

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA  
ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES  
TOTALMENTE HIPERBÓLICAS

por  
MARIANO GASCA GONZÁLEZ

CONTENIDO

	<u>Pág.</u>
Introducción.....	201
CAPÍTULO I. Ecuaciones en derivadas parciales totalmente hiperbólicas con coeficientes constantes, homogéneas y con tres variables independientes.....	
1. Generalidades.....	203
2. Ecuaciones totalmente hiperbólicas. Propiedades....	205
3. Planteamiento del problema de Cauchy. Considera- ciones generales.....	209
4. Resolución del problema de Cauchy con condiciones iniciales nulas. Método de PANTAPPIÉ.....	212
CAPÍTULO II. Estudio de la función algebraica $J = J(X, Y)$ .	
5. Eliminación de las variables $\alpha, \beta$ .....	221
6. Estudio de la resultante.....	224
7. Estudio de los coeficientes $A_m$ y $A_{m-1}$ .....	228
8. Puntos de ramificación de $J$ . Desarrollos en serie de Puiseux.....	230
9. Estudio de los coeficientes $S_m$ y $S_0$ .....	238
CAPÍTULO III. Propiedades globales de las determinaciones $J_r$ de $J$ .....	
10. Individualización de las determinaciones $J_r$ de $J$ ..	245
11. Carácter real o imaginario de una determinación..	248

	<u>Pág.</u>
12. Influencia de los puntos de ramificación de $J$ imaginarios en el cálculo de la solución.....	251
13. Propiedades de las determinaciones de $J$ que se anulan en un punto real de $P = 0$ .....	256
14. Propiedad del par de tangentes imaginarias conjugadas de $P = 0$ que pasan por un punto real.....	261
15. Propiedad de las determinaciones de $J$ que se anulan en un punto de una tangente real.....	262
16. Influencia de las tangentes imaginarias múltiples y de inflexión de $P = 0$ en el cálculo de la solución.	266
 CAPÍTULO IV. Fórmulas resolutivas.	
17. Número de tangentes imaginarias a $P = 0$ que pasan por un punto real e índice de $C$ respecto del mismo	272
18. Expresión de las integrales dobles en $X, Y$ que intervienen en el cálculo de la solución.....	273
19. Expresión de las integrales simples en $Y$ que intervienen en el cálculo de la solución.....	275
20. Expresión final de la solución.....	277
21. Consecuencias cualitativas.....	281
22. Generalización de la fórmula resolutiva.....	281
Bibliografía.....	283

---

El presente trabajo ha sido realizado en la Facultad de Ciencias de Zaragoza con una Ayuda de la Junta para el Fomento de la Investigación en la Universidad y ha sido dirigido por el Catedrático de dicha Facultad D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS PÁLERO, a quien queremos expresar nuestro agradecimiento. Es una parte de la Memoria que para la obtención del grado de Doctor del autor fue presentada recientemente en la Universidad de Zaragoza y que fue calificada con Sobresaliente «*cum laude*».

## INTRODUCCIÓN (\*)

L. FANTAPPIÉ, tras desarrollar la teoría de los funcionales analíticos, la aplicó a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, Posteriormente, J. CASULLERAS [3], J. TEIXIDOR [12], J. AUGÉ [2] y R. AGUIÓ [1] se basaron en ello para resolver ciertas ecuaciones en derivadas parciales totalmente hiperbólicas. Nuestro trabajo ha sido concebido con la idea de lograr sistematizar en lo posible los cálculos necesarios para resolver ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes, lineales, homogéneas, con tres variables independientes y totalmente hiperbólicas.

Para ello hemos partido tanto de los trabajos de FANTAPPIÉ como de los otros citados.

En el capítulo I se empieza definiendo lo que se entiende por ecuaciones totalmente hiperbólicas y estudiando sus propiedades generales, para acabar planteando el problema de CAUCHY correspondiente y resolviéndolo mediante el método de FANTAPPIÉ. La fórmula final obtenida en este capítulo requiere para su cálculo el estudio de una cierta función algebraica  $J = J(X, Y)$  determinada por la ecuación de partida.

En el capítulo II se realiza un estudio de esa función, que representa  $m$  determinaciones si es  $m$  el orden de la ecuación. Decisivo ha sido en este capítulo, y consiguientemente en los restantes, el empleo de la resultante  $R(X, Y, \eta)$  en la forma usada en § 5, como puede observarse inmediatamente a lo largo de todo el trabajo. Este capítulo es sensiblemente más amplio en la Memoria original, puesto que allí incluimos un estudio del comportamiento local de las determinaciones de  $J$  que, no obstante, no es necesario para la obtención de la fórmula final.

En el capítulo III se pasa a un estudio de las propiedades globales de las determinaciones de  $J$ , para lo cual nos basamos en los resultados del capítulo II. Estas nuevas propiedades son ya de influencia directa en el cálculo de la solución de la ecuación y vienen a preparar el camino de la expresión final de dicha solución.

En § 10 se introduce la noción de traza que resuelve muchas posibles dudas y paradojas que se nos habían presentado anterior-

---

(\*) Los números encerrados entre corchetes corresponden a la bibliografía expuesta al final.

mente. Consideramos este capítulo decisivo para llegar a las conclusiones finales del trabajo. En los § 12 y 16 se ve la no influencia de los puntos singulares de  $1/J$  imaginarios en el cálculo de la solución. En § 13 se estudian las propiedades fundamentales de las determinaciones de  $J$  que se anulan en un punto real de la curva  $P = 0$ , cuya expresión tangencial es dada directamente por la ecuación que estamos resolviendo. Por último, en los § 14 y 15 se ven ciertas propiedades, también importantes, de las tangentes a la curva  $P = 0$ .

En el capítulo IV se elabora la expresión final de la solución de la ecuación, viéndose claramente la influencia de las tangentes múltiples reales de  $P = 0$ .

Es de destacar que, además de que hemos empleado los resultados obtenidos por FANTAPPIÉ, los estudios que han realizado AGUILÓ, AUGÉ, CASULLERAS y TEIXIDOR de sus respectivos problemas nos han servido de inapreciable ayuda, tanto por sus conclusiones como por la variedad de los casos que presentan, en nuestras investigaciones de carácter general.

Como final de esta introducción, creemos conveniente precisar los dos conceptos siguientes:

1) *Tangente de inflexión* de una curva es una recta tangente a una rama, al menos, de la curva cuya clase sea mayor que uno.

2) *Tangente múltiple* de una curva es una recta tangente a dos ramas diferentes, al menos, de la curva.

Advertimos también que con  $\bar{A}$  denotamos, mientras no se diga lo contrario, la expresión imaginaria conjugada de  $A$

## CAPÍTULO I

### ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES TOTALMENTE HIPERBÓLICAS, CON COEFICIENTES CONSTANTES, HOMOGÉNEAS Y CON TRES VARIABLES INDEPENDIENTES

#### 1. Generalidades.

Consideremos una ecuación en derivadas parciales, de orden  $m$ , lineal, irreducible, homogénea respecto al orden de derivación y con coeficientes constantes reales:

$$(1.1) \quad \sum_{i+j+k=m} c_{ijk} \frac{\partial^m u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = f(x, y, z).$$

Hagamos notar, ante todo, que cualquier ecuación en derivadas parciales de orden  $m$ , lineal, con dos variables independientes y con coeficientes constantes reales puede reducirse a la forma (1.1) mediante la introducción de una tercera variable independiente <sup>(1)</sup>.

La ecuación de las superficies características de (1.1) es

$$(1.2) \quad \sum_{i+j+k=m} c_{ijk} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^i \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^j \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^k = 0,$$

ecuación que satisfacen, evidentemente, los planos

$$(1.3) \quad \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$$

cuyos coeficientes cumplen la condición

$$(1.4) \quad \sum_{i+j+k=m} c_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k = 0.$$

Esta es la ecuación tangencial de un cono de clase  $m$  y vértice  $(x_0, y_0, z_0)$  que se llama cono característico de vértice en ese punto.

El cono característico relativo a cualquier punto se obtendrá, por tanto, proyectando desde ese punto la curva del plano impropio que tiene por ecuación tangencial en ese plano (1.4), que es una curva de clase  $m$ .

---

(1) Véase I. FANTAPPÍÉ, [8].

Esta ecuación y la puntual de su envolvente desempeñan un papel principal en la resolución del problema que vamos a tratar.

Efectuando una transformación proyectiva

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \alpha' &= a_{11} \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma \\ \beta' &= a_{21} \alpha + a_{22} \beta + a_{23} \gamma \\ \gamma' &= a_{31} \alpha + a_{32} \beta + a_{33} \gamma \end{aligned}$$

no degenerada, es decir, tal que

$$(1.6) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

(1.4) se transforma en

$$(1.7) \quad \sum_{i+j+k=m} c'_{ijk} \alpha'^i \beta'^j \gamma'^k = 0.$$

Por otra parte, haciendo en (1.1) el cambio de variables

$$(1.8) \quad \begin{aligned} x &= a_{11} x' + a_{21} y' + a_{31} z' \\ y &= a_{12} x' + a_{22} y' + a_{32} z' \\ z &= a_{13} x' + a_{23} y' + a_{33} z' \end{aligned}$$

se puede escribir, simbólicamente

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= a_{11} \frac{\partial}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= a_{21} \frac{\partial}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial}{\partial y} + a_{23} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= a_{31} \frac{\partial}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial}{\partial y} + a_{33} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

y se obtiene

$$(1.10) \quad \sum_{i+j+k=m} c'_{ijk} \frac{\partial^m u}{\partial x'^i \partial y'^j \partial z'^k} = f'(x', y', z'),$$

para la cual la ecuación de las superficies características es (1.7).

Puede establecerse, según esto, una clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales, lineales (1.1), en correspondencia con la clasificación proyectiva de las curvas (1.4).

Entonces basta tener la resolución de una ecuación de una de estas clases para poder resolver todas las ecuaciones posibles de esta clase.

## 2. Ecuaciones totalmente hiperbólicas. Propiedades.

DEFINICIÓN 2.1. — Se dice que una ecuación (1.1) es del tipo *totalmente hiperbólico* cuando mediante una transformación (1.5) la ecuación (1.4) puede llevarse a una forma tal que dando valores arbitrarios reales a dos de las variables,  $\alpha$ ,  $\beta$ , resulta una ecuación de grado  $m$  en  $\gamma$  que tiene siempre todas sus raíces reales.

Sea (1.1) una ecuación de este tipo. Entonces supondremos siempre que

$$(2.1) \quad C(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i+j+k=m} c_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k = 0$$

está ya puesta en la forma indicada en la definición anterior.

Llamaremos  $C$  a la curva envolvente cuya ecuación tangencial en coordenadas homogéneas es (2.1).

TEOREMA 2.1. — *Por cada punto de la recta impropia,  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ , pasan  $m$  tangentes reales a la curva  $C$ .*

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, las tangentes a  $C$  que pasan por el punto  $(x_0, y_0, 0)$ , donde  $x_0, y_0$  son reales, son las soluciones  $(\alpha, \beta, \gamma)$  del sistema:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \alpha x_0 + \beta y_0 &= 0 \\ C(\alpha, \beta, \gamma) &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\alpha = y_0$ ,  $\beta = -x_0$  en  $C(\alpha, \beta, \gamma) = 0$  se obtiene una ecuación de grado  $m$  en  $\gamma$ , con todas sus raíces  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) reales.

Por tanto las soluciones del sistema (2.2) son  $(y_0, -x_0, \gamma_1), \dots, (y_0, -x_0, \gamma_m)$ , (y sus proporcionales), es decir, que tenemos  $m$  tangentes reales a  $C$  por el punto  $(x_0, y_0, 0)$ .  $\neq$

TEOREMA 2.2. — *La recta impropia,  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ , no es tangente a la curva  $C$ .*

DEMOSTRACIÓN. — De la definición de tipo totalmente hiperbólico se deduce que al hacer  $\alpha = \beta = 0$  debe resultar una ecuación de grado  $m$  en  $\gamma$ .

Por tanto, el término de grado  $m$  en  $\gamma$  ha de ser distinto de cero, por lo cual  $(0, 0, 1)$  no verifica (2.1), es decir, que la recta impropia no es tangente a  $C$ .  $\neq$

COROLARIO 2.2.1. — *La ecuación*

$$(2.3) \quad \sum_{i+j+k=m} c_{ijk} \frac{\partial^m u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = f(x, y, z),$$

*del tipo totalmente hiperbólico, puede escribirse en la forma*

$$(2.4) \quad \frac{\partial^m u}{\partial z^m} + \sum_{\substack{i+j+k=m \\ k < m}} c'_{ijk} \frac{\partial^m u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = f_1(x, y, z).$$

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, del teorema 2.2 se deduce que en  $C$   $(\alpha, \beta, \gamma) = 0$  hay un término en  $\gamma^m$  cuyo coeficiente,  $c_{o\ o m}$ , es distinto de cero, y, al dividir por él, llamando

$$c'_{ijk} = \frac{c_{ijk}}{c_{o\ o m}},$$

(2.1) se reduce a

$$(2.5) \quad \gamma^m + \sum_{\substack{i+j+k=m \\ k < m}} c'_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k = 0,$$

luego (2.3) puede escribirse en la forma (2.4) llamando

$$f_1(x, y, z) = \frac{1}{c_{o\ o m}} f(x, y, z). \neq$$

Del teorema de CAUCHY-KOWALEWSKI se deduce entonces que la condición necesaria y suficiente para que dado un punto cualquiera de la superficie analítica

$$(2.6) \quad L: z = \varphi(x, y)$$

exista un entorno de él en  $I'$ , tal que en dicho entorno exista una y sólo una solución

$$(2.7) \quad u = u(x, y, z)$$

de la ecuación totalmente hiperbólica (1.1), donde  $f$  es analítica, con las condiciones iniciales

$$(2.8) \quad \left( \frac{\partial^k u}{\partial z^k} \right)_{I'} = q_k(x, y) \quad (k = 0, 1, \dots, m-1)$$

sobre  $I'$ , siendo las funciones  $q_k(x, y)$  analíticas, es que  $I'$  no sea superficie característica, es decir, que se verifique

$$(2.9) \quad \sum_{i+j+k=m} c_{ijk} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^j \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^k \neq 0.$$

TEOREMA 2.3. — *La curva  $C$  no tiene puntos impropios reales.*

DEMOSTRACIÓN. — Con objeto de simplificar el lenguaje, en  $C(x, \beta, \gamma)$  tomaremos  $(x, \beta, \gamma)$  como coordenadas puntuales.

Para demostrar el teorema basta ver que por el origen  $(x, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ , no pasan rectas reales tangentes a  $C(x, \beta, \gamma) = 0$ . Mediante una transformación

$$(x, \beta, \gamma) \rightarrow (u, v, w)$$

del tipo (1.5) podemos conseguir que el origen y una recta que pase por él y no sea tangente a la curva se transformen, respectivamente, en  $(u, v, w) = (0, 1, 0)$  y la recta  $w = 0$ .

Para ver que por  $(0, 1, 0)$  no pasan tangentes a la curva transformada de  $C(x, \beta, \gamma) = 0$ , basta ver que en coordenadas absolutas  $(u, v)$ , ( $w = 1$ ), la curva no tiene tangentes paralelas al eje de las  $v$ .

Sea  $(a, b)$  un punto de la curva ( $a$  y  $b$  reales). En un cierto entorno de  $a$  la curva admite un desarrollo en serie de la forma

$$(2.10) \quad v - b = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (u - a)^{k/p}.$$

Veamos que  $p$  puede tomarse igual a 1.

En efecto, como hemos visto en las demostraciones de los teoremas anteriores y teniendo en cuenta las transformaciones hechas aquí, toda paralela al eje de las  $v$  debe cortar a la curva en  $m$  puntos,

todos reales. Supongamos que  $p$  fuera impar y mayor que uno. Dando a  $u$  un valor cualquiera del entorno de  $a$ , el desarrollo sólo ha de dar valores reales. Entonces, tomando en  $(u - a)^{1/p}$  la determinación real, resulta que todos los coeficientes  $c_k$  han de ser reales.

Teniendo esto en cuenta, al tomar la determinación  $e^{2\pi i/p} (u - a)^{1/p}$ , donde  $(u - a)^{1/p}$  es la determinación real, resulta que en cada término del desarrollo se ha de verificar:

$$(2.11) \quad c_k = 0 \quad \text{o} \quad k = \dot{p},$$

ya que en caso contrario todos los valores no serían reales.

Por tanto, en el desarrollo se puede tomar  $p = 1$ .

Si  $p$  fuera par, al dar a  $u$  valores mayores que  $a$  dentro del entorno en el cual es válido el desarrollo, y tomando en éste la determinación real de  $(u - a)^{1/p}$  resulta que todos los coeficientes  $c_k$  han de ser reales.

Y por ello, al dar a  $u$  valores menores que  $a$  y tomar la determinación  $e^{\pi i/p} (a - u)^{1/p}$ , donde  $(a - u)^{1/p}$  es real, resulta que en cada término del desarrollo debe verificarse:

$$(2.12) \quad c_k = 0 \quad \text{o} \quad k = \dot{p}.$$

Entonces podemos tomar  $p = 1$ .

Al ser los únicos desarrollos posibles los de la forma

$$(2.13) \quad v - b = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (u - a)^k,$$

resulta que la tangente a la curva en ningún caso puede ser paralela al eje de las  $v$ , como es evidente, ya que  $v'(a) = c_1 \neq \infty$ .

**TEOREMA 2.4.** — *La curva  $C$  no tiene tangentes de inflexión reales.*

**DEMOSTRACIÓN.** — Tomando de nuevo  $(\alpha, \beta, \gamma)$  como coordenadas puntuales, basta demostrar que  $C(\alpha, \beta, \gamma) = 0$  no tiene puntos cuspidales reales. Pero esto se deduce de la demostración del teorema anterior, ya que se ha visto que en los desarrollos que aparecen se puede tomar  $p = 1$  (2).

Únicamente falta verlo en los puntos de la recta impropia,  $w = 0$ .

(2) De esto se deduce que la clase  $\mu$  de cada rama de  $C$  tangente a una recta real es 1.

Y para verlo en ellos basta hacer un nuevo cambio que deje invariante el punto  $(0, 1, 0)$ , pero no a la recta  $w = 0$ , y aplicar el método del teorema 2.3 a los puntos de esa recta.  $\neq$

TEOREMA 2.5. — *Las tangentes múltiples reales a la curva  $C$  no pueden tener los puntos de contacto imaginarios.*

DEMOSTRACIÓN. — Tomando  $(\alpha, \beta, \gamma)$  como coordenadas puntuales, basta ver que la curva  $C(\alpha, \beta, \gamma) = 0$  no puede tener puntos múltiples reales aislados (es decir, puntos múltiples reales con tangentes imaginarias).

En efecto, si tuviera un punto múltiple real aislado distinto del origen  $(0, 0, 1)$ , una recta próxima a él que pasara por  $(0, 0, 1)$ , cortaría a la curva en dos puntos imaginarios conjugados, al menos, contra la definición de tipo totalmente hiperbólico. Por otra parte, el origen,  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ , tampoco puede serlo por el teorema 2.2.  $\neq$

### 3. Planteamiento del problema de CAUCHY. Consideraciones generales.

Sea

$$(3.1) \quad \sum_{i+j+k=m} c_{ijk} \frac{\partial^m u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = f(x, y, z)$$

la ecuación que se trata de resolver, con las condiciones iniciales:

$$(3.2) \quad \left( \frac{\partial^k u}{\partial z^k} \right)_{I'} = \varphi_k(x, y) \quad (0 \leq k \leq m-1),$$

siendo  $I'$  la superficie no característica

$$(3.3) \quad I' : z = \varphi(x, y)$$

y  $\varphi(x, y)$ ,  $\varphi_k(x, y)$  ( $k = 0, 1, \dots, m-1$ ) analíticas.

Efectuando en (3.1) el cambio de función

$$(3.4) \quad u = v + \sum_{h=0}^{m-1} \frac{(z - \varphi(x, y))^h}{h!} \varphi_h(x, y)$$

el problema queda reducido a resolver la ecuación

$$(3.5) \quad \sum_{i+j+k=m} c_{ijk} \frac{\partial^m v}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = g(x, y, z),$$

con las condiciones iniciales

$$(3.6) \quad \left( \frac{\partial^k v}{\partial z^k} \right)_\Gamma = 0 \quad (0 \leq k \leq m-1)$$

sobre  $\Gamma$ , como es inmediato comprobar.

Vamos a limitarnos, por tanto, a la resolución de la ecuación (3.1) con condiciones iniciales nulas. Suponemos que (3.1) es una ecuación de tipo totalmente hiperbólico.

De que  $u$  verifica

$$(3.7) \quad \left( \frac{\partial^k u}{\partial z^k} \right)_\Gamma = 0 \quad (0 \leq k \leq m-1)$$

se deduce que cumple también

$$(3.8) \quad \left( \frac{\partial^{i+j+k} u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \right)_\Gamma = 0 \quad (0 \leq i+j+k \leq m-1).$$

Vamos a demostrar esto por medio de una doble inducción. Comenzaremos probando que (3.8) es cierta para  $i+j+k=1$ , y, después, suponiendo que se cumple para  $0 \leq i+j+k \leq n < m-1$ , veremos que también es cierta para  $i+j+k=n+1$ . Este último paso lo haremos por inducción respecto al valor de  $i+j$ .

En efecto, que (3.8) es cierta para  $i+j+k=1$  es inmediato, ya que derivando  $u = u(x, y, z)$  respecto de  $x$  sobre la superficie  $\Gamma$  resulta, teniendo en cuenta que  $(u)_\Gamma = 0$ ,

$$(3.9) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_\Gamma + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_\Gamma \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

y como  $\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_\Gamma = 0$  por (3.7), se tiene

$$(3.10) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_\Gamma = 0.$$

Análogamente se ve que

$$(3.11) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_r = 0.$$

Supongamos ahora demostrado que

$$(3.12) \quad \left( \frac{\partial^{i+j+k} u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \right)_r = 0$$

para  $0 \leq i + j + k \leq n < m - 1$  y veamos que también se cumple para  $i + j + k = n + 1$ .

Si  $i + j + k = n + 1$ , la igualdad (3.8) es cierta para  $i + j = 0$  por (3.7). Veamos que si

$$(3.13) \quad \left( \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \right)_r = 0$$

para  $0 \leq i + j \leq l < n + 1$  también lo es para  $i + j = l + 1$ .

