed otteniamo per caratteristiche la tangente all'assoluto nel punto $P(\alpha_0, \gamma_0)$

$$\alpha \alpha_0 - \gamma \gamma_0 + 1 = 0$$

c) sugli asintoti dell'assoluto si ha $\alpha_0 = \pm \gamma_0$ e quindi

$$k_1 = \pm 1; \quad k_2 = \pm (1 + \alpha_0^2)/(1 - \alpha_0^2)$$

ne segue che una delle caratteristiche coincide con la retta $x = \pm ct$.

d) Sull'asse delle x , dove $P(\alpha_0, 0)$ le caratteristiche sono

$$x \pm ct \sqrt{1 + \alpha_0^2} = x_0$$

mentre sull'asse delle t , cioè per i punti $P(0, \gamma_0)$, si hanno le caratteristiche

$$ct \pm x \sqrt{1 - \gamma_0^2} = ct_0$$

dove t_0 é l'ordinata del punto considerato.

Possiamo quindi concludere che nel cronotopo di CASTELNUOVO al velocità della luce varia da punto a punto, cioè lo spazio tangente (nel quale noi localizziamo gli eventi fisici) si comporta come se fosse anisotropo. Queste conclusioni ottenute a partire dal dalambertiano proiettivo, sono in perfetto accordo con quanto ottenuto precedentemente utilizzando il gruppo proiettivo di FANTAPPIÉ [5].

Poiché l'equazione (1) ha le caratteristiche che involuppano la linea parabolica, ne segue che essa è una equazione di TRICOMI di seconda specie, riconducibile al tipo

$$x^n \varphi_{xx} + \varphi_u = 0$$

Come è noto, l'equazione di TRICOMI di prima specie $t^n \varphi_{xx} + \varphi_u = 0$ per $n = 1$, interviene nello studio della aerodinamica transonica [6].

6. LA PROPAGAZIONE ONDOSA NEL CRONOTOPO DI CASTELNUOVO

L'equazione $\square^* \varphi = 0$ (o più in generale una equazione iperbolica), ammette soluzioni del tipo

$$(6,1) \quad \varphi = A(x) F[f(x) - Vt]$$

dove la forma della funzione F dipende dalle condizioni iniziali, mentre le funzioni A ed f dipendono dalla natura del mezzo [7]. Si può dimostrare allora che le linee orarie della propagazione si debbono identificare con le caratteristiche di tale equazione. Sostituendo infatti nella (5,1) la (1) ed ordinando i termini secondo le derivate di F , si ha

$$\left[\left(1 + \frac{x^2}{r^2} \right) f'^2 - 2 \frac{xt}{r} f' - \left(1 - \frac{c^2 t^2}{r^2} \right) \right] A F'' + (\dots) F' + (\dots) F = 0$$

dove i puntini rappresentano espressioni che non contengono F né le sue derivate. Perché tale equazione sia soddisfatta da una F arbitraria, dovrà aversi

$$(6,2) \quad (1 + \alpha^2) f'^2 - 2 \alpha \gamma f' - (1 - \gamma^2) = 0$$

e confrontando con la equazione delle caratteristiche, si trova che le linee

$$(6,3) \quad f(x) - Vt = \text{costante}$$

debbono appartenere ad una delle famiglie di caratteristiche. Infatti, nel caso in cui $A(x)$ è costante, se un punto si muove con la legge (3), in questo punto, la φ ha sempre lo stesso valore: nel piano (x, t) le linee (3) sono linee orarie della propagazione e la loro velocità sarà $1/f'(x)$. Questa conclusione vale anche se la $A(x)$ non è costante.

Applicando quanto detto alla equazione del d'alambertiano proiettivo, dalle (5,8) segue che si avranno in ogni punto $P(\alpha_0, \gamma_0)$ due velocità di propagazione date da

(6,4)

$$V_1 = +c \frac{-\alpha_0 \gamma_0 + \sqrt{1 + \alpha_0^2 - \gamma_0^2}}{1 - \gamma_0^2}; \quad V_2 = -c \frac{\alpha_0 \gamma_0 + \sqrt{1 + \alpha_0^2 - \gamma_0^2}}{1 - \gamma_0^2}$$

Così, per esempio, nella origine si avrà

$$V_1 = +c; \quad V_2 = -c$$

Per i punti della retta $x = +ct$ si avrà invece

$$V_1 = +c; \quad V_2 = -c(1 + \alpha_0^2)/(1 - \alpha_0^2)$$

e così via, in accordo con quanto ottenuto per via grupppale.

