SOBRE LA EXISTENCIA DE MODELOS PROYECTIVOS
ABSOLUTAMENTE NORMALES DE UNA VARIEDAD
ALGEBRAICA

por

RAFAEL MALLOL

INTRODUCCIÓN.

El concepto de normalidad y el proceso de normalización de una variedad algebraica, debidos a O. ZARISKI¹⁾, además de constituir instrumental adecuado para abordar el problema de resolución de singularidades, ha permitido la generalización de proposiciones y el ulterior desarrollo de diversas cuestiones de Geometría Algebraica, previamente demostradas y elaboradas bajo la hipótesis restrictiva de ausencia de singularidades²⁾.

El objeto principal de este trabajo es caracterizar las variedades algebraicas indivisibles V de un espacio proyectivo sobre un dominio universal cualquiera, para las que el proceso de normalización en el cuerpo de funciones racionales de V , sobre un prefijado dominio de separabilidad Δ , es absoluto, es decir, independiente del cuerpo de definición de V que se considere. Si V es de dimensión unidad, en cuyo caso la hipótesis de normalidad local equivale a la ausencia de singularidades, la invarianza del género geométrico de V en las extensiones de Δ resuelven la cuestión [9],3, y [5] Satz 6. Si V es de dimensión superior a la unidad, no todo modelo localmente normal respecto de Δ del cuerpo de las Δ -funciones racionales sobre V es modelo localmente normal de V , y los métodos utilizados en el caso de una curva algebraica no son aplicables. Ahora bien, en el supuesto de que V sea localmente normal respecto de Δ , se dispone de un cono-

1) [17], [18], [19]. Véase también [16], App. II, [10] y [4].

En [17] y [6'] figuran ejemplos que muestran la no equivalencia de la noción de normalidad de O. ZARISKI con la homónima utilizada en Geometría Algebraica clásica. (Los números entre corchetes se refieren a la Bibliografía que figura al final de este trabajo).

2) [18], [19], [20].

cido criterio de normalidad local absoluta [16], App. II, Prop. 4, que interviene decisivamente en la demostración de una de nuestras proposiciones (§ 5, Teorema 9).

El contenido de nuestro trabajo puede resumirse de la manera siguiente: En el § 1, de carácter preliminar, se incluyen proposiciones que combinadas con las del § 3, dedicado a la noción de normalidad, permiten extender la validez de las conclusiones al caso de una variedad algebraica no necesariamente indivisible. En el § 2 se estudian propiedades de separabilidad independiente de la teoría abstracta de derivación [16], I, 5. En el § 4, apoyándonos en resultados de F. K. SCHMIDT [11], introducimos el concepto de género de una curva algebraica irreducible no necesariamente indivisible, generalizando la fórmula que figura en [11], Satz 16, obteniéndose un resultado que es compatible con la noción clásica de género de una curva algebraica reducible debida a M. NOETHER [7]. Iniciamos el § 5 generalizando nuestra exposición [5] para el caso de una curva algebraica irreducible no necesariamente indivisible, siguiendo el mismo procedimiento que allí utilizamos simplificándolo en algunos puntos. Después de algunas proposiciones de carácter auxiliar, introducimos el concepto de Δ -género de intersección de orden m , $g_{\Delta}^{(m)}$, de una variedad algebraica irreducible V de dimensión superior a la unidad, cuyo origen remonta a C. SEGRE [12], permitiendo reducir nuestro problema al caso unidimensional. Los teoremas 8 y 9 del § 5 resuelven la cuestión planteada obteniéndose un criterio de Δ -normalización local absoluta, que no requiere la construcción previa de la Δ -normalizada local de V , disponiendo además de la posibilidad de explicitar $g_{\Delta}^{(m)}$, cuyo comportamiento en las extensiones inseparables puras de Δ es lo único que tiene que considerarse.

Es para mí agradable deber, el expresar mi agradecimiento a los profesores Dr. B. L. van der WAERDEN y Dr. ENRIQUE LINÉS ESCARDÓ por la eficaz ayuda de ellos recibida durante la realización de este trabajo.

§ 1. PRELIMINARES.

1.1. — Sea Δ un cuerpo conmutativo cualquiera, Ω un dominio universal sobre Δ , o sea, un cuerpo conmutativo extensión del Δ algebraicamente cerrado, y que para cada número natural m contiene m elementos algebraicamente independientes con relación a Δ . [16], Chap. I, 1. Llamaremos *extensión* de Δ , a cada cuerpo extensión del Δ respecto del cual Ω sea dominio universal.

Sea $P_n(\Omega)$ el espacio proyectivo sobre Ω de n dimensiones. Los elementos de $P_n(\Omega)$ (puntos) son, pues, las clases determinadas en el conjunto $\Omega^{n+1} - (0, \dots, 0)$ por la equivalencia definida mediante la relación: $(x_0, \dots, x_n) \sim (x'_0, \dots, x'_n)$ si y sólo si existe un $\lambda \in \Omega$ de modo que $x'_i = \lambda x_i$ $i = 0, \dots, n$. Llamaremos *representante reducido* de un punto P , a un representante $(x_0, \dots, x_n)$ de P tal, que para algún índice j se verifique $x_j = 1$, y diremos que $x_i, i = 0, \dots, n$, constituyen un sistema de *coordenadas reducidas* de P . Cada punto admite por lo menos un representante reducido. El grado de trascendencia de $\Delta(x_0, \dots, x_n)$ sobre Δ , no depende del representante reducido $(x_0, \dots, x_n)$ de P elegido y recibe el nombre de dimensión de P sobre Δ . Como Ω es dominio universal sobre Δ , $P_n(\Omega)$ contiene puntos de cada dimensión $d \leq n$ sobre Δ .