En efecto, al derivar

$$\left( \frac{\partial^{n-l} u}{\partial z^{n-l}} \right)_r = 0$$

sobre  $l$  veces respecto de  $x$  y  $j$  veces ( $j = l + 1 - i$ ) respecto de  $y$ , aparece un término que es

$$(3.14) \quad \left( \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^i \partial y^{l+1-i} \partial z^{n-l}} \right)_r,$$

y en el resto de los términos aparecen derivadas de orden  $n + 1$  pero con orden de derivación respecto a  $z$  superior a  $n - l$  y, por tanto, con la suma de los órdenes de derivación respecto a  $x$  e  $y$  inferior a  $l$ , y también aparecen derivadas de orden inferior a  $n + 1$ . Las primeras son nulas según (3.13), y las últimas según (3.12).

Por tanto, se tiene

$$(3.15) \quad \left( \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^i \partial y^{l+1-i} \partial z^{n-l}} \right)_r = 0,$$

es decir, que (3.13) es cierta para  $i + j = l + 1$ .

Con esto queda demostrada también (3.12) para  $i + j + k = n + 1$ . Luego es cierta para cualquier valor de  $i + j + k \leq m - 1$  ( $i, j, k$  enteros no negativos).

4. *Resolución del problema de CAUCHY con condiciones iniciales nulas. Método de FANTAPPIÉ.*

Tratemos ahora de resolver la ecuación dada (3.1).  
Para ello definimos unos operadores funcionales

$$(4.1) \quad Iu = \int_{\varphi}^z u(x, y, \zeta) d\zeta$$

$$(4.2) \quad B_x u = ID_x u = \int_{\varphi}^z u_x(x, y, \zeta) d\zeta$$

$$(4.3) \quad B_y u = ID_y u = \int_{\varphi}^z u_y(x, y, \zeta) d\zeta$$

suponiendo  $u, u_x, u_y$  continuas.

Teniendo en cuenta que la solución  $u$  que buscamos cumple  $(u)_{\Gamma} = 0$ , resulta

$$(4.4) \quad D_x I u = I D_x u,$$

ya que

$$\begin{aligned} D_x I u &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{\varphi}^z u d\zeta = \int_{\varphi}^z u_x d\zeta - (u)_{\Gamma} \varphi_x \\ &= \int_{\varphi}^z u_x d\zeta = I D_x u. \end{aligned}$$

Por la misma razón:

$$(4.5) \quad D_y I u = I D_y u$$

y también

$$(4.6) \quad D_z I u = I D_z u,$$

puesto que

$$D_z I u = u = u - (u)_{\Gamma} = \int_{\varphi}^z u_z d\zeta = I D_z u.$$

Veamos ahora que

$$(4.7) \quad B_x^i B_y^j u = I^{i+j+k} D_x^i D_y^j D_z^k u \quad (i + j + k \leq m).$$

Por definición de (4.2) y (4.3) se tiene:

$$(4.8) \quad B_x^i B_y^j u = (I D_x)^i (I D_y)^j u.$$

Por otra parte

$$(4.9) \quad u = (I D_z)^k u$$

para cualquier entero  $k$ . En efecto, para  $k = 1$  está demostrado en (4.6), y suponiendo que es cierto para  $k = h$ , también lo es para  $h + 1$ , ya que

$$(I D_z)^{h+1} u = (I D_z) (I D_z)^h u = I D_z u = u.$$

Luego de (4.8) y (4.9) tenemos, cualesquiera que sean los valores de  $i, j, k$ , enteros no negativos,

$$(4.10) \quad B_x^i B_y^j u = (I D_x)^i (I D_y)^j u.$$

Tomemos  $i, j, k$  de forma que  $i + j + k = m$  en (4.10) y veamos que se verifica (4.7).

Trivialmente se tiene

$$I D_z u = I D_z u,$$

y, suponiendo demostrado que

$$(I D_z)^h u = I^h D_z^h u \quad (h < m),$$

veamos que

$$(I D_z)^{h+1} u = I^{h+1} D_z^{h+1} u.$$

En efecto, por definición de  $I$  y por ser  $(D_z^h u)_r = 0$  se tiene, para todo entero  $l \geq 0$ ,

$$(4.11) \quad (I^l D_z^h u)_r = 0,$$

luego

$$\begin{aligned} (I D_z)^{h+1} u &= (I D_z) I^h D_z^h u = I (D_z I) I^{h-1} D_z^h u = I^2 D_z I^{h-1} D_z^h u \\ &= I^3 D_z I^{h-2} D_z^h u = \dots = I^{h+1} D_z^{h+1} u, \end{aligned}$$

En particular, en nuestro caso, por ser  $k \leq m$  se tiene

$$(4.12) \quad (I D_z)^k u = I^k D_z^k u.$$

Por tanto,

$$I D_y (I D_z)^k u = I D_y I^k D_z^k u$$

y, por (4.11), si  $k + 1 \leq m$

$$\begin{aligned} I D_y I^k D_z^k u &= I (D_y I) I^{k-1} D_z^k u = I^2 D_y I^{k-1} D_z^k u \\ &= I^3 D_y I^{k-2} D_z^k u = \dots = I^{k+1} D_y D_z^k u. \end{aligned}$$

Análogamente, si  $k + 2 \leq m$ , y teniendo en cuenta (3.12), se verifica

$$\begin{aligned} (I D_y)^2 (I D_z)^k u &= I D_y (I^{k+1} D_y D_z^k) u = I (D_y I) I^k D_y D_z^k u \\ &= I^2 D_y I^k D_y D_z^k u = \dots = I^{k+2} D_y^2 D_z^k u, \end{aligned}$$

y, reiterando el proceso,

$$(I D_y)^h (I D_z)^k u = I^{h+k} D_y^h D_z^k u$$

para cualquier entero  $h$ , no negativo, tal que  $h + k \leq m$ , y, en particular, en nuestro caso:

$$(4.13) \quad (I D_y)^j (I D_z)^k u = I^{j+k} D_y^j D_z^k u.$$

Por definición de  $I$ , y por (3.12), se tiene también, teniendo en cuenta (4.13), si  $j + k + 1 \leq m$ ,

$$\begin{aligned} I D_x (I D_y)^j (I D_z)^k u &= I D_x I^{j+k} D_y^j D_z^k u = I (D_x I) I^{j+k-1} D_y^j D_z^k u \\ &= I^2 D_x I^{j+k-1} D_y^j D_z^k u = \dots = I^{1+j+k} D_x D_y^j D_z^k u \end{aligned}$$

y, reiterando el proceso, se obtiene ya

$$(4.14) \quad (I D_x)^i (I D_y)^j (I D_z)^k u = I^{i+j+k} D_x^i D_y^j D_z^k u$$

para  $i + j + k = m$ . En el proceso se observa inmediatamente que (4.14) es válida también para  $i + j + k < m$ .

Sea ahora

$$(4.15) \quad Q(\alpha, \beta) = \sum_{i+j \leq m} c_{ij} \alpha^i \beta^j$$

donde  $c_{ij} = c_{ijk}$  ( $i + j + k = m$ ), siendo los  $c_{ijk}$  los coeficientes de la ecuación (3.1).

Por (4.7) se verifica

$$(4.16) \quad Q(B_x, B_y)u = I^m f(x, y, z).$$

Por tanto, llamando

$$(4.17) \quad f_k(x, y, z) = I^{m-k} f(x, y, z), \quad (0 \leq k \leq m),$$

se tiene

$$Q(B_x, B_y)u = I f_1(x, y, z),$$

es decir

$$(4.18) \quad u = Q(B_x, B_y)^{-1} I f_1.$$

Seguindo a FANTAPPIÉ<sup>(3)</sup> se obtiene para  $u$  la expresión

$$(4.19) \quad u = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{C_2} \frac{d\beta}{\beta} \int_0^1 p\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \frac{\tau-1}{\beta}\right) W(\alpha, \beta) d\tau,$$

siendo

$$(4.20) \quad p(\alpha, \beta) = Q^{-1}(\alpha, \beta)$$

y

$$(4.21) \quad W(\alpha, \beta) = \int_{z_0}^z [f_1^* + \alpha(\zeta - z)f_{1x}^* + \beta(\zeta - z)f_{1y}^*] d\zeta,$$

donde

$$(4.22) \quad f^* = f(x + \alpha(\zeta - z), y + \beta(\zeta - z), \zeta)$$

y  $z_0$  verifica

$$(4.23) \quad q(x + \alpha(z_0 - z), y + \beta(z_0 - z)) = z_0.$$

$C_1$  y  $C_2$  son curvas cerradas de los planos complejos  $\alpha$  y  $\beta$  res-

<sup>(3)</sup> Véase L. FANTAPPIÉ [10].

pectivamente, tales que en su interior y sobre ellas la función  $W(x, \beta)$  es regular, y en su exterior y sobre ellas lo es

$$p\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \frac{\tau-1}{\beta}\right).$$

La expresión de  $W(x, \beta)$  se puede simplificar. En efecto, teniendo en cuenta que  $f_2 = f_{1z}$  resulta, al derivar  $f_1^*$  respecto a  $\zeta$ :

$$(4.24) \quad \alpha f_{1x}^* + \beta f_{1y}^* = \frac{d}{d\zeta} f_1^* - f_{1z}^* = \frac{df_1^*}{d\zeta} - f_2^*,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} & \int_{z_0}^z (\zeta - z) [\alpha f_{1x}^* + \beta f_{1y}^*] d\zeta \\ &= \int_{z_0}^z (\zeta - z) \frac{df_1^*}{d\zeta} d\zeta + \int_{z_0}^z (z - \zeta) f_2^* d\zeta \\ &= (\zeta - z) f_1^* \Big|_{z_0}^z - \int_{z_0}^z f_1^* d\zeta + \int_{z_0}^z (z - \zeta) f_2^* d\zeta. \end{aligned}$$

Y como

$$(\zeta - z) f_1^* \Big|_{z_0}^z = 0,$$

porque para  $\zeta = z$  se anula el primer factor y para  $\zeta = z_0$  el segundo, resulta, sustituyendo en  $W(x, \beta)$ ,

$$(4.25) \quad W(x, \beta) = \int_{z_0}^z (z - \zeta) f_2^* d\zeta,$$

es decir,

$$W(x, \beta) = \int_{z_0}^z (z - \zeta) f_2(x + \alpha(\zeta - z), y + \beta(\zeta - z), \zeta) d\zeta.$$

Tratemos ahora de expresar  $u$  en forma más sencilla para el cálculo.

Descomponiendo  $p(x, \beta)$  en fracciones simples se tiene

$$(4.26) \quad p(x, \beta) = \sum_{r=1}^{\mu} \frac{c_r(x)}{\beta - \beta_r(x)},$$

donde  $\mu$  es el grado de  $Q(\alpha, \beta)$  en  $\beta$ ,

$$(4.27) \quad Q(\alpha, \beta_r(\alpha)) = 0 \quad (1 \leq r \leq \mu)$$

y

$$(4.28) \quad c_r(\alpha) = \frac{1}{\left(\frac{\partial Q}{\partial \beta}\right)_{\beta = \beta_r(\alpha)}} = \frac{1}{Q_{\beta}(\alpha, \beta_r(\alpha))}.$$

En lo sucesivo escribiremos

$$(4.29) \quad Q_{\beta r} = Q_{\beta}(\alpha, \beta_r(\alpha)).$$

También, si  $\bar{q} = \bar{q}(\alpha, \beta)$ , denotaremos

$$(4.30) \quad \bar{q} = \bar{q}\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \frac{\tau-1}{\beta}\right).$$

Con esto,  $u$  puede expresarse

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{r=1}^{\mu} \int_{c_1}^{\alpha} d\alpha \int_{c_2}^{\beta} d\beta \int_0^1 d\tau \frac{1}{\alpha \beta} \frac{\bar{c}_r W(\alpha, \beta)}{\tau - 1 - \frac{\beta}{\beta_r}} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{r=1}^{\mu} \int_{c_1}^{\alpha} d\alpha \int_0^1 \frac{1}{\alpha} d\tau \int_{c_2}^{\beta} \frac{\bar{c}_r W(\alpha, \beta)}{\tau - 1 - \frac{\beta}{\beta_r}} d\beta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=1}^{\mu} \int_{c_1}^{\alpha} d\alpha \int_0^1 \frac{d\tau}{\alpha} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2}^{\beta} \frac{-1}{\beta_r Q_{\beta r}} \frac{W(\alpha, \beta)}{\beta - \frac{\tau-1}{\beta_r}} d\beta \right), \end{aligned}$$

es decir

$$(4.31) \quad u = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{r=1}^{\mu} \int_{c_1}^{\alpha} d\alpha \int_0^1 \frac{W\left(\alpha, \frac{\tau-1}{\beta_r}\right)}{\alpha \beta_r Q_{\beta r}} d\tau.$$

Efectuemos ahora el cambio de variables

$$(4.32) \quad X = \alpha, \quad Y = \frac{\tau-1}{\beta_r}.$$

Teniendo en cuenta que  $Q(\alpha, \beta_r(\alpha)) = 0$ , resulta

$$(4.33) \quad \beta'_r(\alpha) = -\frac{Q_{\alpha r}}{Q_{\beta r}},$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{D(X, Y)}{D(\alpha, \tau)} &= \frac{\partial Y}{\partial \tau} = \frac{1}{\bar{\beta}_r} + \frac{\tau - 1}{\bar{\beta}_r^2} \frac{\bar{\beta}'_r}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\bar{\beta}_r} - \frac{Y}{\alpha \bar{\beta}_r} \frac{\bar{Q}_{\alpha r}}{\bar{Q}_{\beta r}} = \frac{X \bar{Q}_{\beta r} - Y \bar{Q}_{\alpha r}}{\alpha \bar{\beta}_r \bar{Q}_{\beta r}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(4.34) \quad u = \sum_{r=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} dX \int_0^{\frac{1}{\bar{\beta}_r(0)}} \frac{W(X, Y)}{X \bar{Q}_{\beta r} - Y \bar{Q}_{\alpha r}} dY,$$

es decir,

$$(4.35) \quad u = \sum_{r=1}^n \int_0^{\frac{1}{\bar{\beta}_r(0)}} \frac{dY}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{W(X, Y)}{X \bar{Q}_{\beta r} - Y \bar{Q}_{\alpha r}} dX.$$

Con  $\bar{Q}_{\beta r}$  y  $\bar{Q}_{\alpha r}$  hemos expresado, como se ha dicho en (4.30):

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{\beta r} &= Q_{\beta} \left( -\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r \left( -\frac{\tau}{\alpha} \right) \right) = Q_{\beta} \left( -\frac{\tau}{\alpha}, \bar{\beta}_r \right) \\ \bar{Q}_{\alpha r} &= Q_{\alpha} \left( -\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r \left( -\frac{\tau}{\alpha} \right) \right) = Q_{\alpha} \left( -\frac{\tau}{\alpha}, \bar{\beta}_r \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta (4.32), resulta

$$(4.36) \quad -\frac{\tau}{\alpha} X + \bar{\beta}_r Y + 1 = 0,$$

es decir, que

$$(4.37) \quad J_r = X \bar{Q}_{\beta r} - Y \bar{Q}_{\alpha r}$$

puede expresarse en la forma

$$(4.38) \quad J_r = X Q_{\beta} - Y Q_{\alpha}$$

donde  $\alpha, \beta$  cumplen las condiciones

$$(4.39) \quad \begin{aligned} Q(\alpha, \beta) &= 0 \\ \alpha X + \beta Y + 1 &= 0 \\ \beta(0) &= \beta_r(0). \end{aligned}$$

Con esto resulta

$$(4.40) \quad u = \sum_{r=1}^{\mu} \int_0^{-\frac{1}{\beta_r(0)}} \frac{dY}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{W(X, Y)}{J_r(X, Y)} dX.$$

llamando

$$Y_r = -\frac{1}{\beta_r(0)} \quad (r = 1, 2, \dots, \mu),$$

(4.40) puede escribirse en la forma

$$(4.41) \quad u = \sum_{r=1}^{\mu} \int_0^{Y_r} \frac{dY}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{W(X, Y)}{J_r(X, Y)} dX.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que  $J$ , definida por (11.1), tiene  $m$  determinaciones, tomando

$$Y_r = 0 \quad (r = \mu + 1, \mu + 2, \dots, m)$$

(4.40) puede expresarse

$$(4.42) \quad u = \sum_{r=1}^m \int_0^{Y_r} \frac{dY}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{W(X, Y)}{J_r(X, Y)} dX.$$

Veamos ahora que el valor de  $u$  es independiente del límite inferior de la integración respecto a  $Y$  en (4.42). Es decir, que  $u$  puede expresarse:

$$(4.43) \quad u = \sum_{r=1}^m \int_{Y_0}^{Y_r} \frac{dY}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{W(X, Y)}{J_r(X, Y)} dX,$$

donde  $Y_0$  es un número real cualquiera,

Al formar la diferencia entre los segundos miembros de (4.43) y (4.42) se tiene:

$$\sum_{r=1}^m \int_0^{Y_0} \frac{dY}{2\pi i} \Big|_{C_1} \frac{W(X, Y)}{J_r(X, Y)} dX - \int_0^{Y_0} \frac{dY}{2\pi i} \Big|_{C_1} W(X, Y) \sum_{r=1}^m \frac{1}{J_r(X, Y)} dX = 0,$$

ya que, según veremos en el teorema 7.2,

$$\sum_{r=1}^m \frac{1}{J_r} = 0 \left( = \frac{A_{m-1}}{A_m} \right).$$

## CAPÍTULO II

### ESTUDIO DE LA FUNCIÓN ALGEBRAICA $J = J(X, Y)$

#### 5. Eliminación de las variables $x, \beta$ .

En la expresión de  $u$  últimamente hallada (4.43), aparece  $J_r(X, Y)$ , que es una determinación de la función  $J(X, Y)$  definida por

$$(5.1) \quad J(X, Y) = X Q_\beta - Y Q_x,$$

con las condiciones

$$(5.2) \quad \begin{aligned} Q(x, \beta) &= 0 \\ xX + \beta Y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Obsérvese que, considerando  $Q(x, \beta) = 0$  como ecuación de una curva en coordenadas tangenciales (5.2), indica que el punto  $(X, Y)$  pertenece a una tangente a esa curva.

En lo sucesivo indicaremos con  $P(X, Y) = 0$  la ecuación en coordenadas cartesianas de la curva citada.

Para obtener  $J$  como función implícita de  $X, Y$  basta eliminar  $x, \beta$  entre (5.1) y (5.2). En (5.2) podemos despejar  $\beta$  en la segunda ecuación y sustituir en la primera, con lo que resulta

$$(5.3) \quad Q\left(x, -\frac{xX + 1}{\beta}\right) = 0.$$

Llamando  $\mu$  al grado de  $Q$  en  $\beta$ , como ya hemos hecho anteriormente, basta multiplicar (5.3) por  $Y^\mu$  para obtener una ecuación  $f(x) = 0$  en la que  $f(x)$  es un polinomio cuyos coeficientes son polinomios en  $X, Y$ :

$$(5.4) \quad f(x) = Y^\mu Q\left(x, -\frac{xX + 1}{Y}\right).$$

Siendo  $\mu$  el grado de  $Q$  en  $\beta$  (4.15), puede escribirse

$$Q(x, \beta) = \sum_{\substack{i+j \leq \mu \\ j \leq \mu}} c_{ij} x^i \beta^j$$

y, con ello (5.4), queda en la forma

$$f(\alpha) = \sum_{\substack{i+j \leq m \\ i \leq \mu}} c_{ij} (-1)^j Y^{\mu-i} \alpha^i (\alpha X + 1)^j,$$

que puede expresarse

$$(5.5) \quad f(\alpha) = \sum_{k=0}^m a_k \alpha^{m-k},$$

donde

$$a_{m-k} = \sum_{\substack{k+i+j \leq m \\ i \leq k, j \leq \mu}} c_{ij} (-1)^j \binom{j}{k-i} X^{k-i} Y^{\mu-i} \quad (0 \leq k \leq m),$$

es decir, que los coeficientes  $a_{m-k}$  son, como hemos dicho, polinomios en  $X, Y$ , cuyo grado es igual o menor que  $\mu$ , y que  $a_0$  es precisamente de grado  $\mu$ :

$$(5.6) \quad a_0 = \sum_{j=0}^{\mu} c_{m-j, j} (-1)^j X^j Y^{\mu-j},$$

ya que alguno de los coeficientes  $c_{m-j, j}$  es distinto de cero, por ser  $Q$  de grado  $m$  y ser de grado  $\mu$  en  $\beta$ .

Por otra parte, sustituyendo

$$\beta = -\frac{\alpha X + 1}{Y}$$

en (5.1) resulta:

$$J = X Q_{\beta} \left( \alpha, -\frac{\alpha X + 1}{Y} \right) - Y Q_{\alpha} \left( \alpha, -\frac{\alpha X + 1}{Y} \right),$$

que, pasando  $J$  al segundo miembro y multiplicando por  $Y^{\mu-1}$ , queda

$$(5.7) \quad X Y^{\mu-1} Q_{\beta} \left( \alpha, -\frac{\alpha X + 1}{Y} \right) - Y^{\mu} Q_{\alpha} \left( \alpha, -\frac{\alpha X + 1}{Y} \right) - Y^{\mu-1} J = 0.$$

Ahora bien,

$$f'(\alpha) = Y^{\mu} Q_{\alpha} \left( \alpha, -\frac{\alpha X + 1}{Y} \right) + Y^{\mu} Q_{\beta} \left( \alpha, -\frac{\alpha X + 1}{Y} \right) \left( -\frac{X}{Y} \right)$$

o sea

$$f'(x) = Y^n Q_x \left( x, -\frac{xX+1}{Y} \right) - X Y^{n-1} Q_\beta \left( x, -\frac{xX+1}{Y} \right),$$

luego, llamando

$$(5.8) \quad \eta = -Y^{n-1} J,$$

la igualdad (5.7) puede escribirse en la forma

$$f'(x) - \eta = 0.$$

Es decir, que el problema de eliminar  $x, \beta$  entre (5.1) y (5.2) ha quedado reducido a eliminar  $x$  en

$$(5.9) \quad \begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f'(x) - \eta &= 0 \end{aligned}$$

y luego sustituir  $\eta$  según (5.8).

**TEOREMA 5.1.** — *La eliminante del sistema formado por (5.1) y (5.2) respecto de  $x$  y  $\beta$  es un polinomio en  $X, Y, J$  de grado  $m$  en  $J$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** — Basta ver que la eliminante de (5.9) respecto de  $x$  es un polinomio de grado  $m$  en  $\eta$ .

En efecto, al formar la resultante de SYLVESTER de (5.9) se ve que es un polinomio en  $\eta$  de grado  $m$  tal que sus coeficientes son polinomios en los  $a_i$  de (5.5) y, por tanto, polinomios en  $X, Y$ , y que el coeficiente de  $\eta^m$  es  $(-1)^m a_0^{m-1} \neq 0$ .