Per concludere, troviamo una soluzione particolare della $\square^* \varphi = 0$ della forma

$$\varphi(x, t) = X(x) + cT(t)$$

indicando con k la costante di separazione otteniamo le due equazioni differenziali ordinarie

$$(6,5) \quad (r^2 + x^2) X'' + 2rx X' = k; \quad (r^2 - c^2 t^2) T'' - 2rct T' = k$$

nel caso in cui $k = 0$, esse sono a variabili separabili e ci danno la soluzione

$$\varphi = r \operatorname{arctg} x/r + c \frac{t_0}{2} \log \frac{r + ct}{r - ct}$$

la quale, indicando con ξ e τ le distanze iperboliche dalla origine, la prima spaziale, e la seconda temporale, si può scrivere così

$$(6,6) \quad \varphi = \xi + c\tau$$

ed assume quindi un aspetto molto semplice.

7. MAGNETOIDRODINAMICA CLASSICA, RELATIVISTICA, PROIETTIVA

Come è noto, la magnetoidrodinamica classica è stata sviluppata nel 1950 da H. ALFVÉN accoppiando le equazioni de MAXWELL dello elettromagnetismo con quelle di EULERO della idrodinamica classica. La teoria che così si ottiene [8], pur permettendoci di stabilire tutta una serie di importanti risultati, non è logicamente soddisfacente, perché vengono utilizzate due teorie invarianti per gruppi diversi, e cioè il gruppo di GALILEO per la idrodinamica e quello di LORENTZ per l'elettromagnetismo. Una trattazione più rigorosa si può fare sostituendo alla idrodinamica classica quella relativistica, cosa che è stata fatta da vari Autori in questi ultimi anni. Così nel 1955 A. LICHNEROWICZ [9] ha studiato il fluido perfetto con carica ed ha fatto vedere che per generalizzare i teoremi di HELMHOLTZ, occorre aggiungere al vortice idrodinamico un contributo dato dal campo elettromagnetico. Questo studio è stato ripreso nel 1960 da Y. CHOQUET-BRUHAT e da PHAM-MAU-QUAN nel 1965 ed esteso al caso dei fluidi viscosi ed a conducibilità infinita da G. PICHON nel 1965 [10]. La teoria dei vortici è stata invece studiata da K. GOTO nel 1958 e più recentemente da L. A. SCHMID nel 1967 tenendo conto del contributo al vortice sia da parte del campo elettromagnetico (precessione di LARMOR) che del campo gravitazionale e del calore [11].

Nel 1957 G. HARRIS ha considerato la propagazione ondosa nei fluidi perfettamente conduttori ed immersi in un campo magnetico, dal punto di vista relativista, ed ha fatto vedere chi ci sono tre tipi di onde, due idrodinamiche ed una terza che generalizza quella di ALFVÉN. Successivamente A. M. PRATELLI ha studiato le discontinuità e le ipersuperfici caratteristiche della propagazione ondosa nella magnetoidrodinamica relativista [12]. In un suo recente volume A. LICHNEROWICZ ha riunito e completato questi risultati ed ha studiato le onde prodotte in un fluido perfettamente conduttore e comprimibile, tenendo conto degli effetti termici [13]. Si arriva allora alla conclusione che nel caso relativistico ci sono tre tipi di onde con

tre differenti velocità di propagazione, e cioè le onde di ALFVEN e due tipi di onde idrodinamiche (una lenta ed una veloce): la velocità delle onde di ALFVÉN risulta compresa tra quella delle onde idrodinamiche. Se poi il fluido é incompressibile, l'onda di ALFVÉN ha la stessa velocità dell'onda idrodinamica lenta, mentre l'onda idrodinamica veloce ha la stessa velocità della luce.