Adoptando la terminología de van der WAERDEN, diremos que un subconjunto V de $P_n(\Omega)$ es una variedad algebraica sobre Δ o bien que es una Δ -variedad algebraica, si existe un sistema S de formas (polinomios homogéneos) del anillo $\Delta[X_0, \dots, X_n]$, de modo que se verifique $F(x_0, \dots, x_n) = 0$ para cada forma F de S y cada punto $(x_0, \dots, x_n)$ de V . Si Σ es una *extensión* de Δ cada Δ -variedad algebraica es Σ -variedad algebraica.

Cada Δ -variedad algebraica V es unión finita de Δ -variedades algebraicas irreducibles, determinadas, que se denominan Δ -componentes irreducibles de V . Es propiedad característica de una Δ -variedad algebraica irreducible W , la de coincidir con el sistema de las Δ -especializaciones de un punto P determinado salvo Δ -isomorfismos³⁾, que se denomina punto general o punto genérico de W respecto de Δ . Se llama dimensión de W a la de P sobre Δ . Si d es la dimensión de W y Σ es una *extensión* de Δ , existe un punto genérico de W respecto de Δ de dimensión d sobre Σ , [16], Chap. I, Prop. 9. Al lugar geométrico de las Δ -especializaciones de un punto Q lo llamaremos Δ -variedad algebraica irreducible asociada a Q .

Se dice que la variedad algebraica W es *indivisible* o absolutamente irreducible, si es irreducible respecto de cualquier *extensión* de Δ .

Sea Δ_s el cuerpo formado por los elementos de Ω que son algebraicos y separables con relación a Δ . Si $\xi_i, i = 0, \dots, n$ es un sis-

³⁾ Si $\xi_i, i = 0, \dots, n$, es un sistema de coordenadas reducidas de P , y P' es también punto genérico de W respecto de Δ , existe un sistema de coordenadas reducidas ξ'_i de P' de modo que ξ_i, ξ'_i se corresponden en un Δ -isomorfismo de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ en $\Delta(\xi'_0, \dots, \xi'_n)$.

tema de coordenadas reducidas de un punto genérico de W respecto de Δ , se verifica el siguiente criterio de indivisibilidad:

Es condición necesaria y suficiente para que W sea indivisible, que Δ sea separablemente cerrado en $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$, es decir, que se verifique $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n) \cap \Delta_s = \Delta$ 4).

Si W no es indivisible, $K = \Delta(\xi_0, \dots, \xi_n) \cap \Delta_s$ es una extensión propia, finita y separable de Δ , y por tanto una extensión simple de Δ . Sea α un elemento primitivo de K sobre Δ , y Γ la extensión de GALOIS de Δ engendrada por K , es decir, la mínima extensión de GALOIS de Δ que contiene a K . Se verifican las propiedades siguientes: a) $[K : \Delta]$ es el número de componentes indivisibles de W , las cuales se corresponden biyectivamente con los conjugados de α sobre Δ ; y b) Las extensiones Σ de Δ , respecto de las cuales cada Σ -componente irreducible de W es indivisible, son exclusivamente las extensiones de Γ .

1.2. *Algunas relaciones de incidencia.* — Sea W una variedad algebraica irreducible sobre Δ , y W' una subvariedad algebraica de W irreducible sobre Δ .

TEOREMA 1. — *Cada componente indivisible de W contiene por lo menos una componente indivisible de W' .*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\eta_0, \dots, \eta_n$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico Q de W' respecto de Δ ; Q pertenece por lo menos a una componente indivisible W^* de W . Por consiguiente, W^* contiene a la componente indivisible de W' que contiene a Q . Sea $\xi_0, \dots, \xi_n$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P de W^* respecto de Δ_s ; P es punto genérico de W respecto de Δ y punto genérico de W^* respecto de $K = \Delta(\xi_0, \dots, \xi_n) \cap \Delta_s$. Sea α un elemento primitivo de K sobre Δ y W_i la componente indivisible de W que corresponde al conjugado α_i de α sobre Δ .

Del Δ -isomorfismo $\Delta(\alpha) \cong \Delta(\alpha_i)$ se deducen por prolongación los isomorfismos

$$(1) \quad \Delta(\alpha, \xi_0, \dots, \xi_n) \cong \Delta(\alpha_i, \xi_0^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)}).$$

$$(2) \quad \Delta(\alpha, \eta_0, \dots, \eta_n) \cong \Delta(\alpha_i, \eta_0^{(i)}, \dots, \eta_n^{(i)}).$$

en donde $\xi_j, \xi_j^{(i)}$ y $\eta_j, \eta_j^{(i)}$, $j = 0, \dots, n$, son respectivamente, pares de elementos homólogos.

4) Véase, por ejemplo [10], I, 7, o bien [6], Teorema 3.