Expresaremos

$$(5.10) \quad R(X, Y, \eta) = \sum_{k=0}^m A_k \eta^{m-k},$$

siendo

$$A_0 = (-1)^m a_0^{m-1}.$$

Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  las raíces de  $f(x) = 0$ . Si  $a_0 \neq 0$  se verifica

$$f(x) = a_0 \prod_{k=1}^m (x - \alpha_k).$$

La resultante  $R$  debe anularse para  $\eta = f'(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), luego, si  $a_0 \neq 0$ , puede escribirse

$$R(X, Y, \eta) = (-1)^m a_0^{m-1} \prod_{k=1}^m (\eta - f'(x_k)).$$

es decir,

$$R(X, Y, \eta) = a_0^{m-1} \prod_{k=1}^m (f'(x_k) - \eta).$$

Es de hacer notar que  $a_0 = 0$  implica que  $f(x) = 0$  admite una raíz infinita y, por tanto, una recta  $\alpha X + \beta Y + 1 = 0$  que pasa por el punto  $(X, Y)$  y es tangente a  $P(X, Y) = 0$  se convierte en una recta  $uX + vY = 0$  que pasa por el origen.

Es inmediato, entonces, ver que la ecuación de las  $m$  tangentes a  $Q(x, \beta) = 0$  (y, por tanto a  $P(X, Y) = 0$ ) que pasan por el origen de coordenadas es

$$(5.11) \quad Y^m - a_0 = 0 \neq$$

### 6. Estudio de la resultante.

TEOREMA 6.1. — La resultante  $R(X, Y, \eta)$  puede expresarse en la forma  $a_0 R^*(X, Y, \eta)$ , donde

$$R^*(X, Y, \eta) = P_m(a_0, a_1, \dots, a_m; \eta),$$

siendo  $P_m$  un polinomio en  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, \eta$  de grado  $m$  en  $\eta$  y tal que  $P_m(0, a_1, a_2, \dots, a_m; \eta) \neq 0$ .

DEMOSTRACIÓN. — Si  $m = 2$  se deduce fácilmente que la resultante de

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

y

$$f'(x) - \eta = 2a_0 x + a_1 - \eta$$

es

$$R = a_0 \eta^2 + 4 a_0^2 a_2 - a_0 a_1^2,$$

luego

$$R = a_0 (\eta^2 + 4 a_0 a_2 - a_1^2) = a_0 R^*,$$

donde  $R^*$  es, efectivamente, un polinomio de grado 2 en  $\eta$  que no se anula idénticamente para  $a_0 = 0$ .

Vayamos ahora al caso general  $m > 2$ . Como la resultante  $R$  de  $f(x) = 0$  y  $f'(x) - \eta = 0$  es, evidentemente, una función  $R(a_0, a_1, \dots, a_m; \eta)$  de los coeficientes  $a_k$  de  $f(x)$  y de  $\eta$ , y  $R = a_0 R^*$ , para demostrar el teorema basta probar que  $R^* = R/a_0$  tiene un límite finito distinto de cero, cuando  $a_0$  tiende a cero permaneciendo fijos los  $a_1, a_2, \dots, a_m, \eta$ , de modo que  $a_1 \neq 0$  y la ecuación

$$(6.1) \quad f_0(x) = \sum_{k=1}^m a_k x^{m-k} = 0$$

tenga todas sus raíces  $\alpha_{20}, \alpha_{30}, \dots, \alpha_{m0}$  simples.

Si hacemos tender, entonces,  $a_0$  a cero se deduce que una de las raíces,  $\alpha_1$ , de  $f(x) = 0$  tiende a infinito y las otras  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ , tienden a las raíces  $\alpha_{20}, \alpha_{30}, \dots, \alpha_{m0}$  de  $f_0(x) = 0$ .

Por tanto, como

$$a_0 \alpha_1 + a_1 + \frac{a_2}{\alpha_1} + \dots + \frac{a_m}{\alpha_1^{m-1}} = 0,$$

resulta

$$\lim_{a_0 \rightarrow 0} (a_0 \alpha_1 + a_1) = 0$$

y

$$(6.2) \quad a_0 \alpha_1 \sim -a_1$$

cuando  $a_0 \rightarrow 0$ . Análogamente se tiene

$$(6.3) \quad f'(x_1) \sim -a_1 x_1^{m-2}$$

y

$$(6.4) \quad a_0^{m-2} f'(x_1) \sim (-a_1)^{m-1}$$

cuando  $a_0 \rightarrow 0$ , puesto que

$$\begin{aligned} & \frac{m a_0 x_1^{m-1}}{-a_1 x_1^{m-2}} + \frac{(m-1) a_1 x_1^{m-2}}{-a_1 x_1^{m-2}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{-a_1 x_1^{m-2}} \\ &= \frac{m a_0 \alpha_1}{-a_1} + (1-m) + \dots + \frac{a_{m-1}}{-a_1 \alpha_1^{m-2}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

cuando  $a_0 \rightarrow 0$  y, por consiguiente,

$$\lim_{a_0 \rightarrow 0} a_0^{m-2} f'(\alpha_1) = -a_1 \lim_{a_0 \rightarrow 0} (a_0 \alpha_1)^{m-2} = (-a_1)^{m-1}.$$

Ahora bien, como, según esto,

$$\begin{aligned} \lim_{a_0 \rightarrow 0} R^* &= \left[ \lim_{a_0 \rightarrow 0} a_0^{m-2} (f'(\alpha_1) - \eta) \right] \prod_{i=2}^m (f'_0(\alpha_{i0}) - \eta) \\ &= (-a_1)^{m-1} \prod_{i=2}^m (f'_0(\alpha_{i0}) - \eta) \end{aligned}$$

por ser  $m > 2$ , resulta

$$\lim_{a_0 \rightarrow 0} R^* \neq 0, \infty,$$

puesto que  $a_1 \neq 0$  y

$$f'_0(\alpha_{i0}) = a_1 \prod_{1 \neq j \neq i} (\alpha_{i0} - \alpha_{j0}) \neq \infty$$

para  $i = 2, 3, \dots, m$ .

TEOREMA 6.2. — *La expresión del polinomio  $P_m$  del teorema anterior es*

$$(6.5) \quad P_m(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m; \eta) = a_0^{m-2} \prod_{i=1}^m (f'(\alpha_i) - \eta)$$

si  $a_0 \neq 0$ ,

$$(6.6) \quad P_m(0, a_1, a_2, \dots, a_m; \eta) = (-1)^{m-1} a_1^{m-1} \prod_{i=2}^m (f'_0(\alpha_{i0}) - \eta)$$

si  $a_1 \neq 0$ , y

$$(6.7) \quad P_m(0, 0, a_2, \dots, a_m; \eta) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. — Las igualdades (6.5) y (6.6) resultan del teorema anterior teniendo en cuenta que

$$P_m(a_0, a_1, \dots, a_m; \eta) = R^*$$

para  $a_0 \neq 0$ , y

$$P_m(0, a_1, \dots, a_m; \eta) = \lim_{a_0 \rightarrow 0} R^*.$$

Por otra parte, si permaneciendo  $a_0 = 0$  y  $a_2, a_3, \dots, a_m, \eta$  fijos, con  $a_2 \neq 0$ , hacemos tender  $a_1$  a cero resulta, de manera análoga que en el teorema anterior,

$$\lim_{a_1 \rightarrow 0} (a_1 x_{20} + a_2) = 0$$

y, por tanto,

$$(6.8) \quad a_1 x_{20} \sim -a_2,$$

siendo  $x_{20}$  la raíz de  $f_0(x) = 0$  que tiende a infinito cuando  $a_1 \rightarrow 0$ .

De modo análogo se obtiene también

$$(6.9) \quad f'_0(x_{20}) \sim -a_2 x_{20}^{m-3}$$

cuando  $a_1 \rightarrow 0$  y, por consiguiente,

$$(6.10) \quad \lim_{a_1 \rightarrow 0} a_1^{m-1} (f'_0(x_{20}) - \eta) = 0.$$

Finalmente, si denotamos por  $x_{31}, x_{41}, \dots, x_{m1}$  las raíces de

$$f_1(x) = \sum_{k=2}^m a_k x^{m-k} = 0,$$

para  $i = 3, 4, \dots, m$  se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{a_1 \rightarrow 0} f'_0(x_{i0}) &= \lim_{a_1 \rightarrow 0} a_1 \prod_{1 \neq j \neq i}^m (x_{i0} - x_{j0}) \\ &= a_2 \prod_{3 \leq j \neq i}^m (x_{i1} - x_{j1}), \end{aligned}$$

que es finito, y, por tanto,

$$\begin{aligned} &P_m(0, 0, a_2, \dots, a_m; \eta) \\ &= \lim_{a_1 \rightarrow 0} P_m(0, a_1, a_2, \dots, a_m; \eta) \\ &= \lim_{a_1 \rightarrow 0} (-1)^{m-1} a_1^{m-1} \prod_{i=2}^m (f'_0(x_{i0}) - \eta) \\ &= 0 \prod_{i=3}^m (f'_1(x_{i1}) - \eta) = 0, \end{aligned}$$

de donde resulta (6.7) para  $a_2 \neq 0$  y, por consiguiente, por continuidad, también para  $a_2 = 0$ .

En lo que sigue, llamaremos  $A_k^*$  al coeficiente de  $\eta^{m-k}$  en  $R^*(X, Y, \eta)$

7. Estudio de los coeficientes  $A_m$  y  $A_{m-1}$ .

TEOREMA 7.1. —  $A_m^*$  puede expresarse en la forma

$$(7.1) \quad A_m^* = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \Delta,$$

donde  $\Delta$  es el discriminante de  $f(\alpha) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. — Si  $a_0 \neq 0$ , la expresión de  $R^*$  viene dada por (6.5), luego

$$A_m^* = a_0^{m-2} \prod_{i=1}^m f'(\alpha_i).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} a_0^{m-2} \prod_{i=1}^m f'(\alpha_i) &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^{2(m-1)} \prod_{i>j}^m (\alpha_i - \alpha_j)^2 \\ &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \Delta, \end{aligned}$$

ya que

$$f'(\alpha_i) = a_0 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\alpha_i - \alpha_j)$$

y

$$\Delta = a_0^{2(m-1)} \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

luego se tiene (7.1), si  $a_0 \neq 0$ . Siendo  $A_m^*$  y  $\Delta$  polinomios en  $a_0, a_1, \dots, a_m$  se deduce, por continuidad, que (7.1) es también válida para  $a_0 = 0$ .  $\neq$

TEOREMA 7.2. —  $A_{m-1}^*$  es idénticamente nulo.

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, si  $a_0 \neq 0$  y las raíces  $\alpha_i$  de  $f(x) = 0$  son simples se verifica

$$A^*_{m-1} = (-1) a_0^{m-2} [f'(\alpha_2) f'(\alpha_3) \dots f'(\alpha_m) + \\ + f'(\alpha_1) f'(\alpha_3) f'(\alpha_4) \dots f'(\alpha_m) + \dots + f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \dots f'(\alpha_{m-1})]$$

luego entonces

$$A^*_{m-1} = -A^*_m \sum_{i=1}^m \frac{1}{f'(\alpha_i)}.$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{f'(\alpha_i)} \frac{1}{\alpha - \alpha_i},$$

luego

$$(7.2) \quad 1 = \sum_{i=1}^m \frac{f(\alpha)}{\alpha - \alpha_i} \cdot \frac{1}{f'(\alpha_i)},$$

de donde, desarrollando, resulta

$$a_0 \sum_{i=1}^m \frac{1}{f'(\alpha_i)} = 0 \quad (m > 1),$$

por ser el primer miembro de esta igualdad el coeficiente del término en  $x^{m-1}$  de (7.2).

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{f'(\alpha_i)} = 0$$

y

$$A^*_{m-1} = -A^*_m \sum_{i=1}^m \frac{1}{f'(\alpha_i)} = 0$$

para todo  $a_0 \neq 0$  si las raíces  $\alpha_i$  de  $f(x) = 0$  son distintas, de donde, por continuidad, resulta  $A^*_{m-1} = 0$  cualesquiera que sean los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_m$  de  $f(x)$ , es decir,

$$(7.3) \quad A^*_{m-1} = 0,$$

como queríamos demostrar.  $\neq$

Como consecuencia inmediata de estos dos teoremas, se tiene

$$A_m = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0 A$$

$$A_{m-1} \equiv 0.$$

TEOREMA 7.3. —  $A_m^*$  se anula únicamente sobre la curva  $P(X, Y) = 0$ , envolvente de  $Q(x, \beta) = 0$ , sobre sus tangentes múltiples y de inflexión y sobre el eje  $OX$ .

DEMOSTRACIÓN. — Según el teorema 7.1  $A_m^*$  puede expresarse en la forma (7.1), lo cual implica que  $A_m^*$  se anula únicamente en aquellos puntos  $(X, Y)$  para los cuales  $f(x) = 0$  tiene raíces múltiples, lo que equivale a decir que entre las  $m$  tangentes que se pueden trazar por el punto a la curva hay algunas que tienen la misma intersección con  $OX$ , ya que dicha intersección viene dada por  $-1/x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), donde  $x_i$  son las raíces de  $f(x) = 0$ . Y es evidente que esto sólo sucede en los puntos arriba indicados.  $\neq$

Es de hacer notar que en ecuaciones de tipo totalmente hiperbólico, como son las que estamos estudiando, las tangentes de inflexión a la curva  $P(X, Y) = 0$  son imaginarias, en caso de que existan, como consecuencia del teorema 2.4.

COROLARIO 7.3.1. —  $A_m^*$  puede expresarse en la forma

$$(7.4) \quad A_m^* = k Y^p P^q r_1^{s_1} r_2^{s_2} \dots r_h^{s_h},$$

donde  $k$  es un número complejo distinto de cero,  $r_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) son las ecuaciones de las tangentes múltiples y de inflexión a  $P(X, Y) = 0$  y  $p, q, s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) son números naturales no nulos.

DEMOSTRACIÓN. — Es consecuencia inmediata del teorema anterior.  $\neq$

## 8. Puntos de ramificación de $J$ . Desarrollos en serie de PUISEUX.

TEOREMA 8.1. — Los puntos de ramificación de  $J$  están sobre la curva  $P = 0$  y sus tangentes múltiples y de inflexión.

DEMOSTRACIÓN. — Sustituamos  $\eta$  por su valor (5.8) en

$$\sum_{k=0}^m A_k \eta^{m-k} = 0.$$

Resulta así una ecuación de grado  $m$  en  $J$ :

$$(8.1) \quad \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} A_k Y^{(m-1)(m-k)} J^{m-k} = 0.$$

Recordemos que esta ecuación se ha obtenido eliminando  $\alpha$ ,  $\beta$  entre

$$(8.2) \quad \begin{cases} Q(\alpha, \beta) = 0 \\ \alpha X + \beta Y + 1 = 0 \end{cases}$$

y

$$J = X Q_\beta - Y Q_\alpha.$$

Observemos que  $J$  puede escribirse en la forma

$$J = \begin{vmatrix} Q_\beta & Q_\alpha \\ Y & X \end{vmatrix}$$

y, por tanto, coincide con el jacobiano de  $Q(\alpha, \beta)$  y  $\alpha X + \beta Y + 1$  respecto de  $\beta$ ,  $\alpha$ .

Entonces, si  $P(X_0, Y_0) \neq 0$  y  $\alpha_0 X + \beta_0 Y + 1 = 0$  es una tangente a  $P = 0$  que pasa por  $(X_0, Y_0)$  y no es múltiple ni de inflexión, se tiene

$$\begin{aligned} Q(\alpha_0, \beta_0) &= 0 \\ \alpha_0 X_0 + \beta_0 Y_0 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

y

$$J_0 = Q_{\beta_0} X_0 - Q_{\alpha_0} Y_0 \neq 0,$$

puesto que si fuere

$$Q_{\beta_0} X_0 - Q_{\alpha_0} Y_0 = 0,$$

siendo

$$|Q_{\alpha_0}| + |Q_{\beta_0}| \neq 0,$$

resultaría

$$(X_0, Y_0) = (Q_{\alpha_0}/Q_{\gamma_0}, Q_{\beta_0}/Q_{\gamma_0}) = (\xi_0, \eta_0)$$

y, por tanto,  $P(X_0, Y_0) = 0$ ,

De esto se deduce que las componentes  $\alpha$ ,  $\beta$  de la solución de (8.2) que toman los valores  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  en  $(X_0, Y_0)$  son funciones analíticas de  $(X, Y)$  en  $(X_0, Y_0)$  y, por consiguiente  $(X_0, Y_0)$  no es punto de ramificación de la correspondiente determinación de  $J$ .

Para estudiar el caso en que  $P(X_0, Y_0) \neq 0$  y  $\alpha_0 X + \beta_0 Y = 0$  sea una tangente a  $P = 0$  que pase por  $(X_0, Y_0)$  y no sea múltiple ni de inflexión, pasaremos a coordenadas homogéneas en (8.2). Así se obtiene

$$(8.3) \quad Q(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma^m Q\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0$$

$$\alpha X + \beta Y + \gamma = 0.$$

Es obvio que no pueden ser, simultáneamente,  $\alpha_0 = 0$  y  $\beta_0 = 0$ . Sea  $\beta_0 \neq 0$ ; entonces, el jacobiano de  $Q(\alpha, \beta_0, \gamma)$  y  $\alpha X_0 + \beta_0 Y_0 + \gamma$  respecto de  $\alpha$ ,  $\gamma$  es

$$(8.4) \quad \begin{vmatrix} Q_\alpha & Q_\gamma \\ X_0 & 1 \end{vmatrix} = -Q_\gamma X_0 + Q_\alpha \neq 0$$

en  $(\alpha, \gamma) = (\alpha_0, \gamma_0) = (\alpha_0, 0)$ , y, por tanto, las componentes  $\alpha$ ,  $\gamma$  de la solución de (8.3) para  $\beta = \beta_0$  que toman los valores  $\alpha_0$ ,  $\gamma_0$  en  $(X_0, Y_0)$  son funciones analíticas de  $(X, Y)$  en  $(X_0, Y_0)$  y, por consiguiente,  $(X_0, Y_0)$  no es punto de ramificación de la correspondiente determinación de

$$(8.5) \quad J = \frac{Q_\beta(\alpha, \beta_0, \gamma) X - Q_\alpha(\alpha, \beta_0, \gamma) Y}{\gamma^{m-1}}$$

Finalmente, observando que cuando  $\alpha_0 \neq 0$  se puede proceder de forma análoga, queda demostrado el teorema.  $\neq$

**COROLARIO 8.1.1.** — *Los puntos de ramificación de  $J$  verifican  $A_m^*(X, Y) = 0$  y, por tanto están entre los que anulan a  $a_0$  o a alguna determinación de  $J$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** — Es consecuencia inmediata del teorema anterior y del corolario 7.3.1.  $\neq$

Consideremos que la recta  $Y = 0$  sea tangente a la curva  $P(X, Y) = 0$  en  $h$  puntos distintos ( $h \geq 0$ ). Sean  $(X_i, 0)$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ )

los puntos de contacto, que serán todos finitos según el teorema 2.3. Entonces, en un entorno de  $(X_i, 0)$ , cada una de las ramas de la curva tangentes a  $Y = 0$  en ese punto admite un desarrollo en serie de PUISEUX de la forma

$$(8.6) \quad \eta = \sum_{k=\mu_i}^{\infty} b_{ik} (\xi - X_i)^{1+\frac{k}{v_i}} \quad (b_{i\mu_i} \neq 0),$$

donde  $\mu_i, v_i$  son, respectivamente, la clase y el orden de la rama. De la nota (2) se deduce que  $\mu_i = 1$ , por ser real la recta  $Y = 0$ .

TEOREMA 8.2. — Si la curva  $P(X, Y) = 0$  presenta  $\sigma$  ramas ( $\sigma \geq 0$ ) tangentes a  $OX$  en el origen, con los exponentes  $\tau_i = 1 + \frac{1}{v_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, \sigma$ ), y  $v$  es el exponente de  $Y$  en  $a_0$ , se verifican las siguientes relaciones

$$(8.7) \quad m \geq \mu + \sigma \geq 2\sigma$$

$$(8.8) \quad \mu \geq v = \sum_{i=1}^{\sigma} v_i \geq \sigma.$$

DEMOSTRACIÓN. — En primer lugar, observemos que desde un punto genérico del eje  $OX$  se pueden trazar exactamente  $\mu$  tangentes a la curva distintas de  $OX$ , ya que dando un valor arbitrario a  $\alpha$  en  $Q(\alpha, \beta) = 0$  resulta una ecuación de grado  $\mu$  en  $\beta$ .

Tomemos un punto  $(X_0, Y_0)$  ( $Y_0 \neq 0$ ) próximo al eje de las  $X$ . Desde él se pueden trazar  $m$  tangentes a la curva, entre las cuales hay una tangente a la rama  $i$ -ésima

$$(8.9) \quad \eta = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \xi^{1+\frac{k}{v_i}} \quad (b_{i1} \neq 0) \quad (i = 1, 2, \dots, \sigma)$$

en un punto próximo al origen, y otras  $\mu$  que, cuando  $Y_0 \rightarrow 0$ , tienden a las  $\mu$  tangentes diferentes de  $OX$  trazadas por  $(X_0, 0)$  a  $P = 0$ . Por tanto,  $m \geq \mu + \sigma$ .