Questi sono, in breve alcuni risultati che si ottengono sviluppando la magnetoidrodinamica relativista. Ma se si pensa che il gruppo di LORENTZ della relatività ristretta ci si presenta come caso limite per r tendente all'infinito del gruppo proiettivo di FANTAPPIÉ, e che nel cronotopo di MINKOWSKI il campo elettromagnetico F_{ik} e quello idrodinamico C_k sono due tensori tra loro indipendenti (nel senso che per una trasformazione del gruppo di LORENTZ si mutano ognuno in sé stesso) si deve concludere che anche la magnetoidrodinamica relativista non é ancora soddisfacente: essa infatti pur approfondendo il legame tra fenomeni elettromagnetici ed idrodinamici, non é ancora una teoria unitaria, ma la semplice *sovrapposizione* dei due campi, allo stesso modo che la sovrapposizione del campo magnetostatico con quello elettrostatico, non ci dà la teoria elettromagnetica, che si ottiene invece con la *fusione* dei due campi elettrico e magnetico.

E' quindi di un certo interesse vedere cosa accade passando alla relatività proiettiva basata sul gruppo di FANTAPPIÉ, nella quale lo spazio-tempo di MINKOWSKI viene sostituito dal cronotopo proiettivo di CASTELNUOVO, e cioè dalla rappresentazione geodetica piana del cronotopo di DE SITTER.

Nel 1955 ho generalizzato le equazioni di MAXWELL in modo da renderle invarianti per il gruppo di FANTAPPIÉ, e cioè in modo da tener conto sia della curvatura dello spazio che della espansione dello universo [16]. Ho trovato così le seguenti equazioni più generali di un campo a 10 componenti e nelle quali appaiono le due costanti universali c (velocità della luce) ed r (raggio del cronotopo):

$$(7,1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Rot } F_{AB} = J_{ABC} \quad \text{con le condizioni di integrabilità} \\ \text{Div } F_{AB} = 0 \quad \quad \quad \text{Rot } J_{ABC} = 0 \quad (A, B, C = 1 \dots 5) \end{array} \right.$$

Tali equazioni si scrivono così, in forma tridimensionale

$$(7,2) \quad \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{E} = J_0 \\ \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \\ \text{rot } \mathbf{C} - \frac{1}{r} \frac{d \mathbf{E}}{\partial x_5} = \Omega \\ \text{grad } C_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_5} = \mathbf{A} \end{array}$$

$$(7,3) \quad \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{H} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_0}{\partial x_5} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_5} = 0 \\ \text{div } \mathbf{C} + \frac{1}{c} \frac{\partial C_0}{\partial t} = 0 \end{array}$$

La derivata rispetto ad x_5 viene eliminata tenendo presente che *un tensore proiettivo deve avere un grado di omogeneità n dato dalla differenza del numero di indici superiori col numero di indici inferiori*. Si avrà quindi, indicando con T tale tensore

$$(7,4) \quad \boxed{\partial_5 T = n T - x_5 \partial_s T}$$

Per r tendente all'infinito, le (7,2-3) si scindono nei due gruppi di equazioni indipendenti ed invarianti per il gruppo di LORENTZ

$$(7,5) \quad \begin{cases} \text{Rot } F_{ik} = J_{ikl} \\ \text{Div } F_{ik} = 0 \end{cases}$$

$$(7,6) \quad \begin{cases} \text{Rot } C_i = \Omega_{ik} \\ \text{Div } C_i = 0 \end{cases}$$

le quali concidono rispettivamente con le equazioni di MAXWELL nel vuoto (scritte in forma duale) e con le equazioni del campo idrodinamico di SYNGE-LICHNEROWICZ dei fluidi perfetti incompressibili. Le (7,1) si possono quindi considerare come le equazioni della magnetoidrodinamica nell'Universo di DE SITTER.