Sea $F(\alpha_i; X_0, \dots, X_n)$ una forma de $\Delta(\alpha_i) [X_0, \dots, X_n]$ de modo que se verifique

$$(3) \quad F(\alpha_i; \xi_0^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)}) = 0$$

En virtud del isomorfismo (1) tendremos

$$F(\alpha; \xi_0, \dots, \xi_n) = 0$$

pero Q pertenece a W^* , luego

$$F(\alpha; \eta_0, \dots, \eta_n) = 0$$

y en virtud de (2) se tiene

$$(4) \quad F(\alpha_i; \eta_0^{(i)}, \dots, \eta_n^{(i)}) = 0$$

De (3) y (4) se deduce que $Q_i \equiv (\eta_0^{(i)}, \dots, \eta_n^{(i)})$ es una $\Delta(\alpha_i)$ -especialización de $P_i \equiv (\xi_0^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)})$; pero según (1) P_i es punto genérico de W_i respecto de $\Delta(\alpha_i)$, luego Q_i pertenece a W_i . Ahora bien, de (2) se deduce que Q_i es punto genérico de W' respecto de Δ . Por consiguiente, W_i contiene la componente indivisible de W' que contiene a Q_i y la proposición está demostrada.

COROLARIO. — *Si W' es indivisible, W' pertenece a todas las componentes indivisibles de W .*

TEOREMA 2. — *Si Σ es una extensión de Δ , cada Σ -componente irreducible de W contiene por lo menos una Σ -componente irreducible de W' .*

DEMOSTRACIÓN:

Sea W_1 una Σ -componente irreducible de W , W_1^* una componente indivisible de W_1 y por tanto de W . En virtud del teorema 1, W_1^* contiene por lo menos una componente indivisible de W' . Por consiguiente, W_1 contiene un punto genérico Q de W' respecto de Δ ; luego la $(\Sigma \cap \Delta_s)$ -componente irreducible de W' que contiene a Q es una Σ -componente irreducible de W' , [6], II, Teorema 1, perteneciente a W_1 .

COROLARIO. — *Si W' es irreducible respecto de Σ , W' pertenece a todas las Σ -componentes irreducibles de W .*

1.3. *Anillos de especialización.* — Sea W una variedad algebraica irreducible sobre Δ de $P_n(\Omega)$, y $P = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ un punto genérico de W respecto de Δ .

Si $Q \equiv (\eta_0, \dots, \eta_n)$ es un punto de W , se llama *anillo de especialización de Q sobre P con relación a Δ* , al anillo $v_\Delta(Q; P)$ constituido por el elemento nulo de Ω y los elementos que admiten una expresión del tipo

$$F(\xi_0, \dots, \xi_n)/G(\xi_0, \dots, \xi_n)$$

siendo F y G formas del mismo grado de $\Delta[X_0, \dots, X_n]$ de modo que se verifique $G(\eta_0, \dots, \eta_n) \neq 0$, ⁵⁾.

Como P es punto genérico de W respecto de Δ , de $\eta_i \neq 0$, se deduce $\xi_i \neq 0$. Llamando $\zeta_j^{(i)} = \xi_j \xi_i^{-1}$, $j = 0, \dots, n$, se comprueba fácilmente que $v_\Delta(Q; P)$ coincide con el anillo formado por los elementos de $\Delta(\zeta_0^{(i)}, \dots, \zeta_n^{(i)})$ que admiten una expresión del tipo f/g , siendo f y g elementos del anillo $\Delta[\zeta_0^{(i)}, \dots, \zeta_n^{(i)}]$ de modo que $g(\eta_0 \eta_i^{-1}, \dots, \eta_n \eta_i^{-1}) \neq 0$.

Las propiedades siguientes son asimismo de deducción inmediata :

a) Si P' es punto genérico de W respecto de Δ , $v_\Delta(Q; P)$ y $v_\Delta(Q; P')$ son Δ -isomorfos.

b) Si Q' es punto genérico de la Δ -variedad algebraica irreducible asociada a Q , se verifica $v_\Delta(Q; P) = v_\Delta(Q'; P)$.

1.4. *Caracterización de los puntos de W que pertenecen a una única componente indivisible de W .* — Sea $Q \equiv (\eta_0, \dots, \eta_n)$ un punto de la variedad algebraica W , irreducible sobre Δ . Q pertenece por lo menos a una componente indivisible W^* de W . Sea $\xi_0, \dots, \xi_n$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P de W^* respecto de Δ_s ; P es punto genérico de W^* respecto de $K = \Delta(\xi_0, \dots, \xi_n) \cap \Delta_s$ y punto genérico de W con relación a Δ . Manifiestamente es $v_\Delta(Q; P) \subseteq v_K(Q; P)$.

LEMA 1. — *Es condición necesaria y suficiente para que se verifique $v_\Delta(Q; P) = v_K(Q; P)$, que K pertenezca a $v_\Delta(Q; P)$.*

DEMOSTRACIÓN :

Como K pertenece a $v_K(Q; P)$, la condición es necesaria.

⁵⁾ $v_\Delta(Q; P)$ se llama también *anillo local de Q sobre P respecto de Δ* . Aquí hemos adoptado la terminología de A. WEIL, [16], IV, 2.

Cada elemento ν de $\nu_K(Q; P)$ admite una expresión del tipo

$$\nu = \Phi(\xi_0, \dots, \xi_n) / \Psi(\xi_0, \dots, \xi_n)$$

siendo Φ y Ψ formas del mismo grado de $K[X_0, \dots, X_n]$ de modo que $\Psi(\eta_0, \dots, \eta_n) \neq 0$; ahora bien, si K pertenece al anillo $\nu_\Delta(Q; P)$ cada uno de los coeficientes de Φ y Ψ es del tipo

$$F(\xi_0, \dots, \xi_n) / G(\xi_0, \dots, \xi_n)$$

siendo F y G formas del mismo grado de $\Delta[X_0, \dots, X_n]$ de modo que $G(\eta_0, \dots, \eta_n) \neq 0$. Por consiguiente, si D_Ψ y D_Φ son, respectivamente, los productos de las formas G relativas a los coeficientes de Φ y Ψ , resulta que $\Phi \cdot D_\Psi$ y $\Psi \cdot D_\Phi$ son formas del mismo grado de $\Delta[X_0, \dots, X_n]$ tales que

$$\nu = \Phi(\xi_0, \dots, \xi_n) \cdot D_\Psi(\xi_0, \dots, \xi_n) / \Psi(\xi_0, \dots, \xi_n) \cdot D_\Phi(\xi_0, \dots, \xi_n)$$

y

$$\Psi(\eta_0, \dots, \eta_n) \cdot D_\Phi(\eta_0, \dots, \eta_n) \neq 0$$

luego ν pertenece a $\nu_\Delta(Q; P)$ de donde se deduce el aserto.