Por otra parte, tomemos un punto  $(X_0, 0)$  con  $X_0$  próximo a 0. Entonces hay  $v_i$  de las  $\mu$  rectas tangentes a  $P = 0$  diferentes de  $OX$  trazadas por  $(X_0, 0)$  que son precisamente tangentes a la rama  $i$ -ésima (8.9), y, por consiguiente,

$$\mu \geq \sum_{i=1}^{\sigma} v_i.$$

Con este razonamiento resulta evidente que el número de tangentes que llegan a confundirse con  $OX$  cuando  $X_0 \rightarrow 0$  es

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \nu_i,$$

permaneciendo distintas de ese eje las restantes. Luego  $\nu$ , que es el exponente de  $Y$  en  $a_0$ , es

$$\nu = \sum_{i=1}^{\sigma} \nu_i.$$

Las demás desigualdades son inmediatas.  $\neq$

**TEOREMA 8.3.** — *Si la curva  $P(X, Y) = 0$  tiene  $\sigma$  ramas tangentes a  $OX$  en el origen, con los exponentes*

$$\tau_h = 1 + \frac{1}{\nu_h} \quad (\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_\sigma)$$

*de forma que cuando  $\tau_h = \tau_k$  se verifique  $b_{h1} \neq b_{k1}$ , y si los demás puntos de contacto de la curva con  $OX$  son todos distintos entre sí, presentando una sola rama en cada uno de ellos, entonces, si se numeran convenientemente las raíces  $\alpha_i$  de  $f(x) = 0$  y*

$$(8.10) \quad J_i = - \lim_{Y \rightarrow 0} \frac{f'(\alpha_i)}{Y^{\mu-1}} \quad (1 \leq i \leq m),$$

*se tiene*

$$(8.11) \quad J_i = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 \leq i \leq m - \mu \\ \neq 0, \infty & \text{si } m - \mu + 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

*cuando  $\mu > 1$ , y*

$$(8.12) \quad J_i = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 \leq i \leq \sigma \\ \neq 0, \infty & \text{si } \sigma + 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

*cuando  $\mu = 1$ , excepto en el caso  $m = 2$ ,  $\mu = \sigma = 1$ , en el cual*

$$(8.13) \quad J_i \neq 0, \infty \quad (1 \leq i \leq 2).$$

DEMOSTRACIÓN. — Sea (8.6) la ecuación de una rama tangente a  $OX$  en  $(X_i, 0)$ , ( $\mu_i = 1$ ). La tangente a la curva en el punto  $(\xi, \eta)$  es

$$Y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi} (X - \xi),$$

es decir

$$\begin{aligned} Y - \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} (\xi - X_i)^{1+\frac{k}{v_i}} \\ = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \left(1 + \frac{k}{v_i}\right) (\xi - X_i)^{\frac{k}{v_i}} (X - \xi), \end{aligned}$$

que, haciendo el cambio de  $\xi - X_i$  por  $\xi$  y simplificando después, queda

$$(8.14) \quad Y = \varphi'(\xi) (X - X_i) - \psi(\xi),$$

siendo

$$(8.15) \quad \varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \xi^{1+\frac{k}{v_i}}$$

$$(8.16) \quad \psi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{v_i} b_{ik} \xi^{1+\frac{k}{v_i}},$$

donde  $\varphi'(\xi)$  es la derivada de  $\varphi(\xi)$  con respecto a  $\xi$ .

Si  $(X_i, 0) = (0, 0)$ , de (8.14), (8.15) y (8.16) se deduce que

$$\xi = \left( \frac{Y}{b_{i1} \left(1 + \frac{1}{v_i}\right) X} \right)^{v_i} (1 + o(1)) \quad (\xi \rightarrow 0)$$

y al sustituir en

$$\alpha = - \frac{\varphi'(\xi)}{\psi(\xi)}$$

se obtiene

$$(8.17) \quad \alpha = - \left( \frac{b_{i1} \left(1 + \frac{1}{v_i}\right) X}{Y} \right)^{v_i} (v_i + 1)(1 + o(1)) \quad (\xi \rightarrow 0)$$

Si el punto de contacto  $(X_i, 0)$  no es el origen, es decir, si  $X_i \neq 0$ , entonces de (8.14) se sigue que

$$\alpha = -\frac{\varphi'(\xi)}{\psi(\xi) + X_i \varphi'(\xi)},$$

y de ahí

$$(8.18) \quad \alpha = -\frac{1}{X_i} (1 + o(1)) \quad (\xi \rightarrow 0).$$

Finalmente, los valores de  $\alpha$  correspondientes a las  $\mu$  tangentes distintas del eje  $OX$  que se pueden trazar desde un punto genérico  $(X, 0)$  de dicho eje a la curva coincidirán en ese punto. En un entorno de él los valores de  $\alpha$  vienen dados por

$$(8.19) \quad \alpha_k = -\frac{\beta_k Y + 1}{X},$$

donde los valores  $\beta_k$  son, en general, todos distintos en el punto considerado.

Como

$$f'(\alpha_i) = a_0 \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m (\alpha_i - \alpha_j),$$

veamos las distintas expresiones de  $\alpha_i - \alpha_j$  en puntos próximos al eje de las  $X$ , según (8.17), (8.18) y (8.19).

Si  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$  corresponden ambas a ramas de la curva tangente en el origen y  $\tau_i \leq \tau_j$ , su diferencia es

$$(8.20) \quad \alpha_i - \alpha_j = k_{ij} Y^{-\tau_i} (1 + o(1)) \quad (k_{ij} \neq 0, \xi \rightarrow 0).$$

Si  $\alpha_i$  corresponde a una de esas ramas y  $\alpha_j$  no, resulta igualmente

$$(8.21) \quad \alpha_i - \alpha_j = k_{ij} Y^{-\tau_i} (1 + o(1)) \quad (k_{ij} \neq 0, \xi \rightarrow 0).$$

Si  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$  corresponden a ramas de la curva tangentes a  $OX$  en puntos distintos del origen su diferencia es

$$(8.22) \quad \alpha_i - \alpha_j = k'_{ij} (1 + o(1)) \quad (k'_{ij} \neq 0, \xi \rightarrow 0).$$

Si corresponden a las tangentes que se pueden trazar desde el punto a la curva distintas de  $OX$  se verifica

$$(8.23) \quad \alpha_i - \alpha_j = k''_{ij} Y (1 + o(1)) \quad (k''_{ij} \neq 0, \xi \rightarrow 0),$$

según se deduce de (8.19).

Por último, si  $\alpha_j$  es una de estas últimas y  $\alpha_i$  corresponde a una rama tangente a  $OX$ , con punto de contacto distinto del origen

$$(8.24) \quad \alpha_i - \alpha_j = k'''_{ij} (1 + o(1)) \quad (k'''_{ij} \neq 0, \xi \rightarrow 0).$$

Numeraremos las  $\alpha_i$  de forma que  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \sigma$ ) corresponda a la rama  $i$ -ésima tangente a  $OX$  en el origen,  $\alpha_i$  ( $i = \sigma + 1, \sigma + 2, \dots, m - \mu$ ) a las ramas tangentes a  $OX$  en puntos distintos del origen, y  $\alpha_i$  ( $i = m - \mu + 1, \dots, m$ ) las restantes.

Entonces:

$$\begin{aligned} f'(\alpha_1) &= e^{0(1)} Y^{r-(m-1)r_1} \\ f'(\alpha_2) &= e^{0(1)} Y^{r-r_1-(m-2)r_2} \\ &\dots\dots\dots \\ f'(\alpha_\sigma) &= e^{0(1)} Y^{r-r_1-r_2-\dots-r_{\sigma-1}-(m-\sigma)r_\sigma} \\ f'(\alpha_{\sigma+1}) &= e^{0(1)} Y^{r-\sum_{i=1}^{\sigma} r_i} = e^{0(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ f'(\alpha_{m-\mu}) &= e^{0(1)} Y^{r-\sum_{i=1}^{\sigma} r_i} = e^{0(1)} \\ f'(\alpha_{m-\mu+1}) &= e^{0(1)} Y^{r-\sum_{i=1}^{\sigma} r_i+\mu-1} = e^{0(1)} Y^{\mu-1} \\ &\dots\dots\dots \\ f'(\alpha_m) &= e^{0(1)} Y^{r-\sum_{i=1}^{\sigma} r_i+\mu-1} = e^{0(1)} Y^{\mu-1}. \end{aligned}$$

Dividiendo  $-f'(\alpha_i)$  por  $Y^{\mu-1}$  y hallando después el límite, cuando  $Y \rightarrow 0$ , obtendremos el valor de  $J_i$  para un punto genérico de la recta  $Y = 0$ .

Supongamos  $\mu > 1$ . Si  $m > 2$  se tiene

$$\begin{aligned} v - v_1 - \dots - v_{i-1} - (m-1)v_i &\leq v - (m-1) \\ &\leq v - 2 < \mu - 1 \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, \dots, \sigma$ , puesto que  $\mu \geq v$  según (8.8) y, por tanto,  $J_i = \infty$  ( $i = 1, 2, \dots, \sigma$ ) para un punto genérico de  $Y = 0$ .

Si  $m = 2$  se verifica  $m = \mu$  luego  $\sigma = 0$ .

Es evidente que para  $i = \sigma + 1, \sigma + 2, \dots, m - \mu$  resulta, también para un punto genérico  $(X, O)$ ,  $J_i = \infty$ , por ser  $f'(x_i) = e^{0(1)}$  y  $\mu > 1$ .

Por último, cuando  $i = m - \mu + 1, \dots, m$ ,  $J_i$  es finita y no nula para un punto genérico  $(X, O)$ , por ser  $f'(x_i) = e^{0(1)} Y^{\mu-1}$ .

Si  $\mu = 1$ , exceptuando el caso  $m = 2$ ,  $\mu = \sigma = 1$ , la única diferencia con el caso anterior es que para  $i = \sigma + 1, \dots, m - \mu$  resulta  $J_i \neq 0, \infty$ , como es evidente, para un punto genérico de  $OX$ .

En el caso  $m = 2$ ,  $\mu = \sigma = 1$ ,  $J_1$  y  $J_2$  son ambas finitas y no nulas en un punto genérico de  $Y = 0$ , como es inmediato comprobar.

### 9. Estudio de los coeficientes $S_m$ y $S_0$ .

Consideremos la ecuación (8.1). Simplifiquémosla dividiendo por los factores comunes que existan en el primer miembro, y sea

$$(9.1) \quad \sum_{k=0}^m S_k(X, Y) J^{m-k} = 0$$

la ecuación que resulta. Nuestro objeto principal en esta sección va a ser el estudio de los coeficientes  $S_k$  y, en particular, de  $S_m$  y  $S_0$ .

Para comenzar volvamos por un momento a la ecuación

$$\sum_{k=0}^m A_k \eta^{m-k} = 0.$$

TEOREMA 9.1. — *La condición necesaria y suficiente para que la ecuación  $f(x) = 0$  tenga exactamente  $k$  raíces simples ( $k \leq m$ ) para valores de  $X, Y$  tales que  $a_0 \neq 0$  es que en*

$$R(X, Y, \eta) = \sum_{i=0}^m A_i \eta^{m-i}$$

se verifique:

$$(9.2) \quad A_m = A_{m-1} = \dots = A_{k+1} = 0, \quad A_k \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. — Conocemos ya la expresión de  $R$  en la forma

$$R = a_0^{m-1} \prod_{i=1}^m (f'(x_i) - \eta).$$

De ella se obtienen las siguientes expresiones de los coeficientes  $A_i$ :

$$\begin{aligned} A_m &= a_0^{m-1} \prod_{i=1}^m f'(x_i) \\ A_{m-1} &= (-1) a_0^{m-1} [f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_{m-1}) + \dots + \\ &\quad + \dots + f'(x_2) f'(x_3) \dots f'(x_m)] \\ \dots \dots \dots \\ (9.3) \quad A_k &= (-1)^{m-k} a_0^{m-1} [f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_k) + \dots + \\ &\quad + \dots + f'(x_{m-k+1}) f'(x_{m-k+2}) \dots f'(x_m)] \\ \dots \dots \dots \\ A_0 &= (-1)^m a_0^{m-1}. \end{aligned}$$

Supongamos que  $f(x) = 0$  tiene únicamente raíces simples. Como es sabido,  $f'(x_j)$  es distinto de cero cuando  $x_j$  es una de las raíces simples de  $f(x) = 0$  y es cero cuando  $x_j$  es una de las múltiples y, por tanto,  $f'(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) es nulo para  $m-k$  valores de  $i$  y no nulo para los  $k$  restantes.

Luego, observando las expresiones (9.3) de los  $A_i$ , resulta que en  $A_m, A_{m-1}, \dots, A_{k+1}$  todos los sumandos que aparecen son nulos por tener algún factor nulo, pero no sucede así con  $A_k$ , en el cual son nulos todos los sumandos menos uno, luego se verifica (9.2).

Recíprocamente, si se verifica (9.2) hay exactamente  $k$  raíces simples en  $f(x) = 0$ , puesto que si hubiera  $k' \neq k$ , según lo anterior se verificaría

$$A_m = A_{m-1} = \dots = A_{k'+1} = 0, \quad A_{k'} \neq 0, \quad k' \neq k,$$

lo cual es contradictorio con (9.2).  $\neq$

COROLARIO 9.1.1. — Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación  $f(x) = 0$  tenga exactamente  $k$  raíces simples ( $k \leq m$ ) para valores de  $X, Y$  que no anulen idénticamente a  $R^*(X, Y, \eta)$  es que

$$(9.4) \quad A^*_m = A^*_{m-1} = \dots = A^*_{k+1} = 0, \quad A^*_k \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. — Si  $a_0 \neq 0$  se verifica, por el teorema anterior, y si  $a_0 = 0$  y  $a_1 \neq 0$  también, porque basta seguir un proceso análogo al efectuado en ese teorema partiendo de la forma (6.6) que adopta  $R^*$  en este caso.  $\neq$

Volviendo a la ecuación (9.1) se tiene:

TEOREMA 9.2. — En las condiciones del teorema 8.3, se puede asegurar que  $Y$  no aparece como factor en  $S_m(X, Y)$ .

DEMOSTRACIÓN. — Del teorema 8.3 se deduce:

$$\lim_{Y \rightarrow 0} \frac{A_m(X, Y)}{A_i(X, Y)} \neq 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m).$$

luego, llamando  $p$  al exponente de  $Y$  en  $A_m$ , la ecuación (8.1) se puede simplificar, dividiendo por  $Y^p$ .  $\neq$

TEOREMA 9.3. — Sea  $P(X, Y) = 0$  una curva con las condiciones del teorema 8.3,  $(X, Y)$ , un punto del plano y  $r_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, h \leq m$ ) las  $h$  tangentes distintas que se pueden trazar por él a  $P = 0$ . Suponemos que las rectas  $r_i = 0$  que pasan por el origen no son tangentes múltiples ni de inflexión a la curva. Sea  $\mu'_{ij}$  la clase de una rama cualquiera de  $P = 0$  tangente a  $r_i = 0$  en un punto distinto de  $(X, Y)$  y  $\mu_{il}, r_{il}$  la clase y el orden, respectivamente, de una rama cualquiera de  $P = 0$  tangente a  $r_i = 0$  en  $(X, Y)$ .

Y sean

$$(9.5) \quad q'_i = \sum_j \mu'_{ij} + \sum_l (\mu_{il} + r_{il}) \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

$$(9.6) \quad e_i = \begin{cases} q'_i & \text{si } q'_i \geq 2 \\ 0 & \text{si } q'_i < 2 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Entonces una condición necesaria y suficiente para que  $(X, Y)$  verifique

$$S_m(X, Y) = 0, S_{m-1}(X, Y) = 0, \dots, S_{k+1}(X, Y) = 0, \\ S_k(X, Y) \neq 0$$

es

$$(9.7) \quad \sum_{i=1}^h \varrho_i = m - k.$$

DEMOSTRACIÓN. — El número de tangentes a la curva trazadas desde  $(X, Y)$  que coinciden en  $r_i = 0$  es  $\varrho_i'$ , dado por (9.5).

Entonces, como ninguna recta  $r_i = 0$  es una tangente múltiple o de inflexión que pase por el origen,  $a_0(X, Y)$  y  $a_1(X, Y)$  no se anulan simultáneamente, y según el corolario 9.1.1 resulta (9.7).  $\neq$

TEOREMA 9.4. — Sean  $r_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, j$ ) las ecuaciones de las tangentes distintas de  $OX$  trazadas desde el origen a la curva  $P = 0$ . Entonces  $S_0$  puede expresarse en la forma:

$$(9.8) \quad S_0 = k Y^t r_1^{s_1}, \dots, r_j^{s_j}$$

donde  $k$  es una constante no nula y  $t$  y  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, j$ ) son enteros no negativos, verificándose  $s_i > 0$  si  $r_i = 0$  no es tangente múltiple ni de inflexión a la curva  $P = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. — Que en  $S_0$  no pueden figurar más que estos factores es claro, así como que  $k \neq 0$  y que  $t$  y  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, j$ ) son enteros no negativos. Que  $s_i > 0$  si  $r_i = 0$  es una tangente simple a la curva es cierto también, porque  $r_i$  figura como factor en  $A^*_0$  y no en  $A^*_{m-1}$ .

Si una recta  $t$  es tangente múltiple o de inflexión a la curva  $P = 0$  y no pasa por el origen, el exponente de  $t$  en  $S_m$  es el mismo que en  $A^*_m$ , ya que  $t$  no figura como factor en  $a_0$ .

TEOREMA 9.5. — El exponente de  $P(X, Y)$  en  $S_m$  es 1.

DEMOSTRACIÓN. — En un punto genérico  $(\xi, \eta)$  de la curva  $P = 0$  se verifica:

$$S_m(\xi, \eta) = 0, \quad S_{m-2}(\xi, \eta) = 0,$$

ya que  $a_0 \neq 0$  y en la ecuación  $f(x) = 0$  hay, para  $(X, Y) = (\xi, \eta)$  una raíz doble y las demás simples, según se ve inmediatamente.

Entonces, por continuidad, existe un entorno de  $(\xi, \eta)$  tal que en él  $S_{m-2}$  no se anula.

Luego, despejando  $P$  en (9.1) se tiene, para  $J \rightarrow 0$ ,

$$(9.9) \quad P(X, Y) = K(X, Y) J^{2/q} + o(J^{2/q})$$

en un entorno de  $(\xi, \eta)$  siendo  $K(X, Y) \neq 0$  en ese entorno y  $q$  el exponente de  $P$  en  $S_m$ .

Es obvio que el sistema formado por

$$\begin{aligned} \alpha X + \beta Y + 1 &= 0 \\ Q(\alpha, \beta) &= 0 \\ X Q_\beta - Y Q_\alpha - J &= 0 \end{aligned}$$

es equivalente al

$$(9.10) \quad \begin{aligned} Q(\alpha, \beta) &= 0 \\ (\alpha Q_\alpha + \beta Q_\beta) X + Q_\alpha - \beta J &= 0 \\ (\alpha Q_\alpha + \beta Q_\beta) Y + Q_\beta + \alpha J &= 0 \end{aligned}$$

cuando  $\alpha Q_\alpha + \beta Q_\beta \neq 0$ .

Homogeneicemos  $Q(\alpha, \beta) = 0$ :

$$Q(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma^m Q\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0.$$

Entonces, por el teorema de EULER, resulta

$$\begin{aligned} \alpha Q_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) + \beta Q_\beta(\alpha, \beta, \gamma) + \gamma Q_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) &= \\ = m Q(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \end{aligned}$$

y, en particular,

$$(9.11) \quad \alpha Q_\alpha + \beta Q_\beta + Q = 0 \quad (4)$$

para  $\gamma = 1$ .

---

(4) Es de observar que con  $Q_\alpha$  denotamos  $Q_\alpha(\alpha, \beta, 1) = Q_\alpha(\alpha, \beta)$  y análogamente con  $Q_\beta$  y  $Q_\gamma$ .

Por tanto, (9.10) puede escribirse

$$\begin{aligned} Q(x, \beta) &= 0 \\ -Q_\gamma X + Q_x - \beta J &= 0 \\ -Q_\gamma Y + Q_\beta + \alpha J &= 0, \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\frac{X - \frac{Q_x}{Q_\gamma}}{-\beta} = \frac{Y - \frac{Q_\beta}{Q_\gamma}}{\alpha} = \frac{J}{Q_\gamma},$$

por lo que, llamando

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Q_x}{Q_\gamma} = -\frac{Q_x}{\alpha Q_x + \beta Q_\beta} \\ \eta &= \frac{Q_\beta}{Q_\gamma} = -\frac{Q_\beta}{\alpha Q_x + \beta Q_\beta} \end{aligned} \quad (9.12)$$

resulta

$$\frac{X - \xi}{-\beta} = \frac{Y - \eta}{\alpha} = \frac{J}{Q_\gamma} \quad (9.13)$$

cuando  $Q_\gamma = -(\alpha Q_x + \beta Q_\beta) \neq 0$ .

El punto  $(\xi, \eta)$  dado por (9.12) es un punto de la curva  $P = 0$ , evidentemente, y por tanto

$$\alpha(X - \xi) + \beta(Y - \eta) = 0$$

es la ecuación de la tangente a dicha curva cuyo punto de contacto es  $(\xi, \eta)$ . Teniendo en cuenta (9.13), en los puntos de un entorno de  $(\xi, \eta)$  situados sobre esa tangente se verifica

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= P\left(\xi - \frac{\beta J}{Q_\gamma}, \eta + \frac{\alpha J}{Q_\gamma}\right) \\ &= P_\xi(\xi, \eta) - \frac{\beta J}{Q_\gamma} P_\xi(\xi, \eta) + \frac{\alpha J}{Q_\gamma} P_\eta(\xi, \eta) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{J^2}{2Q_\gamma^2} (\beta^2 P_{\xi\xi} - 2\alpha\beta P_{\xi\eta} + \alpha^2 P_{\eta\eta}) + o(J^2),$$

donde

$$\alpha P_\eta - \beta P_\xi = 0,$$

ya que las coordenadas  $(\alpha, \beta)$  de la tangente en  $(\xi, \eta)$  son, por dualidad de (9.12),

$$\alpha = -\frac{P_\xi}{\xi P_\xi + \eta P_\eta} \quad \beta = -\frac{P_\eta}{\xi P_\xi + \eta P_\eta}$$

Como además

$$P(\xi, \eta) = 0,$$

se tiene

$$(9.14) \quad P(X, Y) = \frac{J^2}{2Q_\gamma^2} (\beta^2 P_{\xi\xi} - 2\alpha\beta P_{\xi\eta} + \alpha^2 P_{\eta\eta}) + o(J^2),$$

luego de la igualdad de (9.9) y (9.14) se deduce que ha de ser  $q = 1$ , puesto que si no tendría que verificarse  $K(X, Y) = 0$ .  $\neq$

### CAPÍTULO III

#### PROPIEDADES GLOBALES DE LAS DETERMINACIONES $J_r$ DE $J$

##### 10. Individualización de las determinaciones $J_r$ de $J$ .

Las determinaciones  $J_r$  de  $J$  no quedan individualizadas hasta que no se definen las correspondientes hojas en la superficie de RIEMANN de  $J_Y(X) = J(X, Y)$ , mediante adecuados cortes que haremos variar continuamente al variar  $Y$ .

Es evidente que estos cortes no deben influir en el cálculo de  $u$  en los puntos  $(x, y, z)$  en los que esta solución esté unívocamente determinada. Por tanto, los podemos elegir arbitrariamente.

Para un valor genérico de  $Y$ ,  $Y = Y^*$ , los puntos singulares de  $1/J$  son los puntos de intersección de  $Y = Y^*$  con la curva  $P = 0$  y los de intersección de  $Y = Y^*$  con las tangentes múltiples y de inflexión de  $P = 0$ .

Como el punto  $X = \infty$  no es punto de ramificación de  $J$  para ningún valor de  $Y$ , y para  $X$  real y suficientemente grande todas las determinaciones de  $J$  son reales, mediante los cortes simétricos respecto al eje real que indicaremos se logra que

$$(10.1) \quad \bar{J}_r(X, Y) = J_r(\bar{X}, Y)$$

para toda  $Y$  real.

Como para cada  $Y = Y^*$  (real) los puntos singulares reales de  $1/J$  forman un conjunto acotado, efectuaremos un corte a través de todos ellos.