8. STUDIO DELLE ONDE MAGNETOIDRODINAMICHE PIANE

Come è noto, per studiare le onde elettromagnetiche piane e le onde idrodinamiche piane, si suppone che i campi elettromagnetico (\mathbf{E}, \mathbf{H}) ed idrodinamico (\mathbf{C}, C_0) non dipendano dalle due variabili (y, z) : in tal caso si hanno onde piane normali all'asse x , che è la direzione di propagazione. Si ottengono allora dalle (7, 5-6) i seguenti gruppi di equazioni indipendenti (supponiamo per semplicità $r = c = 1$):

$$(8,1) \quad \begin{cases} \partial_4 E_1 = 0 \\ \partial_1 E_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_4 H_1 = 0 \\ \partial_1 H_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_4 C_3 = 0 \\ \partial_1 C_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_4 C_2 = 0 \\ \partial_1 C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_4 E_2 + \partial_1 H_3 = 0 \\ \partial_1 E_2 + \partial_4 H_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_4 E_3 - \partial_1 H_2 = 0 \\ \partial_1 E_3 - \partial_4 H_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_1 C_1 + \partial_4 C_0 = 0 \\ \partial_1 C_0 + \partial_4 C_1 = 0 \end{cases}$$

Dai primi quattro gruppi segue che si può porre

$$(8,2) \quad H_x = E_x = 0 \quad \text{ed anche} \quad C_y = C_z = 0$$

Le onde elettromagnetiche sono quindi *trasversali*, mentre quelle idrodinamiche sono *longitudinali*. Le altre equazioni ci dicono che ci sono due tipi di onde elettromagnetiche (E_y, H_x) ed (E_z, H_y) nelle quali il campo elettrico e quello magnetico sono indissolubilmente legati, ed un tipo di onde idrodinamiche (C_x, C_0) *longitudinali*. Tali onde soddisfano l'equazione di D'ALEMBERT, come segue dal secondo gruppo di equazioni (1):

$$(8,3) \quad \square (E_y, H_x) = 0; \quad \square (E_z, H_y) = 0; \quad \square (C_x, C_0) = 0$$

Fatta questa premessa, vediamo cosa accade per le equazioni di MAXWELL generalizzate (7,1). In questo caso si ottengono quattro gruppi di equazioni indipendenti

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_1 E_1 = 0 \\ \partial_4 E_1 = 0 \\ \partial_5 E_1 = 0 \end{array} \right. & \text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_5 C_1 - \partial_4 H_1 = 0 \\ \partial_1 H_1 - \partial_5 C_0 = 0 \\ \partial_1 C_1 + \partial_4 C_0 = 0 \\ \partial_1 C_0 + \partial_4 C_1 + \partial_5 H_1 = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{(III)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_4 E_2 + \partial_1 H_3 = 0 \\ \partial_4 H_3 + \partial_1 E_2 - \partial_5 C_3 = 0 \\ \partial_1 C_3 - \partial_5 C_2 = 0 \\ \partial_4 C_3 + \partial_5 H_2 = 0 \end{array} \right. & \text{(IV)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_4 E_3 - \partial_1 H_2 = 0 \\ \partial_4 H_2 - \partial_1 E_3 - \partial_5 C_2 = 0 \\ \partial_1 C_2 + \partial_5 E_3 = 0 \\ \partial_4 C_2 + \partial_5 H_2 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

dal primo gruppo di equazioni segue che si può porre

$$(8,4) \quad E_x = 0$$

perché E_x non dipende da (x_1, x_4, x_5) . Invece dalle altre equazioni si ricava

$$(8,5) \quad \square^* (E_y, H_z, C_z) = 0; \quad \square^* (E_z, H_y, C_y) = 0; \quad \square^* (H_x, C_x, C_0) = 0$$

dove \square^* è il d'alambertiano proiettivo, studiato ai n.º 5,6. Nella relatività proiettiva si hanno quindi tre tipi di onde magnetoidrodinamiche, due trasversali (E_y, H_z, C_z) ed (E_z, H_y, C_y) , che chiameremo onde di ALFVÉN, ed una longitudinale (H_x, C_x, C_0) . Questo risultato è in accordo con la esistenza dei due vettori di POYNTING generalizzati

$$(8,6) \quad \mathbf{X} = C_0 \mathbf{C} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}; \quad \mathbf{Y} = C_0 \mathbf{H} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{C}$$

introdotti nei precedenti lavori. Il nuovo campo magnetoidrodinamico che così si ottiene, risulta dalla fusione del campo elettromagnetico e di quello idrodinamico in un unico tensore proiettivo F_{AB} : ed infatti per una trasformazione del gruppo di FANTAPPPIÉ i due precedenti campi si mutano l'uno nell'altro. Per esempio, per una traslazione nel tempo di T_0 si avrà [5]:

$$(8,7) \quad C'_0 = C_0; \quad \mathbf{C}' = \frac{\mathbf{C} - \gamma \mathbf{H}}{\sqrt{1 - \gamma^2}}; \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}; \quad \mathbf{H}' = \frac{\mathbf{H} + \gamma \mathbf{C}}{\sqrt{1 - \gamma^2}}$$