TEOREMA 3. — Si $\nu_\Delta(Q; P) = \nu_K(Q; P)$, se verifica: 1) W^* es la única componente indivisible de W que contiene a Q ; y 2) Si W' es la Δ -variedad algebraica irreducible asociada a Q , cada componente indivisible de W' pertenece a una única componente indivisible de W .

DEMOSTRACIÓN.

1) Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que Q pertenece también a la componente indivisible $W_j \neq W^*$ de W , 6). Sea α un elemento primitivo de K sobre Δ y α_j el conjugado de α sobre Δ que corresponde a W_j .

El Δ -isomorfismo $\Delta(\alpha) \cong \Delta(\alpha_j)$ es prolongable a un isomorfismo

$$(5) \quad \Phi(\alpha, \xi_0, \dots, \xi_n) \cong \Delta(\alpha_j, \xi_0^{(j)}, \dots, \xi_n^{(j)})$$

Los elementos $\xi_i^{(j)}$, $i = 0, \dots, n$, constituyen un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P_j de W_j respecto de $\Delta(\alpha_j)$.

Como $\nu_\Delta(Q; P) = \nu_K(Q; P)$, α pertenece a $\nu_\Delta(Q; P)$; por consiguiente existen formas del mismo grado F y G de $\Delta[X_0, \dots, X_n]$

6) Si W es indivisible la demostración es obvia, pues entonces es $K = \Delta$.

tales que $\alpha = F(\xi_0, \dots, \xi_n)/G(\xi_0, \dots, \xi_n)$ y $G(\eta_0, \dots, \eta_n) \neq 0$. Se tiene, pues, la relación

$$(6) \quad G(\xi_0, \dots, \xi_n) \cdot \alpha - F(\xi_0, \dots, \xi_n) = 0$$

de donde resulta, aplicando el isomorfismo (5),

$$(7) \quad G(\xi_0^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)}) \cdot \alpha_j - F(\xi_0^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)}) = 0$$

Como Q pertenece a $W^* \cap W_j$, Q es $\Delta(\alpha)$ -especialización de P y $\Delta(\alpha_j)$ -especialización de P_j . En consecuencia, de (6) y (7) se deducen las relaciones

$$G(\eta_0, \dots, \eta_n) \cdot \alpha - F(\eta_0, \dots, \eta_n) = 0$$

$$G(\eta_0, \dots, \eta_n) \cdot \alpha_j - F(\eta_0, \dots, \eta_n) = 0$$

que en virtud de la condición $G(\eta_0, \dots, \eta_n) \neq 0$ exigen $\alpha = \alpha_j$ que manifiestamente es absurdo.

2) Sea Q' un punto genérico de W' respecto de Δ ; Q' pertenece por lo menos a una componente indivisible W_i de W . Sea α_i el conjugado de α sobre Δ que corresponde a W_i . El Δ -isomorfismo $\Delta(\alpha) \cong \Delta(\alpha_i)$ es prolongable a un isomorfismo $\Delta(\alpha, \xi_0, \dots, \xi_n) \cong \Delta(\alpha_i, \xi_0^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)})$. Los elementos $\xi_\lambda^{(i)}$, $\lambda = 0, \dots, n$, constituyen un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P_i de W_i respecto de $\Delta(\alpha_i)$ y por tanto de W respecto de Δ . En virtud de 1.3. a) $v_\Delta(Q; P)$ y $v_\Delta(Q; P_i)$; son pues Δ -isomorfos, luego α_i pertenece al anillo $v_\Delta(Q; P_i)$; pero según 1.3. b) se verifica $v_\Delta(Q; P_i) = v_\Delta(Q'; P_i)$. Por consiguiente α_i pertenece a $v_\Delta(Q'; P_i)$, que en virtud del lema 1 exige $v_\Delta(Q'; P_i) = v_{K_i}(Q'; P_i)$, siendo $K_i = \Delta(\alpha_i)$, de donde resulta, según 1), que W_i es la única componente indivisible de W que contiene a Q' , de donde se deduce el aserto.

TEOREMA 4. — *Si W^* es la única componente indivisible de W que contiene a Q , se verifica $v_\Delta(Q; P) = v_K(Q; P)$.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea λ el primer índice i tal que $\eta_\lambda \neq 0$. Como P es punto genérico de W respecto de Δ se tiene $\xi_\lambda \neq 0$. llamando $\bar{\eta}_i = \eta_i \eta_\lambda^{-1}$ y $\bar{\xi}_i = \xi_i \xi_\lambda^{-1}$, $i = 0, \dots, n$, el sistema $(\bar{\eta}_0, \dots, \bar{\eta}_n)$ es Δ -especialización afín del $(\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_n)$. Como Q pertenece a W^* , $(\bar{\eta}_0, \dots, \bar{\eta}_n)$ es $\Delta(\alpha)$ -especialización afín del sistema $(\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_n)$, y en consecuencia, $(\bar{\eta}_0, \dots, \bar{\eta}_n; \alpha)$

es Δ -especialización afín de $(\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_n; \alpha)$ compatible con la Δ -especialización afín $(\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_n) \rightarrow (\eta_0, \dots, \eta_n)$.