Supongamos que sobre la recta  $Y = Y^*$  no hay puntos de retroceso de  $P = 0$ . Entonces, si un punto imaginario es punto de ramificación de  $J$ , efectuaremos un corte desde él a su conjugado, que, evidentemente, también es punto de ramificación de  $J$ . Este corte lo tomaremos simétrico respecto al eje real, por conveniencia, como ya hemos dicho.

Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos puntos reales tales que los valores que toma  $J_r$  en los bordes superior e inferior del corte  $P_1 P_2$  coinciden, respectivamente, con los que toma  $J_s$  en los bordes inferior y superior

de dicho corte. Entonces, de  $P_1$  a  $P_2$ , uniremos el borde superior (resp. inferior) del corte de  $J_r$  con el borde inferior (resp. superior) del corte de  $J_s$ .

Si los valores que toma una determinación  $J_r$  en el borde superior de  $P_1P_2$  coinciden con los que toma en el borde inferior, se unen ambos bordes entre sí a lo largo de  $P_1P_2$ .

Si un punto  $A$  es punto imaginario de ramificación de  $J$  de orden  $p - 1$ , el punto conjugado  $\bar{A}$  lo es también, permutándose en él las mismas determinaciones de  $J$  que en  $A$ , ya que se verifica (10.1). Si a lo largo del corte  $A\bar{A}$  los valores que toma una determinación  $J_{r_1}$  en el borde de la izquierda coinciden con los valores de otra,  $J_{r_2}$ , en el borde de la derecha, se unen dichos bordes, y se prosigue de manera análoga hasta llegar a una determinación  $J_{r_p}$  de  $J$  en la cual sus valores en el borde de la izquierda coinciden con los que toma  $J_{r_1}$  en el borde de la derecha, por lo cual uniremos dichos bordes. Para evitar algunas dificultades que pudieran aparecer, tomaremos siempre el corte  $A\bar{A}$  de forma que no pase por ningún otro punto de ramificación imaginario ni por ningún punto real de  $P = 0$  que presente alguna característica especial, como ser punto de retroceso, punto de contacto de una tangente múltiple o paralela a  $OX$ , etc.

Si los valores que toma una determinación  $J_s$  de  $J$  a lo largo del borde derecho del corte  $A\bar{A}$  coinciden con los que toma la misma  $J_s$  en el borde izquierdo de  $A\bar{A}$ , se unen estos bordes entre sí.

Llamamos *traza* (de los cortes  $A\bar{A}$ ) a la línea lugar geométrico de los puntos de intersección de los cortes  $A\bar{A}$  con el eje real del plano complejo  $X$  cuando  $Y = Y^*$  varía. Entonces al atravesar la traza se permutarán dos o varias determinaciones  $J_r$  de  $J$ . Por la forma en que hemos tomado los cortes, esta traza no pasará por ningún punto de retroceso ni tampoco por ningún punto real de  $P = 0$  que presente alguna de las características especiales indicadas antes, en el que no se anulen las determinaciones de  $J$  que se permutan en un entorno de dicho punto en la traza.

Del teorema 9.5 se deduce que un punto genérico de la curva  $P(X, Y) = 0$  es punto de ramificación de primer orden, permutándose en él, por tanto, dos determinaciones de  $J$ .

Mediante el teorema 9.3 podemos hallar el número de determinaciones de  $J$  que se anulan sobre los puntos del plano  $XY$ .

Y mediante desarrollos en serie de PUISEUX y razonamientos análogos al de la demostración del teorema 8.3 puede efectuarse

un estudio del comportamiento local de la función  $1/J$  en un entorno de sus puntos singulares.

Como sabemos, por la definición de ecuaciones totalmente hiperbólicas, la curva  $P = 0$  tiene  $m$  tangentes reales paralelas a  $OX$ . Aunque eventualmente pueden coincidir algunas de ellas, en este capítulo las supondremos distintas y con punto de contacto ordinario, mientras no se diga lo contrario<sup>(5)</sup>. Entonces cada determinación  $J_r$  queda unívocamente fijada por la tangente  $Y = Y_r$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ), en donde

$$J_r = Q_{\beta_r}(X - X_r),$$

siendo

$$Q_{\beta_r} = Q_{\beta}(0, \beta_r(0)).$$

Tomemos un punto  $(X_r, Y_r)$  tal que la tangente a  $P = 0$  en él sea  $Y = Y_r$ . Supongamos, para fijar ideas, que la concavidad de la rama está dirigida hacia abajo. Por ser el punto  $(X_r, Y_r)$  un punto de la curva  $P = 0$  existe otra determinación de  $J$  que se anula en él y que vamos a llamar  $J_s$ .

Por otra parte, sabemos que un punto de la curva  $P = 0$  próximo a  $(X_r, Y_r)$  es punto de ramificación de  $J$  de primer orden y, por continuidad, se deduce que, puesto que las determinaciones de  $J$  que se permutan en dicho punto han de anularse en él, estas determinaciones son  $J_r$  y  $J_s$ . Sea  $Y = Y^*$  (fig. 1) una recta próxima a  $Y = Y_r$ ,

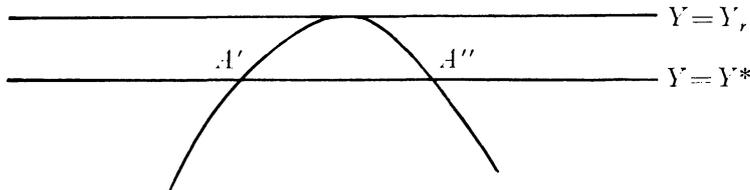


Fig. 1

con  $Y^* < Y_r$ .

Sean  $A'$  y  $A''$  los puntos de intersección de  $Y = Y^*$  con la curva  $P(X, Y) = 0$  que provienen por continuidad de  $(X_r, Y_r)$  cuando

<sup>(5)</sup> Esta restricción no tiene gran importancia porque se puede eliminar por consideraciones de continuidad en los coeficientes de la ecuación, según indicaremos.

nos desplazamos de  $Y = Y_r$  a  $Y = Y^*$  y sean  $X'_r, X''_r$  las abscisas de  $A'$  y  $A''$  respectivamente. En los puntos de  $Y = Y^*$  próximos a  $A'$  y con abscisa menor que  $X'_r$  las determinaciones  $J_r$  y  $J_s$  son reales, puesto que corresponden a las tangentes reales a la curva que tienden a confundirse en la tangente cuyo punto de contacto con  $P = 0$  es  $A'$ . De estas consideraciones se deduce que la expresión de  $J_r$  en un entorno de  $A'$  es

$$(10.2) \quad J_r = \sum_{k=h}^{\infty} c'_k (X'_r - X)^{k/2},$$

con los coeficientes  $c'_k$  reales.

Análogamente, en un entorno de  $A''$  admite la expresión

$$(10.3) \quad J_r = \sum_{k=h}^{\infty} c''_k (X - X''_r)^{k/2},$$

con los coeficientes  $c''_k$  reales.

Por tanto, en la recta  $Y = Y^*$ , próxima a  $Y = Y_r$ , y en puntos próximos a  $A'$ ,  $J_r$  es real para los puntos situados a la izquierda de  $A'$ , es decir, en la parte convexa de la curva, e imaginaria para los situados a la derecha de  $A'$ . Por el teorema 11.1, que demostraremos en el párrafo siguiente, sigue siendo imaginaria para puntos situados entre  $A'$  y  $A''$  y, de acuerdo con (10.3), vuelve a ser real a partir de  $A''$ .

$J_r$  no presenta más puntos de ramificación sobre  $Y = Y^*$ , ya que tendrían que provenir, por continuidad, de un punto sobre  $Y = Y_r$ , en el que se anularía  $J_r$ , y sobre dicha recta  $J_r$  no se anula más que en  $(X_r, Y_r)$ , como se deduce de su expresión

$$J_r = Q_{\beta_r}(X - X_r) \quad (Y = Y_r).$$

De igual manera se podría considerar el caso en que la concavidad de la curva estuviera dirigida hacia arriba, obteniéndose análogos resultados.

### 11. *Carácter real o imaginario de una determinación.*

Tomemos un punto real ordinario  $A$  de intersección de  $P = 0$  con una recta real cualquiera  $Y = Y^*$ . Supongamos, para fijar ideas,

que la parte convexa de la curva corresponde a la izquierda de  $A$  (fig. 2). Al desplazarnos de izquierda a derecha sobre la recta  $Y = Y^*$

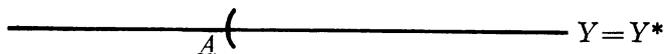


Fig. 2

en un entorno de  $A$ , hay dos tangentes que tienden a confundirse en una sola, cuyo punto de contacto es  $A$ , y que corresponden a las dos determinaciones de  $J$  que se anulan en  $A$ . Entonces estas determinaciones admiten un desarrollo en serie con coeficientes reales de la forma (10.2) en un entorno de  $A$ , luego ellas son reales a la izquierda de  $A$  e imaginarias a la derecha de  $A$  en un entorno de este punto.

De manera análoga, si la parte convexa de la curva corresponde a la derecha de  $A$ , las determinaciones de  $J$  que se anulan en  $A$  son reales a la derecha de  $A$  e imaginarias a la izquierda, en un entorno de este punto.

**TEOREMA 11.1.** — Sea  $\Omega_0$  una región del plano  $X Y$  limitada por los arcos de  $P = 0$  donde se anula  $J_r$  y por los arcos de la traza en los que se permuta  $J_r$  con otra determinación de  $J$ . Entonces se verifica necesariamente una de las siguientes propiedades:

a)  $J_r$  es real en todo punto  $(X, Y)$  de  $\Omega_0$ .

b)  $J_r$  es imaginaria en los puntos de  $\Omega_0$  no situados sobre la curva algebraica  $S(X, Y) = 0$ , lugar de los puntos en los que existen dos determinaciones de  $J$  que toman el mismo valor distinto de cero.

Si  $(\alpha, \beta)$  es la recta  $t$  asociada a  $J_r$  mediante

$$(11.1) \quad J_r = X Q_\beta - Y Q_\alpha,$$

$t$  es real en el caso a) e imaginaria en el b) para todo punto  $(X, Y) \in \Omega_0$ <sup>(6)</sup>.

**DEMOSTRACIÓN.** — La región considerada,  $\Omega_0$ , queda dividida por la curva  $S(X, Y) = 0$  en subregiones. Hagamos la demostración del teorema por reducción al absurdo. Sea  $\Omega$  una subregión

<sup>(6)</sup> Este resultado es válido aunque algunas de las tangentes  $Y = Y_r$  coincidan o alguno de sus puntos de contacto sea de retroceso.

y  $A$  y  $B$  dos puntos de ella tales que la determinación  $J_r$  es real en  $A$  e imaginaria en  $B$ . Supongamos que el segmento  $AB$  está contenido en  $\Omega$ . Entonces existe un punto  $H$  de ese segmento tal que en  $AH$   $J_r$  es real y  $H$  es punto de acumulación de puntos  $H'$  de  $HB$  tales que en ellos  $J_r$  es imaginaria.

Sea  $J_s$  la determinación de  $J$  tal que

$$J_s(H') = \bar{J}_r(H').$$

Por continuidad se deduce que

$$\begin{aligned} \lim_{H' \rightarrow H} J_r(H') &= J_r(H) \\ J_s(H) &= \lim_{H' \rightarrow H} J_s(H') \\ &= \lim_{H' \rightarrow H} \bar{J}_r(H') = \bar{J}_r(H), \end{aligned}$$

luego  $J_s(H) = J_r(H)$ , por ser  $J_r(H)$  real.

Por tanto,  $H$  tendría que ser punto de ramificación de  $J$ , o tendría que pertenecer a un arco de la traza en el que se permuta  $J_r$ , o a la curva  $S(X, Y) = 0$ , lo cual va en contradicción con nuestras hipótesis.

Si el segmento  $AB$  no está contenido en  $\Omega$ , los puntos  $A, B$  pueden unirse mediante una poligonal contenida en  $\Omega$ , luego habrá un segmento de ella en el que en uno de sus extremos  $J_r$  sería real y en el otro imaginaria, lo cual es absurdo por lo anterior.

Sean ahora  $\Omega'$  y  $\Omega''$  dos subregiones contiguas de una misma región  $\Omega_0$ , y supongamos que  $J_r$  es real en  $\Omega'$  e imaginaria en  $\Omega''$ . Tomando un punto  $A$  de  $\Omega'$  y otro  $B$  de  $\Omega''$  tales que el segmento  $AB$  sólo corte a la curva  $S(X, Y) = 0$  en un punto, este punto sería el  $H$  del caso anterior. En él no podría ser  $J_r$  analítica, porque, si lo fuera, su desarrollo en serie en un entorno de  $H$  tendría coeficientes reales, por ser  $J_r$  real en  $\Omega'$ , luego  $H$  no podría ser punto de acumulación de puntos en los que  $J_r$  es imaginaria. Por tanto  $H$  no pertenecería a  $S(X, Y) = 0$ , lo cual es absurdo.

Entonces, si hay una subregión  $\Omega'$  de  $\Omega_0$  en donde  $J_r$  sea real, lo será en toda la región  $\Omega_0$ , con lo que, por exclusión, queda completamente demostrada la primera parte del teorema.

Veamos ahora la segunda. Sea  $(X_0, Y_0)$  un punto de la región  $\Omega_0$

tal que  $S(X_0, Y_0) \neq 0$ . Supongamos que en  $\Omega_0$   $J_r$  es real, es decir, el caso a) y que en  $(X_0, Y_0)$  la recta  $t$  es imaginaria. Entonces también  $\bar{t}$  estaría asociada a  $J_r$ , puesto que

$$(11.2) \quad \begin{aligned} J_r(X_0, Y_0) &= \bar{J}_r(X_0, Y_0) \\ &= X_0 Q_\beta(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) - Y_0 Q_\alpha(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \end{aligned}$$

y, por tanto, se verificaría que  $S(X_0, Y_0) = 0$  contra la hipótesis.

Si  $(X_0, Y_0)$  es un punto de  $\Omega_0$  en el que  $S(X, Y) = 0$ , por paso al límite del caso anterior resulta que  $t$  debe ser real también.

Tomemos ahora una región  $\Omega_0$  en la que  $J_r$  sea imaginaria en los puntos no situados sobre  $S(X, Y) = 0$ , y sea  $(X_0, Y_0)$  un punto de  $\Omega_0$  para el que la recta  $t$  es real. Entonces, como

$$X Q_\beta - Y Q_\alpha = J_r \neq 0$$

es el jacobiano del sistema

$$(11.3) \quad \alpha X + \beta Y + 1 = 0$$

$$Q(\alpha, \beta) = 0$$

respecto de  $\alpha, \beta$ , se deduce que  $\alpha$  y  $\beta$  son funciones reales de  $X, Y$  en un entorno del punto dado  $(X_0, Y_0)$ , por lo cual  $J_r$  es una función real de  $X, Y$  en ese entorno, contra nuestra hipótesis.  $\neq$

## 12. Influencia de los puntos de ramificación de $J$ imaginarios en el cálculo de la solución.

En (4.43) figura una curva  $C_1$ , orientada en sentido positivo, que hay que determinar para efectuar la integración y hallar el valor de  $u$ . Esta curva  $C_1$ , fija para todo valor de  $Y$ , debe contener en su interior a todos los puntos singulares de  $1/J$ , y en su exterior a los singulares de  $W(X, Y)$ . Teniendo siempre esto en cuenta, podemos deformarla continuamente para cada valor de  $Y$  sin atravesar ninguno de dichos puntos singulares, de manera que en el término  $r$ -ésimo ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) de (4.43), y para  $Y = Y^*$ , esté formada por los bordes de los cortes que presenta la determinación  $J_r$  de  $J$ , y por cir-

cunferencias de radio arbitrariamente pequeño <sup>(7)</sup> y centro  $(X_i, Y^*)$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) si estos puntos son polos de  $\frac{1}{J_r}$ .

TEOREMA 12.1. — *En el cálculo de  $u$  mediante (4.43) puede prescindirse de los puntos imaginarios que son puntos de ramificación de  $J$ .* <sup>(6)</sup>

DEMOSTRACIÓN. — Para demostrar el teorema, dada la ecuación (3.1) vamos a tomar una función  $f(x, y, z)$  adecuada. Sea  $(x_1, y_1, z_1)$ , un punto no perteneciente a la superficie  $\Gamma$  (3.3) y suficientemente próximo a ella de modo que el valor  $u(x_1, y_1, z_1)$ , de la solución del problema de CAUCHY (con condiciones iniciales nulas) quede unívocamente determinado por el segundo miembro,  $f$ , de la ecuación propuesta, lo cual se puede conseguir por no ser la superficie  $\Gamma: z = \varphi(x, y)$  una superficie característica.

Sea

$$(12.1) \quad \begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x, y) \\ &= \sum_{h,k} (-1)^{h+k} a_{hk} (x - x_1)^h (y - y_1)^k \end{aligned}$$

en un entorno de  $(x_1, y_1)$  y  $z_0 = z_0(X, Y)$  la función analítica de  $X, Y$  en  $(0, 0)$  determinada por

$$(12.2) \quad \varphi(x_1 + X(z_1 - z_0), y_1 + Y(z_1 - z_0)) = z_0.$$

Entonces,

$$(12.3) \quad f_2(x, y, z) = f(x, y) \frac{(z - \varphi)^{m-2}}{(m-2)!},$$

donde  $\varphi = \varphi(x, y)$ , y, por tanto,

$$(12.4) \quad W(X, Y) = \int_{z_0}^{z_1} \frac{(z_1 - \zeta)(\zeta - \varphi_1)^{m-2}}{(m-2)!} f(x_1 + X(\zeta - z_1), y_1 + Y(\zeta - z_1)) d\zeta$$

donde  $\varphi_1 = \varphi(x_1, y_1)$ .

---

<sup>(7)</sup> Sin un análisis previo no se puede hacer tender a cero el radio de estas circunferencias, ya que no se puede asegurar que las correspondientes integrales sobre ellas tienden a cero.

Por un cambio de variable resulta

$$(12.5) \quad W(X, Y) = \int_0^{z_1 - z_0} \frac{(z_1 - \varphi_1 - \zeta)^{m-2}}{(m-2)!} f(x_1 - X\zeta, y_1 - Y\zeta) d\zeta,$$

luego para  $X, Y$  suficientemente pequeños se tiene

$$(12.6) \quad W(X, Y) = \sum_{h,k} a_{hk} X^h Y^k \int_0^{z_1 - z_0} \frac{\zeta^{h+k+1} (z_1 - \varphi_1 - \zeta)^{m-2}}{(m-2)!} d\zeta \\ = \sum_{h,k} c_{hk} X^h Y^k.$$

Por tanto, como

$$c_{hk} = \frac{a_{hk}}{(m-2)!} \int_0^{z_1 - \varphi_1} \frac{\zeta^{h+k+1} (z_1 - \varphi_1 - \zeta)^{m-2}}{(m-2)!} d\zeta + L_{hk} \\ = \frac{(z_1 - \varphi_1)^{m-k+h}}{(m-2)!} B(h+k+2, m-1) a_{hk} + L_{hk} \\ = \frac{(h+k+1)!}{(h+k+m)!} (z_1 - \varphi_1)^{m+h+k} a_{hk} + L_{hk},$$

donde  $L_{hk}$  es una función lineal

$$\sum_{p,q} c_{hk}^{pq} a_{pq}$$

de los coeficientes  $a_{pq}$  de índices

$$p \leq h, \quad q \leq k, \quad p + q < h + k,$$

que se anula idénticamente cuando  $\varphi$  es constante, se deduce que, cualquiera que sea la función analítica

$$\sum_{h,k} c_{hk} X^h Y^k$$

en  $(0, 0)$  se pueden determinar por recurrencia los coeficientes  $a_{hk}$ , puesto que

$$z_1 - \varphi_1 = z_1 - \varphi(X_1, y_1) \neq 0,$$

de modo que, en el caso  $\varphi$  constante, la serie

$$\sum_{h,k} (-1)^{h+k} a_{hk} X^h Y^k$$

define una función analítica,  $f$ , en  $(0, 0)$ , por ser

$$a_{hk} = \frac{(h+k+m)!}{(h+k+1)!} \cdot \frac{c_{hk}}{(z_1 - \varphi_1)^{h+k+m}} \quad (8)$$

Entonces se puede tomar

$$(12.7) \quad W(X, Y) = \frac{\psi(Y)}{X - \lambda},$$

donde  $\psi(Y)$  es una función analítica de  $Y$  y  $\lambda$  es imaginaria.

El punto  $(\lambda, Y)$  debe pertenecer al exterior de  $C_1$  en (4.43), según se ha indicado al principio de este § 12.

Supongamos que para  $Y = Y^*$   $J$  presenta dos puntos de ramificación imaginarios conjugados, los puntos  $B(Y^*)$ ,  $\bar{B}(Y^*)$ . Entonces existe un intervalo  $(Y', Y'')$  en el cual  $J$  presenta, para cada valor de  $Y$ , dos puntos de ramificación imaginarios conjugados  $B(Y)$ ,  $\bar{B}(Y)$ , que se deducen, por continuidad, de los anteriores.

Fijemos un valor de  $\lambda$  próximo al corte  $B(Y^*) \bar{B}(Y^*)$ , tal que  $(\lambda, Y)$  no sea punto de ramificación de  $J$  para  $Y$  perteneciente a  $(Y', Y'')$ . En la curva  $C_1$ , para  $Y' < Y < Y''$  existe una parte, que es el corte  $B(Y) \bar{B}(Y)$  recorrido en los dos sentidos. Este corte lo vamos a tomar de dos formas distintas, dejando el resto de la curva  $C_1$  invariable: una de ellas, la que llamaremos  $C'_1$ , de modo que el punto  $\lambda$  quede, para  $Y$  perteneciente a  $(Y', Y'')$ , a la izquierda del borde izquierdo del corte y próximo a ese borde, y otra, que llamaremos  $C''_1$ , de modo que  $\lambda$  quede, para los mismos valores de  $Y$ , a la derecha del borde derecho del corte y próximo a dicho borde, todo ello con el fin de que  $\lambda$  sea interior a la curva cerrada  $C'_1 - C''_1$ .

Calculando  $u(x_1, y_1, z_1, \lambda)$ , tomando  $Y_0 < Y'$ , primero utilizando las curvas  $C'_1$ , y luego las  $C''_1$ , ambas recorridas en los dos sentidos, y formando después la diferencia, se tiene

$$\int_{Y'}^{Y''} \frac{dY}{2\pi i} \int_{C'_1 - C''_1} W(X, Y) \Sigma \left( \frac{1}{J_{Y'}(X, Y)} - \frac{1}{J_{Y''}(X, Y)} \right) dX \\ = u(x_1, y_1, z_1, \lambda) - u(x_1, y_1, z_1, \lambda) = 0,$$

(8) La demostración de la analiticidad de  $f$  en el caso general presenta algunas dificultades.

donde el sumatorio está extendido, para cada  $Y$ , a los valores de  $r$  tales que  $Y_r \geq Y$ , y donde  $J_{r'}$ ,  $J_{r''}$  son, respectivamente, los valores límites de  $J_r$  a la derecha y a la izquierda de  $C_1'$  y  $C_1''$  en cada término del sumatorio anterior.