Per comprendere meglio questa importante circostanza, osserviamo che il gruppo di GALILEO é formato dalle *rotazioni spaziali* \mathbf{R} (3) a tre parametri, dai *trascinamenti* \mathbf{V} (3) a tre parametri, dai *trascinamenti* \mathbf{V} (3) a tre parametri, dalle *traslazioni spaziali* \mathbf{T} (3) a tre parametri e dalle *traslazioni temporali* T_0 (1) ad un parametro. Passando ai gruppi di LORENTZ e di FANTAPPIÉ, tali operazioni si saldano tra loro successivamente, come é indicato nel seguente schema

gruppo di GALILEO	\mathbf{R} (3)	\mathbf{V} (3)	\mathbf{T} (3)	T_0 (1)
gruppo di LORENTZ	R (6)		T (4)	
gruppo di FANTAPPIÉ	R (10)			

cioé, nella relatività ristretta le rotazioni spaziali ed i trascinamenti si saldano nelle *rotazioni del cronotopo* $R(6)$ a sei parametri, e le traslazioni spaziali e temporali si saldano nelle *traslazioni del cronotopo* $T(4)$ a quattro parametri, tramite la costante universale c . Nella relatività proiettiva, la costante universale r salda assieme le traslazioni e le rotazioni del cronotopo nelle *rotazioni dello spazio* a cinque dimensioni $R(10)$ a dieci parametri.

Una cosa analoga avviene per i vari campi: nella fisica classica abbiamo il *campo elettrico* \mathbf{E} (3) a tre componenti, il *campo magnetico* \mathbf{H} (3) a tre componenti ed il *campo idrodinamico* \mathbf{C} (3) e $C_0(1)$ rispettivamente a tre e ad una componente. Nella relatività i primi due campi si saldano nel campo elettromagnetico (\mathbf{E}, \mathbf{H}) a sei componenti e gli altri due nel campo idrodinamico (\mathbf{C}, C_0) a quattro componenti, tramite la costante universale c . Solo nella relatività proiettiva la nuova costante universale r realizza la fusione di questi campi in quello magnetoidrodinamico $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{C}, C_0)$ a dieci componenti, come risulta dal seguente schema

gruppo di GALILEO	\mathbf{E} (3)	\mathbf{H} (3)	\mathbf{C} (3)	C_0 (1)
gruppo di LORENTZ	(\mathbf{E}, \mathbf{H})		(\mathbf{C}, C_0)	
gruppo di FANTAPPIÉ	$(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{C}, C_0)$			

In corrispondenza, il vettore corrente elettrica J_k che nella relatività ha quattro componenti, si viene a saldare con il tensore vortice di LICHNEROWICZ Ω_{ik} , a sei componenti, in modo da formare un unico tensore J_{ABC} a dieci componenti.

9. CAMPO ELETTROMAGNETICO CON INDUZIONE E FLUIDI CON INDICE f

Abbiamo fatto vedere nel 1955-56 [16] che la teoria elettromagnetica nel vuoto e la idrodinamica dei fluidi perfetti incompressibili (con equazione di stato $\dot{p} = \mu_0 c^2$) possono considerarsi caso-limite per r tendente all'infinito, di una sola teoria più generale, invariante per il gruppo di FANTAPPIÉ. Adesso ci proponiamo di completare quel risultato, estendendolo al caso del campo elettromagnetico con induzione e del campo idrodinamico dei fluidi non viscosi, con indice f , nel senso di SYNGE.