Ahora bien $(\eta_0, \dots, \eta_n; \alpha)$ es la única de tales Δ -especializaciones. En efecto, si $(\eta_0, \dots, \eta_n; \beta)$ es Δ -especialización afín de $(\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_n; \alpha)$, entonces β lo es de α , y por tanto, β es uno de los conjugados α_j de α sobre Δ y como el Δ -isomorfismo $\Delta(\alpha) \cong \Delta(\alpha_j)$ es prolongable a un isomorfismo $\Delta(\alpha, \bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_n) \cong \Delta(\alpha_j, \bar{\xi}_0^{(j)}, \dots, \bar{\xi}_n^{(j)})$, entonces $(\eta_0, \dots, \eta_n; \alpha_j)$ es Δ -especialización afín de $(\bar{\xi}_0^{(j)}, \dots, \bar{\xi}_n^{(j)}; \alpha_j)$ pero $P_j \equiv (\bar{\xi}_0^{(j)}, \dots, \bar{\xi}_n^{(j)})$ es punto genérico de la componente indivisible W_j de W correspondiente a α_j , luego Q pertenece a W_j y en consecuencia $W_j = W$, que exige $\alpha_j = \beta = \alpha$.

Por consiguiente, de [16], pág. 30, b), resulta que α es cero único de un polinomio $F_0(\eta_0, \dots, \eta_n; Y)$ del anillo $\Delta[\eta_0, \dots, \eta_n; Y]$ de modo que $F_0(\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_n; \alpha) = 0$; pero α es separable con relación a Δ y por tanto separable respecto de $\Delta(\eta_0, \dots, \eta_n)$, luego $F_0(\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_n; Y)$ es lineal de donde se deduce que α es del tipo f/g siendo f y g elementos de $\Delta[\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_n]$ de modo que $g(\eta_0, \dots, \eta_n) \neq 0$, es decir, α pertenece a $v_\Delta(Q; P)$, que en virtud del lema 1 equivale a la igualdad $v_\Delta(Q; P) = v_K(Q; P)$.

TEOREMA 5. — *Si W es la única componente indivisible de W que contiene a Q y W' es la Δ -variedad algebraica irreducible apreciada a Q , entonces cada componente indivisible de W' pertenece a una única componente indivisible de W .*

DEMOSTRACIÓN :

Es consecuencia inmediata de los dos teoremas precedentes.

§ 2. VARIEDADES ALGEBRAICAS SEPARABLES.

2.1. *Algunas proposiciones auxiliares.* — Sea k un cuerpo conmutativo de característica $p \neq 0$, y $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ elementos de un cuerpo conmutativo K extensión del k . Consideremos la familia de extensiones de k

$$(1) \begin{cases} K_0 = k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p) \\ K_i = k(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}^p, \dots, \alpha_r^p), \quad i = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Como K_i es algebraico y finito sobre K_{i-1} , se verifica:

$$(2) \quad [k(\alpha_1, \dots, \alpha_r) : k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p)] = \prod_{i=1}^r [K_i : K_{i-1}]$$

pero $[K_i: K_{i-1}]$ es p o la unidad, luego el valor de la expresión (2) es p^h siendo h un número entero no negativo no superior a r .

Se verifican las proposiciones siguientes :

1. — Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son algebraicamente independientes sobre k , es $h = r$.

Pues entonces es $[K_i: K_{i-1}] = p$, $i = 1, \dots, r$.

De $\alpha \in K$ y $k(\alpha) \neq k(\alpha^p)$, se deduce $[k(\alpha): k(\alpha^p)] = p$, que exige la irreducibilidad, respecto de $k(\alpha^p)$, del polinomio $X^p - \alpha^p$, que a su vez, implica la no separabilidad de α respecto de $k(\alpha^p)$. En consecuencia :

2. — Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son algebraicos y separables respecto de k , es $h = 0$.

Recíprocamente :

3. — Si es $h = 0$, entonces $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ es una extensión algebraica y separable de k .

En efecto, sea α_0 un elemento de $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. De $h = 0$ se deduce

$$(3) \quad k(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p)$$

y por tanto

$$k(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) = k(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r^p)$$

de donde resulta, según 1, que α_r es algebraico respecto de $k(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})$ y la relación

$$[k(\alpha_0, \dots, \alpha_r): k(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})] = [k(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r^p): k(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})]$$

Si f es el polinomio mónico irreducible de $k(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}) [X]$ que posee el cero α_r , la relación precedente exige la irreducibilidad respecto de $k(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})$ del polinomio g obtenido sustituyendo los coeficientes del f por sus potencias de exponente p , y como g pertenece a $k(\alpha_0^p, \alpha_1^p, \dots, \alpha_{r-1}^p) [X]$ es también irreducible respecto de $k(\alpha_0^p, \dots, \alpha_{r-1}^p)$. Por consiguiente se verifica

$$[k(\alpha_0, \dots, \alpha_r): k(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})] = [k(\alpha_0^p, \dots, \alpha_r^p): k(\alpha_0^p, \dots, \alpha_{r-1}^p)]$$

que en virtud de (3) implica

$$k(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}) = k(\alpha_0^p, \alpha_1^p, \dots, \alpha_{r-1}^p)$$

que permite reiterar el proceso obteniéndose $k(\alpha_0) = k(\alpha_0^p)$; luego α_0 es algebraico sobre k y si φ es el polinomio mónico definidor de la

extensión $k(\alpha_0)$, también es irreducible respecto de k el polinomio Ψ obtenido sustituyendo los coeficientes del φ por sus potencias p -ésimas. La irreducibilidad de Ψ respecto de k exige la separabilidad de α_0 sobre k .