Entonces, por un cálculo de residuos, se tiene

$$\int_{Y'}^{Y''} \psi(Y) \Sigma \left( \frac{1}{J_{r'}(\lambda, Y)} - \frac{1}{J_{r''}(\lambda, Y)} \right) dY \\ = \int_{Y'}^{Y''} \frac{dY}{2\pi i} \int_{C_1' = C_1''} W(X, Y) \Sigma \left( \frac{1}{J_{r'}(X, Y)} - \frac{1}{J_{r''}(X, Y)} \right) dX = 0.$$

Como  $\psi(Y)$  es una función analítica arbitraria de  $Y$  resulta

$$(12.8) \quad \Sigma \left( \frac{1}{J_{r'}(X, Y)} - \frac{1}{J_{r''}(X, Y)} \right) \equiv 0$$

para  $X = \lambda$ , con lo cual queda demostrado el teorema, ya que en el cálculo de  $u$  mediante (4.43) para cualquier función analítica,  $f$ , puede prescindirse de la parte citada de  $C_1$ , porque la suma en  $r$  de las integrales a lo largo de  $C_1'$  (o  $C_1''$ ) en los términos en que aparezca esta curva es nula.  $\neq$

**COROLARIO 12.1.1.** — Si para  $Y = Y^*$   $J$  presenta dos puntos de ramificación de primer orden imaginarios conjugados, siendo  $J_{r_1}$  y  $J_{r_2}$  las determinaciones de  $J$  que se permutan en ellos, entonces  $(Y_{r_1} - Y^*)$  e  $(Y_{r_2} - Y^*)$  tienen el mismo signo, donde  $Y = Y_{r_k}$  ( $k = 1, 2$ ) es, como siempre, la tangente a  $P = 0$  sobre la cual  $J_{r_k}$  admite la expresión

$$J_{r_k} = Q_{\beta_{r_k}}(X - X_{r_k}) \quad (6).$$

**DEMOSTRACIÓN.** — El corolario es inmediato, puesto que si no (12.8) quedaría reducido a

$$(12.9) \quad \frac{1}{J_{r_1}(X, Y)} - \frac{1}{J_{r_2}(X, Y)} \equiv 0,$$

por lo que

$$J_{r_1}(X, Y) = J_{r_2}(X, Y),$$

y esto es absurdo.  $\neq$

OBSERVACIÓN. — El corolario anterior es válido tanto si los puntos de ramificación imaginarios considerados son puntos de la curva  $P = 0$  como si son puntos de tangentes imaginarias conjugadas de la misma.

13. *Propiedades de las determinaciones de  $J$  que se anulan en un punto real de  $P = 0$ .*

Vamos a considerar en qué forma pueden permutarse las determinaciones de  $J$  en los puntos de retroceso reales de  $P = 0$  con  $\nu = 2$  y tangente no paralela a  $OX$ . En las figuras escribiremos, junto a los puntos reales de la curva, las determinaciones de  $J$  que se anulan. El arco de traza que pasa por el punto de retroceso lo indicaremos con una línea de puntos y, junto a ella, escribiremos las determinaciones de  $J$  que se permutan en dicho arco de traza.

Teniendo en cuenta que en un punto de retroceso con  $\nu = 2$  se anulan tres determinaciones de  $J$ , los únicos casos que se pueden presentar son los de la fig. 3.

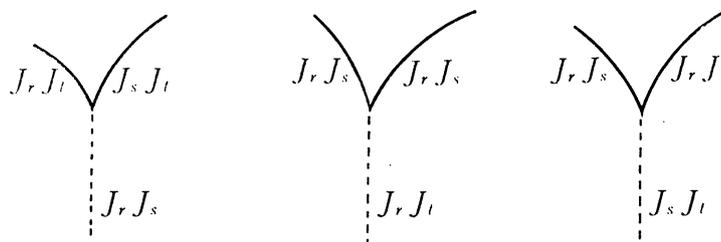


Fig. 3

En efecto, vamos a ver que no pueden darse ninguno de los casos de la fig. 4.

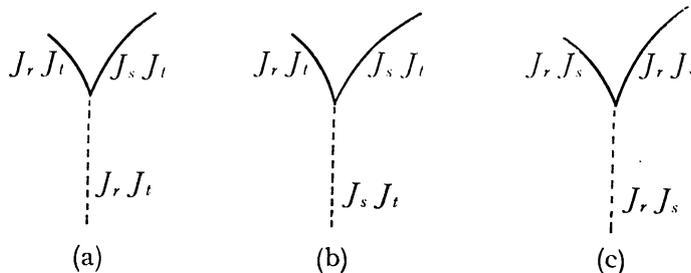


Fig. 4

Para ver la imposibilidad del caso (a) tomamos un punto  $A$  (fig. 5) no situado sobre  $P(X, Y) = 0$  y suficientemente próximo al punto de

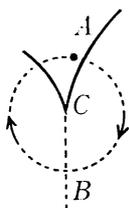


Fig. 5

retroceso  $C$  para que la circunferencia de centro  $C$  y radio  $CA$  no tenga puntos comunes con ningún otro arco de traza distinto de  $CB$ .

En  $A$  tomamos una determinación cualquiera de las tres  $J_r, J_s, J_t$  y recorriendo la circunferencia citada, en un cierto sentido, llegamos al punto  $A$  de nuevo, después de atravesar dos veces a la curva real  $P = 0$  y una vez a la traza.

Si partiendo de una determinación real llegamos a  $A$  con la misma determinación pero imaginaria, o recíprocamente, el caso planteado es imposible. Esto es lo que sucede en el caso (a) de la fig. 4 tomando la determinación  $J_s$  en  $A$  y recorriendo la circunferencia de la fig. 5 en el sentido que se indica en dicha figura.

Análogamente puede verse el caso (b).

Para ver la imposibilidad del caso (c) basta tener en cuenta que el punto  $C$  es de ramificación de  $J$  de segundo orden, y que, por tanto, si la tercera determinación que se anula en  $C$  no se anula en puntos reales próximos a  $C$  debe anularse en los puntos imaginarios de intersección de  $Y = Y'$  ( $Y' < Y^*$ , siendo  $Y^*$  la ordenada de  $C$ ) con  $P = 0$  que se confunden en  $C$  cuando  $Y'$  tiende a  $Y^*$ .

Análogamente pueden tratarse los puntos de corte de la curva real  $P = 0$  con la traza. Los únicos casos posibles puede verse fácilmente que son los de la fig. 6:

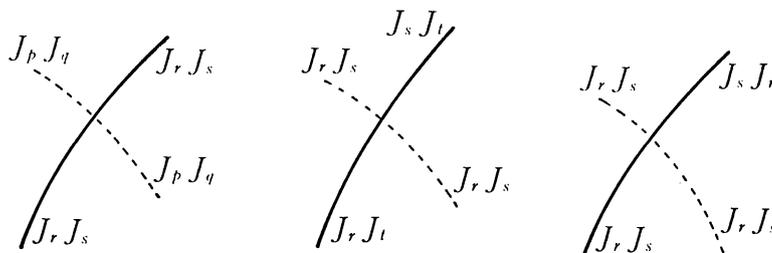


Fig. 6

TEOREMA 13.1. — Si un punto real  $(X, Y)$  de la curva  $P = 0$  es punto de ramificación de  $J$  de primer orden, permutándose en él las determinaciones  $J_{r_1}, J_{r_2}$ , se tiene

$$(13.1) \quad (Y_{r_1} - Y) (Y_{r_2} - Y) \leq 0,$$

donde  $Y = Y_{r_k}$  ( $k = 1, 2$ ) es la tangente a  $P = 0$ , paralela a  $OX$ , sobre la cual  $J_{r_k}$  puede expresarse

$$J_{r_k} = Q_{r_k} (X - X_{r_k})^{(6)}.$$

DEMOSTRACIÓN. — Suponemos, en primer lugar, que la curva considerada no tiene puntos de orden  $\nu > 2$  ni de clase  $\mu > 2$ , además de las hipótesis que hacemos siempre sobre las tangentes  $Y = Y_r$ .

Tomemos una componente real de  $P = 0$  y consideremos en primer lugar un punto de retroceso con  $\nu = 2$  situado sobre ella.

Según se ha dicho, los únicos casos posibles son los de la fig. 3. En el primer caso, llamando  $Y^*$  a la ordenada del punto de retroceso, si se toma  $Y' < Y^*$ , resulta

$$(Y_r - Y') (Y_s - Y') > 0$$

por el corolario 12.1.1, luego  $Y_r - Y'$  e  $Y_s - Y'$  tienen el mismo signo. Entonces es evidente que si  $Y > Y^*$  el signo de

$$(Y_r - Y) (Y_t - Y)$$

es el mismo que el de

$$(Y_s - Y) (Y_t - Y),$$

ya que  $Y^* \neq Y_r, Y_s$ . Por tanto, sobre la curva  $P = 0$ , a ambos lados del punto de retroceso y en puntos próximos a él, se conserva el signo del producto indicado en el teorema.

En los casos segundo y tercero la igualdad del signo del producto es trivial.

Si el punto que consideramos es un punto de corte de  $P = 0$  con una traza, se tienen los casos de la figura 6. De ellos, en el primero y tercero también es trivial la igualdad del signo del producto que se considera,

$$(Y_r - Y) (Y_s - Y).$$

En el segundo caso, llamando  $Y^*$  a la ordenada del punto de intersección, si  $Y$  es próximo a  $Y^*$  se tiene

$$(Y_r - Y) (Y_s - Y) > 0$$

por el corolario 12.1.1, luego es inmediato que si  $Y' < Y^*$  e  $Y'' > Y^*$ , el signo de

$$(Y_r - Y') (Y_l - Y')$$

es el mismo que el de

$$(Y_s - Y'') (Y_l - Y'').$$

Sea ahora  $(X_r, Y_r)$  un punto de  $P = 0$  con tangente paralela a  $OX$ ,  $Y = Y_r$ . Supongamos, para fijar ideas, que la concavidad en  $(X_r, Y_r)$  estuviera dirigida hacia abajo (fig. 7). Sobre una recta  $Y = Y'$  próxima a  $Y = Y_r$ , con  $Y' < Y_r$ ,  $J_r$  presenta dos puntos

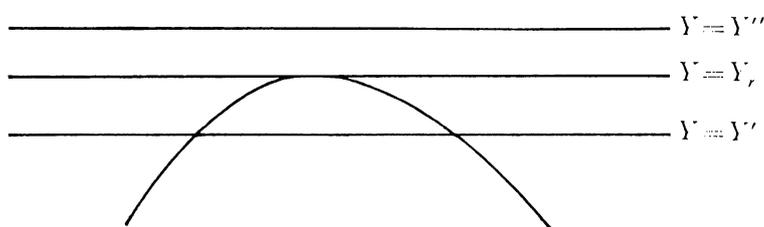


Fig. 7

de ramificación de primer orden: los puntos reales de intersección de  $Y = Y'$  con  $P = 0$  que se deducen por continuidad de  $(X_r, Y_r)$ . Sea  $J_s$  la determinación de  $J$  que se permuta con  $J_r$  en esos puntos. Sobre una recta  $Y = Y''$  próxima a  $Y = Y_r$ , con  $Y'' > Y_r$ ,  $J$  presenta dos puntos de ramificación imaginarios conjugados de primer orden, que se deducen por continuidad de los anteriores, en los que se permutan  $J_r$  y  $J_s$ . En la parte de la traza correspondiente a estos puntos se verifica, según el corolario 12.1.1,

$$(Y_r - Y'') (Y_s - Y'') > 0$$

y, como consecuencia, se tiene

$$(Y_r - Y') (Y_s - Y') < 0.$$

Ahora bien, puesto que la curva  $P = 0$  no tiene tangentes de inflexión reales, en una componente cualquiera de la curva siempre existe un punto en el cual la tangente es paralela a  $OX$  y  $\nu = 1$ . Por tanto, en todo punto de esa componente se verifica

$$(Y_{r_1} - Y) (Y_{r_2} - Y) \leq 0$$

si  $J_{r_1}, J_{r_2}$  son las determinaciones de  $J$  que se anulan en él.

Por otra parte, si la curva presenta puntos de retroceso con tangente paralela a  $OX$  o puntos con  $\nu > 2$  o  $\mu > 2$ , o tangentes múltiples paralelas a  $OX$ , es decir, los casos que habíamos excluido, por consideraciones de continuidad sigue cumpliéndose el resultado anterior, puesto que modificando muy poco los coeficientes de la ecuación dada se obtiene otra curva que verifica las hipótesis anteriores y, por tanto, vale la conclusión para ella.  $\neq$

En un punto de retroceso de orden  $\nu = 2$  con tangente paralela a  $OX$  únicamente pueden presentarse, según el teorema 13.1 y el

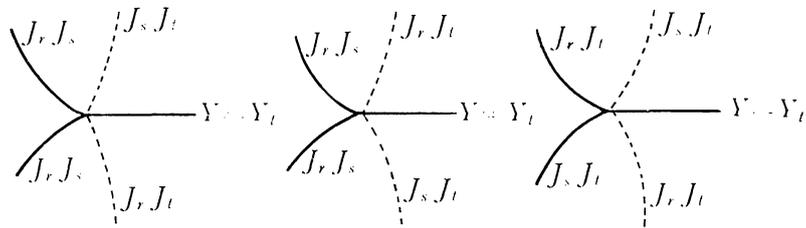


Fig. 8

corolario 12.1.1, los casos indicados en las figs. 8 y 9.

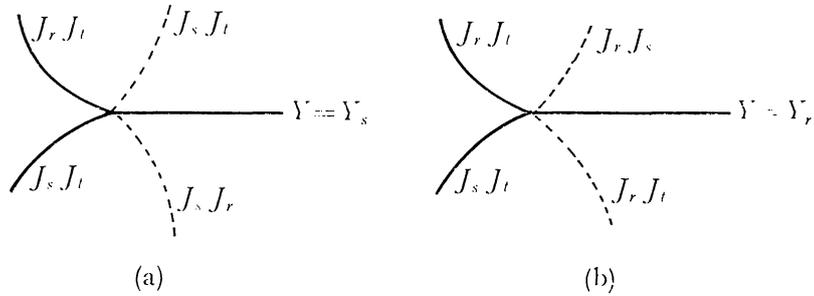


Fig. 9

La imposibilidad de los casos de la fig. 9 puede verse fácilmente. En efecto, en el caso (a) basta tomar el punto  $A$  indicado en la fig. 10 suficientemente próximo al punto de retroceso  $C$  para que la circun-

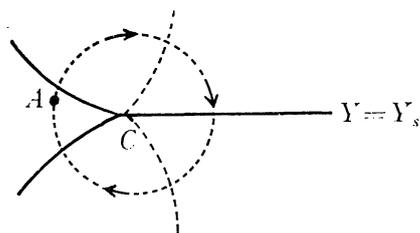


Fig. 10

ferencia de centro  $C$  y radio  $CA$  no corte a la traza más que en los dos puntos marcados en la figura. Al desplazarnos a lo largo de esa circunferencia en el sentido que se indica,  $J_t$ , que es real en  $A$ , pasa a tomar valores imaginarios y se permuta primero con  $J_s$  y después con  $J_r$ , con lo cual llegaríamos de nuevo al punto  $A$  con valores imaginarios, lo cual es absurdo.

Análogamente se ve la imposibilidad del caso (b).

14. *Propiedad del par de tangentes imaginarias conjugadas de  $P = 0$  que pasan por un punto real.*

TEOREMA 14.1. — Si desde un punto  $(X, Y)$ , real, pueden trazarse dos tangentes imaginarias conjugadas,  $t$  y  $\bar{t}$ , a la curva  $P = 0$  y llamamos  $J_r$  y  $J_s$  a las determinaciones de  $J$  asociadas a  $t$  y  $\bar{t}$ , respectivamente, en  $(X, Y)$ , mediante

$$J = X Q_{\beta} - Y Q_{\alpha}$$

se tiene

$$(14.1) \quad (Y_r - Y) (Y_s - Y) < 0,$$

donde  $Y = Y_r$  es, como siempre, la tangente a  $P = 0$  sobre la cual  $J_r$  admite la expresión

$$J_r = Q_{\beta_r} (X - X_r)$$

y análogamente  $Y = Y_s$  para  $J_s$ . (6)

DEMOSTRACIÓN. — Llamemos  $(X', Y')$  al punto  $A = (X, Y)$  que se considera. Desplazándonos a lo largo de la recta  $Y = Y'$ , las determinaciones asociadas a las rectas que se deducen por continuidad de  $t$  y  $\bar{t}$  en los puntos de  $Y = Y'$  son  $J_r$  y  $J_s$  en los puntos próximos a  $A$ , verificándose  $J_r = \bar{J}_s$ . Si al desplazarnos cortamos a un arco de traza en el que se permutan, por ejemplo,  $J_r$  y  $J_{r'}$ , a partir del punto de intersección de  $Y = Y'$  con la traza, y en puntos próximos a él, las determinaciones asociadas a las rectas que se deducen por continuidad de  $t$  y  $\bar{t}$  en los puntos de  $Y = Y'$  pasan a ser  $J_{r'}$  y  $J_s$ , y, entonces, en esos puntos, el producto (14.1) pasa a ser

$$(Y_{r'} - Y') (Y_s - Y'),$$

cuyo signo es el mismo que el de (14.1), porque

$$(Y_r - Y') (Y_{r'} - Y') > 0,$$

según el corolario 12.1.1.

Siguiendo así a lo largo de la recta  $Y = Y'$ , se observa que el signo del producto (14.1) se mantiene constante. Para valores de  $X$  muy grandes, por ser la ecuación totalmente hiperbólica, todas las tangentes trazadas desde un punto  $(X, Y)$  a la curva  $P = 0$  son reales, luego en nuestro desplazamiento llegaremos a cortar a  $P = 0$  en un primer punto en el que  $t$  y  $\bar{t}$  se hacen reales. Si son, por ejemplo,  $J_{r'}$  y  $J_s$  las determinaciones asociadas a  $t$  y  $\bar{t}$  en ese punto, se verifica

$$(Y_{r'} - Y') (Y_s - Y') < 0,$$

según el teorema 13.1, y, por tanto, también se verifica

$$(Y_r - Y') (Y_s - Y') < 0,$$

como queríamos demostrar.  $\neq$

15. *Propiedad de las determinaciones de  $J$  que se anulan en un punto de una tangente real.*

TEOREMA 15.1. — *Sea  $t$  una tangente real a la curva  $P = 0$  en un punto  $(X_i, Y_i)$  de ella. Suponemos que  $t$  no es paralela a  $OX$ . Sea*

$J_r$  la determinación asociada a  $t$  en un punto  $(X, Y)$  de esta recta mediante

$$J_r = X Q_\beta - Y Q_\alpha.$$

Entonces, si  $Y < Y_i$  se verifica que  $Y_r > Y$  y si  $Y > Y_i$ ,  $Y_r < Y$ , siendo  $Y = Y_r$ , como siempre, la tangente a  $P = 0$  sobre la cual  $J_r$  admite la expresión

$$J_r = Q_{\beta_r} (X - X_r) \quad (6), \quad (9).$$

DEMOSTRACIÓN. — Tomemos una componente de la curva real  $P = 0$  y supongamos que en los puntos de toda la curva  $P = 0$  se verifica que  $\nu \leq 2$  y  $\mu \leq 2$ , además de las hipótesis sobre las tangentes  $Y = Y_r$ . Para fijar ideas estudiaremos el caso de la fig. 11.

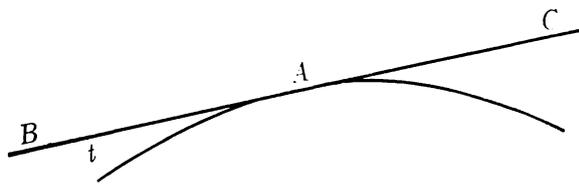


Fig. 11

Las conclusiones que obtengamos para puntos de la semitangente  $AB$  próximos a  $A$  se extienden a toda la semitangente  $AB$ . En efecto, si demostramos, como indica el teorema, que

$$(Y_r - Y) (Y_i - Y) > 0$$

en los puntos de  $AB$  próximos a  $A$ , siendo  $J_r$  la determinación de  $J$  asociada a  $t$  en esos puntos, el resultado sigue siendo válido al desplazarnos a lo largo de  $AB$ , ya que al atravesar un arco de traza en el que se permute  $J_r$  con otra determinación  $J_{r'}$  a partir del punto de intersección se verifica

$$(Y_{r'} - Y) (Y_i - Y) > 0,$$

por ser en esos puntos

$$(Y_r - Y) (Y_{r'} - Y) > 0,$$

según el corolario 12.1.1.

(9) Este teorema permite conocer qué determinaciones de  $1/J$  presentan polos de una tangente múltiple real a la curva  $P = 0$ .

Análogamente sucede con la semitangente  $AC$ , por lo cual nos limitaremos a demostrar el teorema para puntos próximos al de contacto.

Consideremos la recta  $t$  tangente a  $P = 0$  en un punto  $(X', Y')$  de la componente tomada. Supongamos que  $t$  no es paralela a  $OX$ , como indica el teorema, y que  $(X', Y')$  no es punto de retroceso ni punto de corte de  $P = 0$  con la traza. Haciendo variar a  $t$  con continuidad, de manera que siga siendo tangente a  $P = 0$ , el punto de contacto  $(X_i, Y_i)$  irá variando, permaneciendo próximo a  $(X', Y')$  (fig. 12).

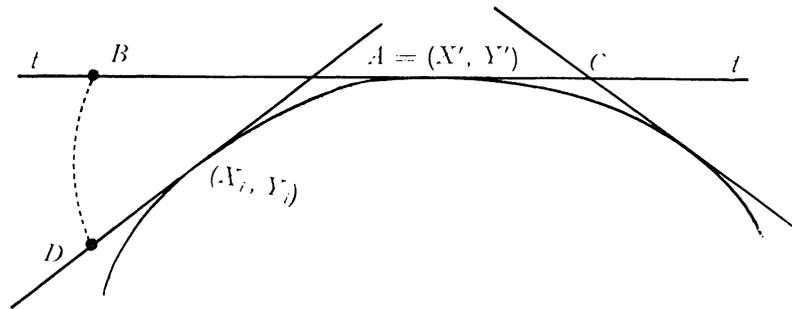


Fig. 12

Sea  $B$  un punto de  $t$  próximo a  $A$  y sea  $J_r$  la determinación de  $J$  asociada a  $t$  en él. Tomando otra posición de la recta  $t$  y desplazándonos con continuidad con el punto  $B$  de una a otra sin cortar a la curva real  $P = 0$  ni a la traza, se observa que en el nuevo punto,  $D$ , la determinación asociada sigue siendo  $J_r$  y que, por tanto, en la semitangente  $AB$  se conserva, al variar, el signo del producto

$$(Y_r - Y)(Y_i - Y).$$

Haciendo las mismas consideraciones para la semitangente  $AC$ , teniendo en cuenta que en  $C$  la determinación asociada a  $t$  ya no es  $J_r$ , sino otra,  $J_s$ , se llega a la conclusión de que también en esa semitangente se conserva, al variar, el signo del producto considerado.