A questo scopo richiamiamo brevemente queste due teore, seguendo O. COSTA DE BEAUREGARD [14].

a) *Campo elettromagnetico con induzione.* Se introduciamo i due tensori di S_4 ($i, k = 1 \dots 4$)

$$(9.1) \quad F_{ik} = (\mathbf{D}, \mathbf{H}); \quad G_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$$

le equazioni di MAXWELL (in forma duale) risultano

$$(9.2) \quad \boxed{\text{Rot } F_{ik} = J_{ikl}; \quad \text{Div } G_{ik} = I_k}$$

dove $I_k = 0$, ma può essere non nullo se si ammette l'esistenza dei monopoli di DIRAC [15]. Introduciamo la forza di LORENTZ nel seguente modo

$$(9.3) \quad \boxed{2 f_i = G_{kl} J_{ikl} + 2 F_{ik} I_k}$$

e facciamo vedere come si ottiene la formula di MAXWELL-MINKOWSKI (in forma duale). Dalla (3) segue, in base alle (2):

$$2f_i = G_{kl} (\partial_i F_{kl} + \partial_k F_{li} + \partial_l F_{ik}) + 2 F_{ik} \partial_l G_{kl} =$$

$$=: G_{kl} \partial_i F_{kl} + (G_{kl} \partial_k F_{li} + G_{kl} \partial_l F_{ik}) + 2 F_{ik} \partial_l G_{kl}$$

nel secondo termine in parentesi scambiamo k con l ed l con k , ed avremo

$$2f_i = G_{kl} \partial_i F_{kl} + 2 G_{kl} \partial_k F_{li} + 2 F_{ik} \partial_l G_{kl}$$

Nel terzo termine scambiamo k con l ed l con k , e scomponiamo il primo termine in due parti

$$2f_i = \frac{1}{2} G_{kl} \partial_i F_{kl} + \frac{1}{2} G_{kl} \partial_i F_{kl} + 2 \partial_k (G_{kl} F_{li}) =$$

$$= \frac{1}{2} \partial_i (G_{kl} F_{kl}) + 2 \partial_k (G_{kl} F_{li}) + \frac{1}{2} G_{kl} \partial_i F_{kl} - \frac{1}{2} F_{kl} \partial_i G_{kl}$$

introducendo il *tensore di MAXWELL-MINKOWSKI*

$$(9,4) \quad M_{ik} = F_{il} G_{lk} + \frac{1}{4} G_{rs} F_{rs} \delta_{ik}$$

la (3) si può scrivere nel seguente modo

$$(9,5) \quad \boxed{f_i = \partial_k M_{ik} + \frac{1}{4} (G_{kl} \partial_i F_{kl} - F_{kl} \partial_i G_{kl})}$$

come é facile verificare:

b) *Teoria dei fluidi con indice f* . L'equazione fondamentale della dinamica é

$$(9,6) \quad f_i = \partial_i p + \partial_j (\mu V_i V_j) \text{ con } \mu = \mu_0 + p/c^2$$

Se allora introduciamo i due vettori paralleli alla velocità:

$$(9,7) \quad C_i = f V_i; G_i = g V_i \text{ con } fg = \mu$$

dove f e g sono gli *indici* del fluido, e poniamo

$$(9,8) \quad \boxed{\text{Div } G_i = \sigma; \text{ Rot } C_i = \Omega_{ij}}$$

con σ la sorgente ed Ω_{ij} il vortice idrodinamico, avremo

$$\begin{aligned} f_i &= \partial_i p + \partial_j (C_i G_j) = \partial_i p + C_i \partial_j G_j + G_j \partial_j C_i = \\ &= \partial_i p + \sigma C_i + \Omega_{ij} G_j + G_j \partial_i C_j \end{aligned}$$

la quale si riduce alla equazione

$$(9,9) \quad \boxed{f_i = \Omega_{ij} G_j + \sigma C_i}$$

analoga alla (3) se si impone la condizione $\partial_i p + G_j \partial_i C_j = 0$, cosa che implica una equazione di stato del tipo isoterma $\mu = \mu(p)$.