4. — Si es $h > 0$, existen h elementos $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_h}$ de los α_i de modo que cada α_i es algebraico y separable sobre $k(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_h})$.

En efecto, consideremos la familia de extensiones de k

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_0 = K_0 = k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p) \\ \Sigma_j = \Sigma_{j-1}(\alpha_{i_j}), \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

siendo i_j el primer índice i tal que α_{i_j} no pertenece a Σ_{j-1} .

Como $\Sigma_m = k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, se tiene

$$k(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m})(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p) = k(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m})(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

que en virtud de la proposición 3 exige la separabilidad de cada α_i respecto de $k(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m})$.

Ahora bien, de la cadena

$$k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p) = \Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \dots \subset \Sigma_{m-1} \subset \Sigma_m = k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

se deduce

$$p^h = [k(\alpha_1, \dots, \alpha_r) : k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p)] = \prod_{j=1}^m [\Sigma_j : \Sigma_{j-1}]$$

y como por construcción es $[\Sigma_j : \Sigma_{j-1}] = p$, $j = 1, \dots, m$, se verifica $m = h$.

COROLARIO. — Si t es el grado de trascendencia sobre k de $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, se verifica $t \leq h$.

5. — Si $\beta_1, \dots, \beta_s$ son elementos de $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ tales que cada α_i es algebraico y separable respecto de $k(\beta_1, \dots, \beta_s)$, se verifica $h \leq s$.

En efecto, según la proposición 3, la separabilidad de α_i $i = 1, \dots, r$, respecto de $k(\beta_1, \dots, \beta_s)$ exige

$$k(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

pero

$$K_0 = k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p) = k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p, \beta_1^p, \dots, \beta_s^p)$$

luego

$$p^h = [K_0(\beta_1, \dots, \beta_s) : K_0(\beta_1^p, \dots, \beta_s^p)]$$

y como el segundo miembro de esta relación no supera a p^5 , queda probado el aserto.

6. — h es el menor número de elementos de $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ que es necesario adjuntar a k para obtener un cuerpo respecto del cual $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ sea algebraico y separable; además tales elementos pueden elegirse de entre los que constituyen un sistema de generadores cualquiera de $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ sobre k .

Es consecuencia inmediata de las proposiciones 2 y 3 (si es $h = 0$), y de las proposiciones 4 y 5 (si es $h > 0$).

El número h que en virtud de la proposición 6 no depende del sistema de generadores de $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ sobre k , recibe el nombre de *p-grado de $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ sobre k* .

7. — Si K' es un subcuerpo de $K = k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ extensión del k , se verifica

$$h - t \geq h' - t'$$

siendo h' el *p-grado de K' sobre k* y t' el *grado de trascendencia de K' sobre k* .

En efecto, sea $\beta_1, \dots, \beta_s$ un sistema de generadores de K' sobre k . Cabe considerar las posibilidades siguientes:

a) $t = t'$.

Entonces K es una extensión algebraica finita de K' ; luego de las limitaciones

$$K \supseteq k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p) \supseteq k(\beta_1^p, \dots, \beta_s^p)$$

se deduce la relación

$$(4) \quad p^h \cdot [k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p) : k(\beta_1^p, \dots, \beta_s^p)] = [K : K'] \cdot p^{h'}$$

Por otra parte, si k_p es la imagen de k en el endomorfismo de K , obtenido asociando a cada uno de sus elementos su potencia p -ésima tendremos

$$(5) \quad [K : K'] = [k_p(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p) : k_p(\beta_1^p, \dots, \beta_s^p)] \geq [k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p) : k(\beta_1^p, \dots, \beta_s^p)]$$

La compatibilidad de (4) y (5) exige $h \geq h'$, que prueba el aserto.

b) $t > t'$.

En virtud de la proposición 6 existen t elementos γ_i de $K = k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ algebraicamente independientes sobre k de modo que

$h - t$ es el p -grado de K sobre $L = k(\gamma_1, \dots, \gamma_t)$. Por consiguiente, aplicando a) al subcuerpo $L(\beta_1, \dots, \beta_s)$ de K , tendremos:

$$(6) \quad p^{h-t} \geq [L(\beta_1, \dots, \beta_s): L(\beta_1^p, \dots, \beta_s^p)]$$

Ahora bien, $t - t'$ de los elementos γ_j son algebraicamente independientes sobre K' ; luego en virtud de [6], I, teorema 1 y de [16], Chap. I, Prop. 6, resulta teniendo en cuenta la proposición 6

$$(7) \quad [L(\beta_1, \dots, \beta_s): L(\beta_1^p, \dots, \beta_s^p)] = [T(\beta_1, \dots, \beta_s): T(\beta_1^p, \dots, \beta_s^p)] \geq p^{h''-t'}$$

siendo h'' el p -grado de $T(K')$ sobre k , en donde $T = k$ si es $t' = 0$ y $T = k(\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_{t'}})$ si es $t' > 0$.

De las relaciones (6) y (7) se deduce $h - t \geq h'' - t'$ y como en virtud de a) es $h'' \geq h'$ queda probado el aserto.