Veamos ahora el caso en que el punto  $(X', Y')$  es punto de retroceso ( $\nu = 2$ ) o bien es un punto de corte de  $P = 0$  con la traza. Si

la determinación  $J_r$  pasa a ser, a partir de ese punto,  $J_{r'}$ , de los casos estudiados en § 13 se deduce que

$$(Y_r - Y') (Y_{r'} - Y') > 0.$$

Por tanto, al variar  $t$  y coincidir su punto de contacto con el punto que estamos considerando, el producto

$$(Y_r - Y) (Y_i - Y)$$

pasa a ser

$$(Y_{r'} - Y) (Y_i - Y),$$

pero su signo se conserva.

Si la determinación  $J_r$  no se permuta con otra en ese punto, es trivial que el signo del producto se conserva.

Consideremos ahora el caso en que  $t$  es una tangente a  $P = 0$  cuyo punto de contacto está próximo al punto de contacto de la curva con una tangente paralela a  $OX$ ,  $Y = Y_s$ , y supongamos, para fijar ideas, que la concavidad en el punto de contacto  $(X_s, Y_s)$  esté dirigida hacia abajo.

Sean  $J_s, J_t$  las determinaciones de  $J$  que se anulan en un punto  $C$  de  $P = 0$  próximo a  $(X_s, Y_s)$ . En la fig. 13 se observa que en el punto  $A$  la determinación asociada a  $Y = Y_s$  es  $J_s$ , luego la determinación asociada a  $t$  en  $A$  es  $J_t$ . Por el contrario, en el punto  $B$  la determi-

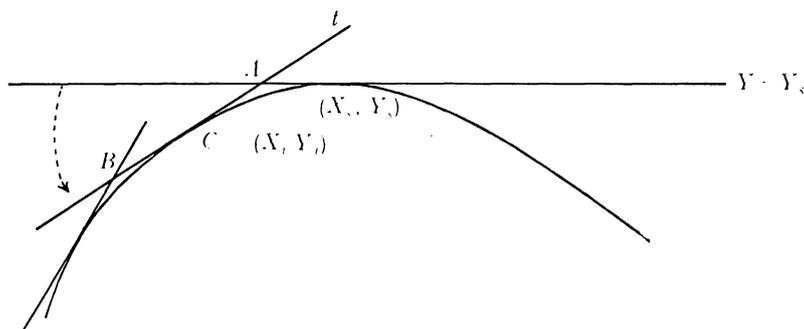


Fig. 13

nación asociada a  $t$  es  $J_s$ . En los puntos de la semitangente  $CB$  próximos a  $C$ , por ser  $Y_r = Y_s$  e  $Y < Y_i < Y_s$ , se verifica

$$(Y_r - Y)(Y_i - Y) > 0.$$

En los puntos de la semitangente  $CA$  próximos a  $C$ , se tiene  $Y_r = Y_t$ , y como

$$(Y_s - Y_i)(Y_t - Y_i) < 0,$$

según el teorema 13.1, al ser  $Y_r < Y_i < Y$  resulta

$$(Y_r - Y)(Y_i - Y) > 0.$$

Estas conclusiones se extienden, según hemos dicho, a todos los puntos de las semitangentes  $CB$  y  $CA$  respectivamente.

Como en la componente considerada de  $P = 0$  siempre hay un punto con tangente paralela a  $OX$ , que por nuestras hipótesis no es de retroceso, y sobre esta componente el signo de  $(Y_r - Y)(Y_i - Y)$  es constante, se llega a la conclusión de que en los puntos  $(X, Y)$  de las tangentes a esa componente de la curva real  $P = 0$  se verifica

$$(Y_r - Y)(Y_i - Y) > 0.$$

Como ya hemos hecho anteriormente, este resultado se extiende, por consideraciones de continuidad en los coeficientes de la ecuación, al caso en que la curva pertenece a alguno de los casos excluidos, en nuestras hipótesis, quedando así demostrado el teorema.  $\neq$

#### 16. Influencia de las tangentes imaginarias múltiples y de inflexión de $P = 0$ en el cálculo de la solución.

DEFINICIÓN 16.1. — Sea  $t$  una tangente imaginaria múltiple o de inflexión a la curva  $P = 0$  y sea  $(X_t, Y_t)$  un punto genérico de  $t$ . Sea  $q$  una rama de  $P = 0$  tangente a  $t$  en un punto  $(X_i, Y_i)$ , siendo  $\mu = \mu_i$  la clase y  $\nu = \nu_i$  el orden de  $q$ .

Se dice que  $J_r(X, Y)$  es asociada a la rama  $q$  en  $(X_t, Y_t)$  si

$$(16.1) \quad J_r(X, Y_t) = X Q_\beta - Y Q_\alpha$$

en un entorno de  $(X_t, Y_t)$ , donde  $(\alpha, \beta)$  son las coordenadas de una tangente a la rama  $q$ , que pasa por  $(X, Y_t)$ .

Es inmediato ver que el número de determinaciones de  $J$  asociadas a  $\varrho$  en  $(X_i, Y_i)$  es  $\mu$ .

LEMA 16.1. — Sea

$$S_\varrho = \{ Y \mid (X, Y) \in t \wedge \exists J_r \text{ asociada a } \varrho \text{ en } (X, Y) \\ \wedge Y_0 < Y \leq Y_r \},$$

donde  $Y = Y_r$  en la tangente a  $P = 0$  sobre la cual  $J_r$  se expresa

$$J_r = Q_{\beta_r}(X - X_r).$$

Sea  $Y'_0 = \sup \{ Y \mid (X, Y) \in S_\varrho \}$  cuando  $S_\varrho \neq \phi$ .

Entonces  $Y'_0$  es finito y no puede coincidir con la ordenada  $Y_i$  del punto de contacto de  $\varrho$  con  $t$  (6).

DEMOSTRACIÓN. — Que  $Y'_0$  es finito cuando  $S_\varrho \neq \phi$  es inmediato, porque se verifica

$$Y_0 \leq Y'_0 \leq \max. \{ Y_r \mid r = 1, 2, \dots, m \} < \infty.$$

La demostración de que  $Y'_0 \neq Y_i$  la haremos por reducción al absurdo. Supongamos que  $Y'_0 = Y_i$ .

Tomemos  $Y^*_0 \in S_\varrho$  tal que  $Y^*_0 < Y'_0$  y suficientemente próximo a  $Y'_0$  de forma que entre  $Y = Y^*_0$  e  $Y = Y'_0$  no haya ninguna recta  $Y = Y_r$  correspondiente a una determinación de  $J$  asociada a  $\varrho$  en  $t$ . Por ser  $Y^*_0 < Y'_0$  existe  $J_r$  asociada a  $\varrho$  en el punto  $(X, Y^*)$  de  $t$  tal que  $Y^*_0 < Y^* \leq Y'_0$  e  $Y^* \leq Y_r$ , ya que en caso contrario no sería  $Y'_0$  el supremo de  $S_\varrho$ . Entonces, en cada entorno de  $(X_i, Y_i)$  existe un punto  $(X', Y')$  de  $\varrho$  que es punto de ramificación de primer orden de  $J_r$ . Llamemos  $J_s$  a la determinación de  $J$  que se permuta con  $J_r$  en  $(X', Y')$ . Por ser  $Y_r > Y^*$  se tiene  $Y_r \geq Y'_0$ , no pudiendo ser igual porque  $Y = Y_i$  sería la tangente real  $Y = Y_r$  a  $P = 0$ , lo que contradice nuestras hipótesis sobre dichas tangentes.

En la tangente a  $\varrho$  en  $(X', Y')$  es  $J_r$  la determinación de  $J$  correspondiente a los puntos de ordenada menor que  $Y'$  y  $J_s$  la correspondiente a los puntos de ordenada mayor que  $Y'$ , puesto que, en caso contrario, al tender  $(X', Y')$  a  $(X_i, Y_i)$ ,  $J_r$  estaría asociada a  $\varrho$  en los puntos de ordenada mayor que  $Y'_0$  y, por tanto,  $Y'_0$  no sería el supremo de  $S_\varrho$ .

Como  $J_s$  se permuta con  $J_r$  en  $(X', Y')$  y  $X'$  es imaginario, según el corolario 12.1.1 también es  $Y_s > Y'_0$ .

Por tanto, existe  $Y''$  próximo a  $Y'_0$  tal que  $Y_s > Y'' > Y'_0$  y que verifica  $Y'' \in S_\rho$ , puesto que, por continuidad, al tender  $(X', Y')$  a  $(X_i, Y_i)$ , se deduce que  $J_s$  es asociada a  $\rho$  en puntos de  $t$  de ordenada superior a  $Y'_0$ . Como esto contradice la definición de  $Y'_0$ , se deduce que tiene que ser  $Y_i \neq Y_0$ .

Este lema sigue siendo válido cuando no se cumplen las hipótesis sobre las tangentes  $Y = Y_r$ , por las mismas razones que hemos expuesto en otras ocasiones, ya que se puede probar por continuidad en los coeficientes de la ecuación.  $\neq$

De manera análoga podríamos expresar y demostrar un lema semejante para

$$S'_\rho = \{ Y \mid (X, Y) \in t \wedge \exists J_r \text{ asociada a } \rho \text{ en } (X, Y) \\ \wedge Y_r \leq Y < Y_0 \}$$

e

$$Y''_0 = \inf. \{ Y \mid (X, Y) \in S'_\rho \} \text{ cuando } S'_\rho \neq \phi.$$

**TEOREMA 16.1.** — Sean  $t$  y  $\rho$  la tangente y la rama, respectivamente, que estamos considerando. Entonces, si la clase de  $\rho$  es 1, se tiene  $S_\rho = S'_\rho = \phi$ . <sup>(6)</sup>

**DEMOSTRACIÓN.** — Sea  $\mu = \mu_i = 1$  y supongamos, para fijar ideas, que  $S_\rho \neq \phi$ . Entonces existiría  $Y'_0$  finito, y los puntos de  $t$  con ordenada  $Y^* \leq Y'_0$  serían polos de una determinación  $1/J_r$ , no siendo puntos singulares de  $1/J_r$  los de ordenada  $Y^* > Y'_0$ , lo cual es absurdo según se deduce por continuidad.  $\neq$

**COROLARIO 16.1.1.** — Toda rama de  $P = 0$  tangente a una recta  $t$  imaginaria que es tangente múltiple o de inflexión a la curva es de clase igual o mayor que 2, y, por tanto, no existen tangentes múltiples imaginarias que no sean de inflexión. <sup>(6)</sup>

**DEMOSTRACIÓN.** — Si hubiera una rama de  $P = 0$  tangente a  $t$  con  $\mu_i = 1$ , en esa rama sería  $S_\rho = S'_\rho = \phi$ , independientemente del valor de  $Y_0$ , lo cual es absurdo porque tomando  $Y_0$  de manera adecuada puede conseguirse inmediatamente que uno de los dos sea no vacío.  $\neq$

TEOREMA 16.2. — Sean  $t$  y  $\varrho$  la tangente y la rama de  $P = 0$  que estamos considerando. Entonces, si  $S_\varrho \neq \emptyset$ , el punto  $(X'_0, Y'_0)$  de  $t$ , donde  $Y'_0 = \sup \{ Y \mid (X, Y) \in S_\varrho \}$ , es real, y, por tanto, intersección de  $t$  con su conjugada  $\bar{t}$ . (6)

DEMOSTRACIÓN. — Hagámoslo por reducción al absurdo.

Si  $X'_0$  no fuera real,  $(X'_0, Y'_0)$  sería punto de ramificación para  $\mu$  determinaciones de  $J$  que llamaremos  $J_{r_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, \mu$ ). Análogamente ocurriría con el punto  $(\bar{X}'_0, Y'_0)$  de  $\bar{t}$ , que sería punto de ramificación para las mismas determinaciones de  $J$ . Por continuidad, debe seguir habiendo puntos de ramificación de  $J_r = J_{r_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, \mu$ ) en los puntos de intersección de  $Y = Y^*$  con  $t$  y  $\bar{t}$  para  $Y^* > Y'_0$  suficientemente próximo a  $Y'_0$ . Entonces,  $Y = Y'_0$  no puede ser una de las tangentes  $Y = Y_{r_k}$  a la curva por nuestras hipótesis sobre dichas tangentes, y no puede ser tampoco que todas las  $Y_{r_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, \mu$ ) verifiquen  $Y_{r_k} < Y'_0$ , por la definición de  $Y'_0$ , luego habría al menos una  $Y_{r_k}$  tal que  $Y_{r_k} > Y'_0$ , con lo cual se llega a una contradicción, porque sería

$$Y'_0 < \sup \{ Y \mid (X, Y) \in S_\varrho \}$$

Por continuidad en los coeficientes de la ecuación el teorema sigue siendo válido cuando no se verifican las hipótesis sobre las tangentes  $Y = Y_r$ .  $\neq$

TEOREMA 16.3. — Las tangentes imaginarias no influyen en el cálculo de  $u$  en (4.43) y, por tanto, puede prescindirse de ellas en dicho cálculo. (6)

DEMOSTRACIÓN. — Las tangentes imaginarias simples no influyen, como se deduce del teorema 16.1. Por el corolario 16.1.1, toda tangente múltiple (o de inflexión) imaginaria,  $t$ , de  $P = 0$  tiene todas las ramas de la curva tangentes a ella de clase  $\mu \geq 2$ , luego no existen polos de  $1/J$  sobre ellas, sino únicamente puntos de ramificación, que por el teorema 14.1 no influyen en el cálculo de  $u$ .

TEOREMA 16.4. — Sea  $\varrho$  una rama de la curva  $P = 0$  tangente a una recta imaginaria  $t$ , y sea  $\mu (\geq 2)$  la clase de  $\varrho$ . Entonces, si son  $J_{r_k}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, \mu$ ) las determinaciones de  $J$  asociadas a  $\varrho$  en un punto  $(X, Y)$  de  $t$ , se verifica que las diferencias

$$Y_{r_k} - Y'_0 \quad (k = 1, 2, \dots, \mu)$$

tienen el mismo signo que  $Y'_0 - Y$ , siendo  $Y'_0$  la ordenada del punto de intersección de  $t$  y  $\bar{t}$ . (6)

DEMOSTRACIÓN. — Consideremos en primer lugar el caso  $\mu = 2$  y sean  $J_r$  y  $J_s$  las determinaciones de  $J$  que presentan puntos de ramificación en los puntos de  $t$  de ordenada  $Y < Y'_0$ .

Si  $(X, Y)$  es uno cualquiera de tales puntos, se verifica, según el corolario 14.1.1,

$$(Y_r - Y)(Y_s - Y) > 0.$$

Por otra parte, en cualquier entorno de  $Y'_0$  existen puntos  $(X, Y)$  de  $t$  con  $Y < Y'_0$  en los que se verifica  $Y_r > Y$  o  $Y_s > Y$ , luego por lo anterior, se tiene

$$Y_r - Y > 0 \quad \text{e} \quad Y_s - Y > 0$$

y, por tanto,

$$Y_r - Y'_0 > 0 \quad \text{e} \quad Y_s - Y'_0 > 0.$$

Análogamente puede verse que, para puntos de  $t$  con ordenada  $Y > Y_0$ , si son  $J_{r'}$  y  $J_{s'}$  las determinaciones asociadas se tiene

$$Y_{r'} - Y'_0 < 0 \quad \text{e} \quad Y_{s'} - Y'_0 < 0.$$

Si  $\mu > 2$ , serían  $J_{r_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, \mu$ ) las determinaciones de  $J$  que se permutan en un punto de ordenada  $Y < Y'_0$  y  $J_{r'_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, \mu$ ) en un punto de ordenada  $Y > Y'_0$ . Este caso puede considerarse mediante un paso al límite del anterior. En efecto, variando los coeficientes de la ecuación con continuidad, la rama  $\varrho$  se convierte en varias ramas con  $\mu = 2$ , en las que se verifica lo anterior. Sean  $J_r^{(h)}, J_s^{(h)}$  las determinaciones de  $J$  asociadas a la rama  $\varrho_h$  en puntos  $(X, Y)$  de  $t_h$  con ordenada  $Y < Y'_{0h}$ , donde  $Y'_{0h}$  es la ordenada del punto de intersección de  $t_h$  y  $\bar{t}_h$ . Entonces se verifica

$$Y_{r^{(h)}} - Y'_{0h} > 0 \quad \text{e} \quad Y_{s^{(h)}} - Y'_{0h} > 0$$

para

$$Y'_{0h} - Y > 0$$

y, por tanto, pasando al límite,

$$Y_{r_k} - Y'_0 > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \mu)$$

para

$$Y'_0 - Y > 0.$$

Análogamente, se tiene

$$Y'_{r_k} - Y'_0 < 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \mu)$$

para

$$Y'_0 - Y < 0 \text{ }^{(10)}. \neq$$

---

<sup>(10)</sup> Partiendo de este teorema se puede probar de otro modo el teorema 14.1.

CAPÍTULO IV

FÓRMULAS RESOLUTIVAS

17. Número de tangentes imaginarias a  $P = 0$  que pasan por un punto real e índice de  $C$  respecto del mismo.

TEOREMA 17.1. — Sea  $C$  la curva real  $P = 0$ , orientada de forma que en todo punto de ella quede la convexidad a la derecha y la concavidad a la izquierda<sup>(1)</sup>. Sea  $n(C, A)$  el índice de  $C$  respecto de  $A$ , donde  $A$  es un punto real no perteneciente a  $C$ . Entonces el número de tangentes imaginarias a  $P = 0$  que pasan por  $A$  es  $2n(C, A)$ .

DEMOSTRACIÓN. — Tracemos por el punto  $A$  una semirrecta  $r$  cualquiera. Esta semirrecta corta a  $P = 0$  en un número finito de puntos  $P_k (k = 1, 2, \dots, h)$  que suponemos distintos y ordenamos de forma que  $k > k'$  si  $AP_k \subset AP_{k'}$ . Tomando un punto de  $r$  suficientemente alejado de  $A$ , todas las tangentes que se pueden trazar a  $P = 0$  son reales, luego el número de tangentes imaginarias que se pueden trazar desde ese punto a  $P = 0$  es 0, así como también es 0 el índice de  $C$  respecto del mismo punto.

Al acercarnos a  $A$  a lo largo de  $r$  sigue sucediendo lo mismo hasta llegar al punto  $P_1$ , al cual llegaremos por la parte convexa de la curva. Tomando un punto de  $r$  comprendido entre  $P_1$  y  $P_2$  ya aparecen dos tangentes imaginarias conjugadas y aumenta en una unidad el índice de la curva.

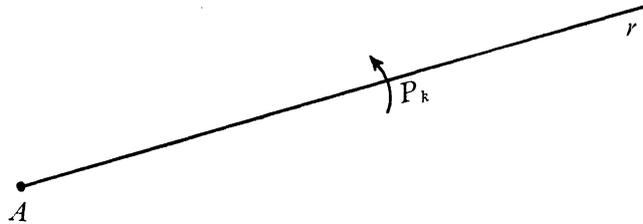


Fig. 14

<sup>(1)</sup> Esta orientación es posible por no haber en  $C$  puntos de inflexión.

Esto sucede cada vez que al atravesar  $C$  acercándonos a  $A$  a lo largo de  $r$  se presenta el caso de la fig. 14. En cambio, cuando llegamos por la parte cóncava de la curva, al atravesar  $C$ , disminuye en dos unidades el número de tangentes imaginarias que se pueden trazar a la curva  $P = 0$  y disminuye en una unidad el índice de  $C$  respecto de  $A$ , con lo que queda demostrado el teorema.  $\neq$

COROLARIO 17.1.1. — *En todo punto  $A$  del plano  $XY$  se verifica*

$$(17.1) \quad n(C, A) \geq 0$$

COROLARIO 17.1.2. — *En cada componente del conjunto abierto complementario de  $C$  el número de tangentes imaginarias (o reales) que pasan por un punto  $A$  es constante.*

18. *Expresión de las integrales dobles en  $X, Y$  que intervienen en el cálculo de la solución.*

Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos puntos reales de igual ordenada  $Y$ . Hagamos un corte a lo largo del segmento  $P_1 P_2$  y sean  $J_r, J_{r'}$  los valores límites de  $J_r$  en los bordes inferior y superior, respectivamente, de este corte.

Recordemos que si una de las  $J_r, J_{r'}$  es real a lo largo de  $P_1 P_2$ , también lo es la otra, por ser ambas conjugadas, y entonces se pueden unir, en la hoja  $J_r$ , los bordes superior e inferior de  $P_1 P_2$ .

Si son imaginarios salvo para un número finito de puntos de  $P_1 P_2$  y este segmento no tiene ningún punto interior perteneciente a  $P = 0$  o a la traza, entonces, exceptuado un conjunto finito de valores de  $Y$ , unimos el borde superior (resp. inferior) del corte  $P_1 P_2$  de la hoja  $r$ -ésima con el borde inferior (resp. superior) del mismo corte de una cierta hoja  $s$ -ésima ( $r \neq s$ ).

En la fórmula (4.43) que da la expresión de la solución  $u$  que se busca podemos separar dos sumandos

$$(18.1) \quad u = u' + u''$$

tales que el primero corresponde a la parte de  $C_1$  que contiene en su interior sólo puntos reales de  $P = 0$ , y el segundo a la parte de  $C_1$  que contiene en su interior sólo puntos de tangentes múltiples reales de  $P = 0$ .

Para simplificar y fijar ideas tomaremos

$$Y_0 \leq \min \{ Y_r \mid r = 1, 2, \dots, m \}.$$

Veamos, en primer lugar, la expresión de  $u'$ .

Sea  $A_j$  la región determinada por

$$(18.2) \quad A_j = \{ A \mid n(C, A) = j \}$$

y sea  $A = (X, Y)$  un punto cualquiera de  $A_j$ . Entonces desde  $A$  se pueden trazar  $2j$  tangentes imaginarias a  $P = 0$ , que llamaremos  $t_1, t_2, \dots, t_j, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_j$  y que corresponden a las determinaciones de  $J$  que nos interesan para el cálculo de  $u$  por lo dicho al principio.