Ora si ha

$$\begin{aligned} G_j \partial_i C_j &= g V_j (V_j \partial_i f + f \partial_i V_j) = -c^2 g \partial_i f + g V_j f \partial_i V_j = \\ &= -c^2 \mu \partial_i f/f + \mu \partial_i (V_j V_j) \end{aligned}$$

l'ultimo termine è nullo perché $V_i V_i = -c^2$. Avremo quindi la condizione

$$(9,10) \quad \boxed{\partial_i p - c^2 \mu \partial_i f/f = 0}$$

la quale moltiplicata per V_i ci dà $dp = c^2 \mu d \log f$, e quindi occorre porre, col SYNGE:

$$(9,11) \quad f = \exp \int_{p_0}^p \frac{dp}{\mu c^2} \text{ da cui segue } g = \exp \int_{p_0}^p \frac{d\mu}{\mu}$$

se si tiene presente che i due indici sono tali che $f g = \mu$.

10. LA MAGNETOIDRODINAMICA «PROIETTIVA»

Per riunire le due precedenti teorie in una sola, invariante per il gruppo di FANTAPPIÉ, introduciamo i due tensori proiettivi di S_5

$$(10,1) \quad F_{AB} = (\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{C}, C_0); G_{AB} = (\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{G}, G_0)$$

e scriviamo le equazioni di MAXWELL generalizzate, così

$$(10,2) \quad \boxed{\text{Rot } F_{AB} = J_{ABC}; \text{Div } G_{AB} = I_B}$$

con $A, B, C = 1 \dots 5$. Allora, la teoria del campo elettromagnetico con induzione si generalizza subito alla relatività proiettiva, facendo variare gli indici da 1 a 5, invece che da 1 a 4. La teoria così generalizzata, per r tendente all'infinito si ridurrà evidentemente alla teoria di MAXWELL, con induzione, ed in una seconda teoria la quale dovrà coincidere con quella dei fluidi con indice f .

A tale scopo osserviamo che la parte spazio-temporale della

$$f_A = \partial_B (F_{AS} G_{SB} + \frac{1}{4} F_{RS} G_{RS} \delta_{AB}) + \frac{1}{4} (G_{RS} \partial_A F_{RS} - F_{RS} \partial_A G_{RS})$$

si scinde in due parti, la prima coincidente con la (9,5), mentre la seconda parte ci dà, ricordando che $F_{i5} = C_i; G_{i5} = G_i$:

$$(10,3) \quad f_i = \partial_j (C_i G_j - \frac{1}{2} C_s G_s \delta_{ij}) - \frac{1}{2} (G_s \partial_i C_s - C_s \partial_i G_s)$$

perché tale gruppo di termini coincida con l'equazione dinamica (9,6) occorre che si abbia $G_j C_i = V_j V_i$ cioè $f g = \mu$. Dovrà aversi poi

$$\begin{aligned} \partial_i p &= -\frac{1}{2} \partial_i (C_s G_s) - \frac{1}{2} G_s \partial_i C_s + \frac{1}{2} C_s \partial_i G_s = \\ &= -\frac{1}{2} \partial_i (C_s G_s) + \frac{1}{2} \partial_i (C_s G_s) - \frac{1}{2} G_s \partial_i C_s - \frac{1}{2} G_s \partial_i C_s \end{aligned}$$

cioé, in definitiva

$$(10,4) \quad \boxed{\partial_i p = -G_s \partial_i C_s}$$

Ora, se teniamo conto della (9,7) si ha

$$\partial_i p = -g V_s \partial_i (f V_s) = -\mu V_s \partial_i V_s + \mu c^2 \partial_i f / f$$

il primo termine é nullo perché $V_i V_i = -c^2$. Ne segue che $\partial_i p = \frac{\mu c^2}{f} \partial_i f$ cioè $d p = \frac{\mu c^2}{f} d f$, da cui seguono subito le (9,11) di SYNGE.

In particolare se il fluido é *perfetto* nel senso di BEAUREGARD, si avrà $C_i = G_i$, cioè $f = g = \sqrt{\mu}$, e quindi $C_i = \sqrt{\mu} V_i$. Se ne deduce l'equazione di stato $\rho = \mu_0 c^2$, e si ricade così nella teoria dei fluidi perfetti incompressibili. A tale teoria viene accoppiata quella del campo elettromagnetico senza induzione, per il quale $F_{ik} = G_{ik}$, come ho dimostrato nelle mie precedenti ricerche [6].