COROLARIO 1. — $h \geq h'$.

Pues $t \geq t'$.

COROLARIO 2. — Si es $h = t$, es $h' = t'$.

8. — Si k es perfecto, se verifica $h = t$.

En efecto, si k es perfecto se tiene $k = k_p$. Por consiguiente, si es $t = 0$ se deduce $[k(\alpha_1, \dots, \alpha_r): k] = [k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p): k]$ y por tanto $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p)$, es decir, $h = 0 = t$; si es $t > 0$, y $\beta_1, \dots, \beta_t$ son elementos de $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ algebraicamente independientes sobre k , de las limitaciones

$$\mathbb{I} k(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \supseteq k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p) \supseteq k(\beta_1^p, \dots, \beta_t^p)$$

$$k(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \supseteq k(\beta_1, \dots, \beta_t) \supseteq k(\beta_1^p, \dots, \beta_t^p)$$

y de la proposición 1 se deduce

$$p^h \cdot [k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p): k(\beta_1^p, \dots, \beta_t^p)] = [k(\alpha_1, \dots, \alpha_r): k(\beta_1, \dots, \beta_t)] \cdot p^t$$

pero $k = k_p$, luego

$$[k(\alpha_1, \dots, \alpha_r): k(\beta_1, \dots, \beta_t)] = [k(\alpha_1^p, \dots, \alpha_r^p): k(\beta_1^p, \dots, \beta_t^p)]$$

y por consiguiente es $h = t$.

DEFINICIÓN 1. — Sea t el grado de trascendencia sobre k de la extensión $k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Diremos que los elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ constituyen un sistema separable respecto de k en los casos siguientes: 1) Si $t = 0$

y cada α_i es separable respecto de k . 2) Si $t > 0$ y existen t elementos $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_t}$ entre los α_i de modo que cada α_{i_j} sea algebraico y separable sobre $k(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{j-1}})$.

9. — Es condición necesaria y suficiente para que $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ formen un sistema separable respecto de k , que se verifique $h = t$.

Que la condición es suficiente se deduce de la proposición 3 si es $t = 0$, y de la 4 si $t > 0$. La necesidad de la condición resulta de la proposición 2 si es $t = 0$, y de la 5 si es $t > 0$.

2.2. *Dominios de separabilidad de una variedad algebraica.* — Sea $(\chi_0, \dots, \chi_n)$ un representante reducido de un punto Q de dimensión d sobre Δ . Si las coordenadas reducidas $\chi_0, \dots, \chi_n$ forman un sistema separable respecto de Δ , también tiene esta propiedad, según 2.1. proposición 9, cualquier representante reducido de Q , y diremos que Q es separable respecto de Δ .

Sea V una variedad algebraica irreducible sobre Δ de $P_n(\Omega)$, P un punto genérico de V respecto de Δ , y $\xi_0, \dots, \xi_n$ un sistema de coordenadas reducidas de P . Si P' es también punto geométrico de V respecto de Δ , existe un representante reducido $(\xi'_0, \dots, \xi'_n)$ de P' de modo que $\xi_i, \xi'_i, i = 0, \dots, n$, son pares de elementos homólogos en un Δ -isomorfismo, y por consiguiente de la separabilidad de P respecto de Δ se deduce la de cualquier punto genérico de V respecto de Δ ; en tal caso diremos que V es separable respecto de Δ o bien que Δ es un dominio de separabilidad de V . Cada dominio de separabilidad de una variedad algebraica indivisible W se llama cuerpo de definición de W , 7).

Se dice que una Δ -variedad algebraica reducible es separable respecto de Δ , si lo es cada una de sus Δ -componentes irreducibles.

TEOREMA 1. — Si Δ es perfecto, cada punto y en consecuencia cada Δ -variedad algebraica, es separable respecto de Δ . ([13], Lemma).

Esta proposición es ahora consecuencia inmediata de las 2.1. 9 y 2.1. 8 aplicadas a un sistema de coordenadas reducidas del punto considerado. 8).

OBSERVACIÓN. — Si Δ es de característica $p \neq 0$, y Σ es un subcuerpo de Ω extensión del Δ , la separabilidad de un punto Q respecto de Δ no implica necesariamente su separabilidad respecto de Σ . Por

7) [16], Chap. IV; [10], I, 7, 1;

8) Si Ω es de característica nula la demostración es obvia.

ejemplo si ξ es un elemento de Ω transcendente sobre Δ , el punto $(1, \xi)$ de $P_1(\Omega)$ es separable respecto de Δ y no lo es respecto de $\Delta(\xi^p)$.

Ahora bien, se verifica la proposición siguiente :

LEMA. — Si $\dim_{\Delta} Q = \dim_{\Sigma} Q$, la separabilidad de Q respecto de Δ implica su separabilidad respecto de Σ .

DEMOSTRACIÓN :

En efecto, sea $\chi_0, \dots, \chi_n$ un sistema de coordenadas reducidas de Q . Supongamos que $\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_d}$ son algebraicamente independientes sobre Δ y que cada χ_i es algebraico y separable respecto de $\Delta(\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_d})$. Como $d = \dim_{\Delta} Q = \dim_{\Sigma} Q$, los elementos χ_{i_i} son algebraicamente independientes sobre Σ ; además cada χ_i es cero de un polinomio irreducible f_i de $\Sigma(\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_d})[X]$ que divide a un polinomio irreducible de $\Delta(\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_d})[X]$ respecto del cual χ_i es cero simple. Por consiguiente, cada χ_i es cero simple de f_i , de donde se deduce el aserto.