Sean  $J_{r_k}, J_{s_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, j$ ) esas determinaciones. Por el teorema 14.1, si son  $J_{r_k}, J_{s_k}$  las determinaciones correspondientes a  $t_k$  y  $\bar{t}_k$ , se tiene

$$(18.3) \quad (Y_{r_k} - Y)(Y_{s_k} - Y) < 0.$$

Llamando  $J_{r_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, j$ ) a todas las que verifican  $Y_{r_k} > Y$ , sea

$$(18.4) \quad \frac{1}{J_{r_k}^*(X, Y)} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{J_{r'_k}(X, Y)} - \frac{1}{J_{r''_k}(X, Y)} \right),$$

donde  $J_{r'_k}$  es el valor límite de  $J_{r_k}$  cuando nos aproximamos a  $(X, Y)$  por la parte inferior del corte que pasa por dicho punto y  $J_{r''_k}$  el valor límite de  $J_{r_k}$  cuando nos aproximamos a  $(X, Y)$  por la parte superior del corte.

Sea

$$(18.5) \quad H_j = \sum_{k=1}^j \frac{1}{J_{r_k}^*}.$$

Las determinaciones de  $J$  que aparecen en esta suma varían con el punto  $(X, Y)$ , pero es evidente que si dos puntos pueden unirse mediante un arco que no corte a la curva  $C$ , el conjunto de las determinaciones que figuran en (18.5) en esos puntos es invariable, independientemente de que se atravesase la traza o no.

TEOREMA 18.1. — Sea

$$H_j = \sum_{k=1}^j \frac{1}{J_{r_k}^*},$$

donde  $\frac{1}{J_{r_k}^*}$  es la expresión (18.4). Entonces se tiene

$$(18.6) \quad u' = \sum_j \frac{1}{\pi} \int_{A_j} H_j(X, Y) W(X, Y) dX dY.$$

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, hemos deformado la curva  $C_1$  para cada  $Y$ , hasta quedar reducida a los cortes que haya para ese valor de  $Y$ . Esto se puede llevar a cabo porque, siendo

$$1/J_r = O(|X - X_0|^{-1/2})$$

en un entorno de  $X_0$ , para cada determinación  $J_r$  y cada  $(X_0, Y)$  perteneciente a  $P = 0$ , si se excluye un número finito de dichos puntos  $(X_0, Y)$ , en el cálculo de  $u''$  se puede hacer tender a cero los radios de las circunferencias  $|X - X_0| = r$ , correspondientes a tales puntos, que forman parte de  $C_1$ .

De estos cortes, únicamente nos quedaremos con los que unen puntos reales, porque hemos demostrado que se puede prescindir de los restantes, y sobre aquellos unimos los bordes de unas hojas de  $J_Y$  con los de otras, o los de una con los de ella misma, según hemos dicho al principio de este párrafo. Por tanto, la fórmula (18.6) resulta inmediata a partir de (18.4), (18.5) y (4.43).  $\neq$

19. *Expresión de las integrales simples en  $Y$  que intervienen en el cálculo de la solución.*

El término  $u''$  de (18.1) corresponde, como ya hemos dicho, a las tangentes múltiples reales de  $P = 0$ .

Sea  $t$  una tangente múltiple real de  $P = 0$ , no paralela al eje  $OX$ , y sea  $l (\geq 2)$  el número de ramas de la curva tangentes a  $t$ . Supongamos que  $t$  es la única tangente múltiple real de  $P = 0$  y sean  $Y^*_1 \geq Y^*_2 \geq \dots \geq Y^*_l$  las ordenadas de los puntos de contacto  $(X^*_h, Y^*_h)$  ( $h = 1, 2, \dots, l$ ).

Entonces, del teorema 15.1 se deduce que en los puntos  $(X, Y)$

de  $t$  tales que  $Y_{h+1}^* \leq Y \leq Y_h^*$  ( $h = 1, 2, \dots, l-1$ ) existen  $h$  determinaciones  $J_r$  de  $J$  que se anulan sobre  $t$  y verifican  $Y_r > Y$ .

Sea  $\sigma = \sigma_t$  el máximo orden de los polos de las determinaciones de  $1/J$  en un punto genérico de  $t$ . Entonces  $u''$  puede expresarse:

$$(19.1) \quad u'' = \int_{Y_2^*}^{Y_1^*} \frac{1}{(\sigma-1)!} \frac{\partial^{\sigma-1}}{\partial X^{\sigma-1}} \left( (X-X_t)^\sigma \frac{W(X, Y)}{J_{r_1}(X, Y)} \right)_{X=X_t} dY + u''_1,$$

donde  $(X_t, Y)$  es un punto de  $t$  y  $J_{r_1}$  es la determinación de  $J$  en  $(X, Y)$  asociada a la rama de  $P=0$  tangente a  $t$  en  $(X_1^*, Y_1^*)$  y, por tanto,  $r_1$  depende del punto  $(X, Y)$  y  $J_{r_1}(X, Y) = 0$  para  $X = X_t$ .

El término  $u_1''$  puede expresarse:

$$(19.2) \quad u_1'' = \int_{Y_3^*}^{Y_2^*} \frac{1}{(\sigma-1)!} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^{\sigma-1}}{\partial X^{\sigma-1}} \left( (X-X_t)^\sigma \frac{W(X, Y)}{J_{r_k}(X, Y)} \right)_{X=X_t} dY + u''_2,$$

donde  $(X_t, Y)$  es un punto de  $t$  y  $J_{r_k}$  es la determinación de  $J$  en  $(X, Y)$  asociada a la rama de  $P=0$  tangente a  $t$  en  $(X_k^*, Y_k^*)$  ( $k = 1, 2$ ).

Procediendo así sucesivamente resulta

$$(19.3) \quad u'' = \frac{1}{(\sigma-1)!} \sum_{h=1}^{l-1} \int_{Y_{k+1}^*}^{Y_k^*} \sum_{k=1}^h \frac{\partial^{\sigma-1}}{\partial X^{\sigma-1}} \left( (X-X_t)^\sigma \frac{W(X, Y)}{J_{r_k}(X, Y)} \right)_{X=X_t} dY,$$

siendo, como antes,  $(X_t, Y)$  un punto de  $t$  y  $J_{r_k}$  la determinación de  $J$  en  $(X, Y)$  asociada a la rama de  $P=0$  tangente a  $t$  en  $(X_k^*, Y_k^*)$  ( $k = 1, 2, \dots, h$ ) y, por tanto,  $J_{r_k}(X, Y) = 0$  para  $X = X_t$ .

En efecto, para  $Y < Y_l^*$  se tiene

$$(19.4) \quad \sum_{k=1}^l \frac{\partial^{\sigma-1}}{\partial X^{\sigma-1}} \left( (X-X_t)^\sigma \frac{W(X, Y)}{J_{r_k}(X, Y)} \right)_{X=X_t} = 0,$$

porque como

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{J_{r_k}(X, Y)} = 0,$$

se verifica

$$\sum_{k=1}^l \frac{1}{J_{r_k}(X, Y)} = - \sum_{k=l+1}^m \frac{1}{J_{r_k}(X, Y)}$$

y, por tanto, la suma de las determinaciones de  $1/J$  que presentan polos sobre un punto  $(X, Y)$  de  $t$  para  $Y < Y_t^*$  es una función analítica.

Si la curva presenta varias tangentes múltiples reales,  $t$ , no paralelas a  $OX$ ,  $u''$  estará formada por la suma de las expresiones del tipo (19.3) correspondientes a esas tangentes.

Estos resultados pueden resumirse así:

**TEOREMA 19.1.** — Sean  $(X_{ht}^*, Y_{ht}^*)$  ( $h = 1, 2, \dots, l_t$ ) los puntos de contacto de una tangente múltiple real,  $t$ , no paralela a  $OX$  y  $\sigma_t$  el máximo orden de los polos de las determinaciones de  $1/J$  en un punto genérico de  $t$ .

Entonces se tiene

$$(19.5) \quad u'' = \sum_t \frac{1}{(\sigma_t - 1)!} \sum_{h=1}^{l_t-1} \int_{Y_{h+1}^*}^{Y_{ht}^*} \sum_{k=1}^h \frac{\partial^{\sigma_t-1}}{\partial X^{\sigma_t-1}} \left( (X - X_t)^{\sigma_t} \frac{W(X, Y)}{J_{r_k}(X, Y)} \right)_{X=X_t} dY,$$

donde el sumatorio con respecto a  $t$  está extendido a todas las tangentes múltiples reales de  $P = 0$  no paralelas a  $OX$ .

## 20. Expresión final de la solución.

Para formar la expresión final de  $u$  supondremos:

1. La superficie  $\Gamma$ , sobre la que se dan los valores iniciales, es cortada en un solo punto por las generatrices del cono sólido característico, esto es, las correspondientes a puntos  $A = (X, Y)$  tales que  $n(C, A) > 0$ .

2. La superficie  $\Gamma$  es cortada en un solo punto por las rectas que son proyección, desde  $(x, y, z)$ , de los segmentos  $(X_{1t}^*, Y_{1t}^*)$  ( $X_{l_t}^*, Y_{l_t}^*$ ), según la notación de § 19, de las tangentes múltiples reales,  $t$ , de  $P = 0$  y que, por tanto, están contenidas en los planos tangentes múltiples al cono característico de vértice  $(x, y, z)$ .

Sustituyamos en (18.6)  $W(X, Y)$  por su valor

$$(20.1) \quad W(X, Y) = \int_{z_0}^z (z - \zeta) f_2(x + X(\zeta - z), y + Y(\zeta - z), \zeta) d\zeta$$

y hagamos el cambio de variables

$$(20.2) \quad \begin{aligned} \xi &= x + X(\zeta - z) \\ \eta &= y + Y(\zeta - z) \\ \zeta &= \zeta. \end{aligned}$$

Se tiene

$$\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(X, Y, \zeta)} = (\zeta - z)^2$$

y, por tanto,

$$(20.3) \quad u' = \sum_j \frac{1}{\pi} \int_{V_j} \frac{1}{r_j z - \zeta} H_j \left( \frac{\xi - x}{\zeta - z}, \frac{\eta - y}{\zeta - z} \right) f_2(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$

donde  $V_j$  es el volumen limitado por el cono que proyecta la región  $A_j$  de (18.2) del plano impropio desde el punto  $(x, y, z)$  y la superficie  $I'$ .

Mediante integraciones por partes, (20.3) puede expresarse de manera que aparezca explícitamente  $f$  en la integral.

Por otra parte, llamando

$$H_h^{(l)} = \sum_{k=1}^h \frac{1}{J_k(X, Y)},$$

se tiene

$$(20.4) \quad u'' = \sum_t \frac{1}{(\sigma_t - 1)!} \sum_{h=1}^{t-1} \int_{Y_{h+1,t}}^{Y_{*t,t}} \frac{\partial^{\sigma_t-1}}{\partial X^{\sigma_t-1}} \left( (X - X_t)^{\sigma_t} W(X, Y) H_h^{(l)}(X, Y) \right)_{X=X_t} dY.$$

Sustituyamos  $W(X, Y)$  por su valor (20.1) y hagamos el cambio

$$(20.5) \quad \begin{aligned} \eta &= y + Y(\zeta - z) \\ \zeta &= \zeta. \end{aligned}$$

Se tiene

$$\frac{D(\eta, \zeta)}{D(Y, \zeta)} = \zeta - z$$

y, por tanto,

(20.6)

$$u'' = \mp \sum_t \frac{1}{(\sigma_t - 1)!} \sum_{h=1}^{l_t-1} \left| \int_{S_h^{(t)}} \frac{\partial^{\sigma_t-1}}{\partial X^{\sigma_t-1}} \left( (X - X_t)^{\sigma_t} H_h^{(t)} \left( X, \frac{\eta - y}{\xi - z} \right) f_2(\xi, \eta, z) \right) d\eta d\xi \right. \right.$$

cuando  $q$  es constante, con el signo  $-$  o  $+$ , según que  $z > q(x, y)$  o  $z < q(x, y)$ , respectivamente, siendo

$$\xi = x \mp X (\xi - z)$$

y  $S_h^{(t)}$  la región plana engendrada por las semirrectas que son proyección desde  $(x, y, z)$  del segmento  $(X_{ht}^*, Y_{ht}^*) (X_{h+1t}^*, Y_{h+1t}^*)$  de  $t$ , según la notación de § 19, y está limitada por la superficie  $L$ .

llamando

$$\xi_t = x \mp X_t (\xi - z)$$

se tiene

$$\frac{\xi - \xi_t}{\xi - z} = X - X_t,$$

luego

$$u'' = \mp \sum_t \frac{1}{(\sigma_t - 1)!} \sum_{h=1}^{l_t-1} \left| \int_{S_h^{(t)}} (\xi - z)^{\sigma_t-1} \frac{\partial^{\sigma_t-1}}{\partial \xi^{\sigma_t-1}} \left[ \frac{(\xi - \xi_t)^{\sigma_t}}{(\xi - z)^{\sigma_t}} H_h^{(t)} \left( \frac{\xi - x}{\xi - z}, \frac{\eta - y}{\xi - z} \right) f_2(\xi, \eta, z) \right]_{\xi=\xi_t} d\eta d\xi \right.$$

es decir:

$$(20.7) \quad u'' = \pm \sum_t \frac{1}{(\sigma_t - 1)!} \sum_{h=1}^{l_t-1} \left| \int_{S_h^{(t)}} \frac{1}{z - \xi} \frac{\partial^{\sigma_t-1}}{\partial \xi^{\sigma_t-1}} \left[ (\xi - \xi_t)^{\sigma_t} H_h^{(t)} \left( \frac{\xi - x}{\xi - z}, \frac{\eta - y}{\xi - z} \right) f_2(\xi, \eta, z) \right]_{\xi=\xi_t} d\eta d\xi \right.$$

cuando  $q$  es constante, con el signo  $+$  o  $-$  según que  $z > q(x, y)$  o  $z < q(x, y)$  respectivamente.

Si  $P = 0$  no tiene tangentes múltiples reales,  $u'' = 0$ .

Análogamente a lo dicho en el cálculo de  $u'$ , mediante integra-  
ciones por partes puede lograrse que en (20.7) aparezca explícita-  
mente  $f$ .

Como resumen de estos resultados se tiene:

TEOREMA 20.1. — *La solución  $u = u(x, y, z)$  de la ecuación di-  
ferencial (3.1), con condiciones iniciales (3.2) nulas, suponiendo que  
la superficie  $\Gamma$  (3.3) sobre la que se dan dichas condiciones inicia-  
les es cortada en un solo punto por las rectas contenidas en la en-  
volvente convexa del cono característico <sup>(12)</sup>, puede expresarse en  
la forma*

$$(20.8) \quad u = \sum_j \frac{1}{\alpha_j} \left| \int_{V_j} \frac{1}{z-\zeta} H_j \left( \frac{\xi-x}{\zeta-z}, \frac{\eta-y}{\zeta-z} \right) f_2(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \right.$$

$$\left. \pm \sum_t \frac{1}{(\sigma_t-1)!} \sum_{h=1}^{l_t-1} \left| \int_{S_h^{(t)}} \frac{1}{z-\zeta} \frac{\partial^{\sigma_t-1}}{\partial \xi^{\sigma_t-1}} \left[ (\xi-\xi_t)^{\sigma_t} H_h^{(t)} \left( \frac{\xi-x}{\zeta-z}, \frac{\eta-y}{\zeta-z} \right) f_2(\xi, \eta, \zeta) \right] \right|_{\xi=\xi_t} d\eta d\zeta \right.$$

cuando  $q$  es constante, con el signo  $+$  o  $-$  según que  $z > q(x, y)$  o  
 $z < q(x, y)$  respectivamente, donde  $V_j$  es el volumen limitado por el  
cono que proyecta la región  $A_j$  de (18.2) del plano impropio desde el  
punto  $(x, y, z)$  y la superficie  $\Gamma$ , y  $S_h^{(t)}$  es la región plana engendrada  
por las semirrectas que son proyección desde  $(x, y, z)$  del segmento  
 $(X_{ht}^*, Y_{ht}^*)$  ( $X_{h+1t}^*, Y_{h+1t}^*$ ), según la notación del § 19, que une dos  
puntos de contacto consecutivos de una tangente múltiple,  $t$ , con  $P = 0$   
y está limitada por la superficie  $\Gamma$ .

OBSERVACIÓN. — El teorema anterior es también válido, aun-  
que  $q$  no sea constante, cuando  $\sigma_t = 1$  para toda tangente múltiple  
real,  $t$ , no paralela a  $OX$ , como ocurre cuando todas las tangentes  
múltiples son dobles y sus dos puntos de contacto son distintos.  
Por otra parte, en el caso general, a partir de (20.3) y (20.4) y te-  
niendo en cuenta que entonces  $z_0$  es función de  $X, Y$ , se puede ob-  
tener una fórmula resolutive más general que (20.8), pero bastante  
más complicada.

<sup>(12)</sup> Se ve fácilmente que esta condición es equivalente a las condiciones  
1 y 2.

21. *Consecuencias cualitativas.*

TEOREMA 21.1. — *La solución  $u(x, y, z)$  de la ecuación (3.1) sólo depende directamente, según (20.3) y (20.4), de los valores de  $f$  en el cono convexo limitado por  $\Gamma$  que es proyección desde  $(x, y, z)$  de la mínima región convexa que contiene a la curva real  $C$ .*

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, teniendo en cuenta que

$$f_2 = I^{m-2} f,$$

donde

$$I f = \int_{\Gamma} u(x, y, \zeta) d\zeta,$$

al efectuar las integraciones por partes indicadas anteriormente en las expresiones (20.3) y (20.4) resulta que  $u(x, y, z)$  depende de los valores de  $f$  en el cono convexo (simple) de vértice  $(x, y, z)$ , limitado por  $\Gamma$ , que es proyección desde  $(x, y, z)$  de la mínima región convexa del plano impropio que contiene a  $C$  y al punto  $(X, Y) = (0, 0)$ . El hecho de que aparezca este punto y no otro se debe a que

$$\left( \frac{\partial^k u}{\partial z^k} \right)_{\Gamma} = 0 \quad (0 \leq k \leq m-1),$$

pero como por hipótesis  $\Gamma$  no es superficie característica, se puede efectuar un cambio de coordenadas de modo que el plano  $z = 0$  quede invariable y que la recta

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

sea interior al cono característico, en el sentido de que para  $A = (0, 0)$  se verifique  $n(C, A) > 0$  y el cono convexo  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, y, z)$  citado antes se reduce a la proyección desde  $(x, y, z)$  de la mínima región convexa que contiene a  $C$ .

22. *Generalización de la fórmula resolutive.*

TEOREMA 22.1. — *Sea  $\sigma_0$  el máximo de los valores  $\sigma_i$  para todas las tangentes múltiples reales de  $P = 0$ , tomando  $\sigma_0 = 1$  cuando no*

*haya tales tangentes múltiples. Entonces, si  $f$  es de clase  $C^{(\sigma_0-1)}$  en el cono convexo  $\Lambda_1$  limitado por  $I'$ , que es proyección desde  $(x_1, y_1, z_1)$  de la mínima región convexa del plano impropio que contiene a la curva  $C$  y al punto  $(X, Y) = (0, 0)$  y si en dicho cono  $\Lambda_1$   $\varphi$  es constante, o continua y  $\sigma_0 = 1$ , la fórmula resolutive (20.8) es válida en el interior de  $\Lambda_1$ , en el sentido de que define una función  $u$  que es una solución del problema propuesto según la teoría de las distribuciones.*

DEMOSTRACIÓN. — Como las derivadas de  $f$  y  $\varphi$ , de orden no superior a  $\sigma_0-1$ , pueden aproximarse uniformemente en  $\Lambda_1$  mediante las correspondientes derivadas de sendos polinomios, pasando al límite en (20.8) y teniendo en cuenta lo dicho en § 21 queda probado el teorema.

COROLARIO 22.1.1. — *Si  $P = 0$  no tiene tangentes múltiples reales o todas son dobles con puntos de contactos distintos y si  $f$  y  $\varphi$  son continuas en  $\Lambda_1$ , la fórmula resolutive sigue siendo válida en el interior de  $\Lambda_1$ .*

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] AGUILO, R.: *Funcionales abeloides y aplicaciones a ecuaciones en derivadas parciales de cuarto orden*. Collect. Mathem. Vol. VIII (1955), pp. 1-71.
- [2] AUGÉ, J.: *Sobre clasificación e integración de las ecuaciones en derivadas parciales de tercer orden*. Collect. Mathem. Vol. IV. Fasc. 1 (1951), páginas 1-53.
- [3] CASULLERAS, J.: *Aplicación de la teoría de los funcionales analíticos a la resolución de un tipo de ecuaciones en derivadas parciales de 3.º orden*. Collect. Mathem. Vol. I. Fasc. 2 (1948), pp. 1-60.
- [4] COURANT, R. UND HILBERT, D.: *Methoden der Mathematischen Physik*. Springer. Berlín. Vol. I, 1924. — Vol. II, 1937.
- [5] FANTAPPIÉ, L.: *I funzionali analitici*. Mem. R. Acc. Naz. dei Lincei. Serie 6.ª Vol. 3.º Fasc. 11 (1930), pp. 451-683.
- [6] FANTAPPIÉ, L.: *I funzionali analitici di due variabili*. Mem. R. Acc. d'Italia. Vol. II (1931-IX), pp. 191-355.
- [7] FANTAPPIÉ, L.: *Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti in due variabili, mediante il calcolo degli operatori lineari*. Rend. Circ. Mat. di Palermo. T. LVII (1933), pp. 137-195.
- [8] FANTAPPIÉ, L.: *Sulle soluzioni del problema di CAUCHY per tutti i sistemi di equazioni a derivate parziali e a coefficienti costanti d'ordine qualunque*. Com. Pont. Acca. Scien. Vol. 3.º, n.º 19 (1939), pp. 403-468.
- [9] FANTAPPIÉ, L.: *Risoluzione in termini finiti del problema di GAUCHY con dati iniziali su una ipersuperficie qualunque*. Rend. R. Acc. d'Italia. S. 7.ª. Vol. 2.º (1941).
- [10] FANTAPPIÉ, L.: *L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi*. Ann. di Matem. S. Quarta. Vol. XXII. (1943), pp. 181-289.
- [11] FANTAPPIÉ, L.: *Teoría de los funcionales analíticos y sus aplicaciones*. Cons. Sup. de Investigaciones Cient. Sem. Matem. de Barcelona (1943). Lecciones recogidas por R. RODRÍGUEZ VIDAL.
- [12] TEIXIDOR, J.: *Resolución en términos finitos del problema de CAUCHY para una familia de ecuaciones en derivadas parciales de 4.º orden*. Collect. Mathem. Vol. III. Fasc. 1 (1950), pp. 1-71.