BIBLIOGRAFIA

- (1) F. GURSEY, *Introduction to De Sitter group*, in «Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics», Gordon and Breach, New York 1964, pag. 365.
- (2) P. ROMAN, J.J. AGHASSI, *Classical field Theory and gravitation in a De Sitter World*, Journ. Math. Phys. 7, 1273 (1966); A.M. SUTTON, *Spinning particles*, Phys. Rev. 160, 1055 (1967). Vedi pure K.B. WOLF, *Dynamical groups for the point rotor and the hydrogen Atom*, Suppl. Nuovo Cimento, 5, 1401 (1967).
- (3) L. BIANCHI, *Sulla integrazione della equazione $\Delta U = 0$ nello spazio indefinito non euclideo*, Rend. Lincei, ser. V 9 (2), 333 (1900); G. ASCOLI, *Sulla equazione di Laplace dello spazio iperbolico*, Rend. Lincei, ser VI, 7, 309, (1928); Math. Zeit. 31, 45 (1930). Vedi pure A/M. TONNELAT, *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Paris, Gauthier-Villars 1965, cap. XII.
- (4) F. TRICOMI, *Equazioni a derivate parziali*, Cremonese 1957, pag. 204.
- (5) G. ARCIDIACONO, *La relatività di Fantappiè* (1958), *Relatività finale e cosmologia* (1960), *Gli spazi di Cartan e le teorie unitarie* (1964), *Relatività cinematica e cosmologia proiettiva* (1965), *L'Universo di De Sitter e la relatività proiettiva* (1968) su Collectanea Mathematica.
- (6) F. TRICOMI, G. FERRARI, *Aerodinamica transonica*, Cremonese, Roma 1962; F. TRICOMI, *Equazioni alle derivate parziali di tipo misto*, Memorie Acc. Lincei, 14, 133 (1924); M. CIBRARIO, *Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo misto*, Rend. Ist. Lombardo, 65, 889 (1932).

- (7) E. PERSICO, *Introduzione alla fisica matematica*, Zanichelli, Bologna 1952, pag. 350.
- (8) H. ALFVÉN, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford University Press 1950; C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, Cremonese, Roma 1966.
- (9) A. LICHNEROWICZ, *Théories unitaires de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.
- (10) Y. CHOQUET-BRUHAT, *Fluides relativistes de conductibilité infinie*, Ast. Acta. 6, 354 (1960); PHAM-MAU-QUAN, *Etude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé*, Journ. Rat. Mech. 5, 473, (1956); G. PICHON, *Etude relativiste de fluides visqueux et chargés*, Ann. Poinc. 2, 21 (1965).
- (11) K. GOTO, *Relativistic Magnetohydrodynamics*, Progr. Theor. Phys. 20, 1, (1958); L. A. SCHMID, *Larmor and Helmholtz theorem for relativistic charged fluid flow*, Nuovo Cimento, LII, B, 313 (1967).
- (12) B. ZUMINO, *Some questions in relativistic hydromagnetics*, Phys. Rev. 108, 1116 (1957), E.G. HARRIS, *Relativistic Magnetohydrodynamics*, Phys. Rev. 108, 1357, (1957); A.M. PRATELLI, *Discontinuità e ipersuperficie caratteristiche in magneto fluidodinamica relativistica*, Ann. Mat., 49,41 (1965).
- (13) A. LICHNEROWICZ, *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics*, Benjamin, New York (1967).
- (14) O. COSTA DE BEAUREGARD, *La théorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris, 1949 vedi pag. 82 e pag. 144.
- (15) L.I. SCHIFF, *Quarks and Magnetic Poles*, Phys. Rev. 160, 1257 (1967). P.A.M. DIRAC, *The theory of magnetic poles*, Phys. Rev., 74, 817 (1948).
- (16) G. ARCIDIACONO, Note lincee del 1955-56; G. S. ARCIDIACONO, *Spazio, Tempo, Universo*, Ed. Il Fuoco (Via G. Carini 15) Roma, 1961; G. ARCIDIACONO, *Universo e relatività*, Ed. Massimo, Milano, 1967.