TEOREMA 2. — Si V es una variedad algebraica separable sobre Δ , cada extensión Σ de Δ es dominio de separabilidad de V .

DEMOSTRACIÓN :

Cada Σ -componente irreducible W de V es Σ -componente irreducible de una Δ -componente irreducible W_1 de V . Como W y W_1 tienen la misma dimensión⁹⁾, si P es un punto genérico de W respecto de Σ también lo es de W_1 respecto de Δ , y, en virtud de la hipótesis, P es, pues, separable respecto de Δ ; pero $\dim_{\Sigma} P = \dim_{\Delta} P$, luego según el lema precedente P es también separable respecto de Σ , es decir, Σ es un dominio de separabilidad de W , y la proposición está demostrada.

TEOREMA 3. — Sea V una Δ -variedad algebraica. Existe una extensión algebraica finita Σ de Δ , tal que Δ es dominio de separabilidad de V y las Σ -componentes irreducibles de V son las Δ -componentes irreducibles de V .

DEMOSTRACIÓN :

Si Δ es de característica nula la demostración es obvia.

9) Véase por ejemplo [6], II, Teorema 2.

Sea $p \neq 0$ la característica de Δ ; V_j , $j = 1, \dots, r$, las Δ -componentes irreducibles de V ; P_j un punto genérico de V_j respecto de Δ , y $\xi_{0j}, \dots, \xi_{jn}$ un sistema de coordenadas reducidas de P_j . El conjunto de los elementos ω de Ω para los que existe un número natural m tal que $\omega^{p^m} \in \Delta$, es un cuerpo perfecto Δ' extensión algebraica del Δ . En virtud del teorema 1, P_j es separable respecto de Δ' , es decir, existen d_j elementos $\xi_{ji_1}, \dots, \xi_{ji_{d_j}}$ algebraicamente independientes sobre Δ' entre las coordenadas reducidas ξ_{ji} de modo que cada ξ_{ji} es algebraico y separable respecto de $\Delta'(\xi_{ji_1}, \dots, \xi_{ji_{d_j}})$, o sea, ξ_{ji} es cero simple de un polinomio irreducible f_{ji} de $\Delta'(\xi_{ji_1}, \dots, \xi_{ji_{d_j}})[X]$. Por consiguiente si Σ_j es la extensión algebraica finita de Δ engendrada por los elementos de Δ' que figuran en los coeficientes de f_{ji} , $i = 0, \dots, n$, entonces P_j es manifiestamente separable respecto de Σ_j , y en virtud del lema anterior, $P_1, \dots, P_r$ son separables respecto de $\Sigma = \Delta(\Sigma_1, \dots, \Sigma_r)$ que es una extensión algebraica finita de Δ . Por otra parte, si F es una forma del anillo $\Sigma[X_0, \dots, X_n]$ existe un número natural M tal que F^{p^M} pertenece a $\Delta[X_0, \dots, X_n]$; luego si P_j es cero de F también lo es cada punto de V_j , y por consiguiente P_j es punto genérico de V_j respecto de Σ , lo cual exige la irreducibilidad de V_j respecto de Σ .

En resumen V_j , $j = 1, \dots, r$, son las Σ -componentes irreducibles de V , y cada P_j y por tanto cada V_j es separable respecto de Σ . La proposición está, pues, demostrada.

TEOREMA 4. — *Cada Δ -transformada racional de una variedad algebraica V irreducible y separable sobre Δ , es separable respecto de Δ .*

DEMOSTRACIÓN

Si $\xi_0, \dots, \xi_n$ es un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P de V respecto de Δ , la hipótesis de separabilidad de V respecto de Δ exige que el p -grado sobre Δ de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ sea la dimensión d de V (2.1. proposición 9)¹⁰; luego si V' es una Δ -transformada racional de V de dimensión d' y $\xi'_0, \dots, \xi'_n$ es un sistema de coordenadas reducidas de la imagen P' de P en la Δ -transformación racional $V \rightarrow V'$, de 2.1. proposición 7, corolario 2, resulta que el p -grado de $\Delta(\xi'_0, \dots, \xi'_n)$ respecto de Δ es d' , lo cual en virtud de 2.1, proposición 9 equivale a la separabilidad de V' respecto de Δ .

¹⁰ Si Δ es de característica nula la demostración es obvia.

§ 3. — VARIETADES ALGEBRAICAS LOCALMENTE NORMALES.

3.1. *Normalidad local relativa.* — Sea V una variedad algebraica irreducible sobre Δ de $P_n(\Omega)$, $P \equiv (\xi_0, \dots, \xi_n)$ un punto genérico de V respecto de Δ y $Q \equiv (\eta_0, \dots, \eta_n)$ un punto cualquiera de V .

Se dice que V es *normal en Q respecto de Δ* o bien que V es Δ -normal en Q , si $\nu_\Delta(Q; P)$ es cerrado en su cuerpo de cocientes, ¹¹⁾. Se dice que V es *localmente normal respecto de Δ* o simplemente que V es Δ -normal, si V es Δ -normal en cada uno de sus puntos ¹²⁾.

Si V' es una subvariedad algebraica de V , irreducible sobre Δ , 1.3. b) justifica la definición siguiente

Se dice que V es *normal sobre V' respecto de Δ* o bien que V es Δ -normal sobre V' , si V es Δ -normal en un punto genérico de V' respecto de Δ .

TEOREMA 1. — Si V es Δ -normal en Q , entonces Q pertenece a una única componente indivisible de V .

DEMOSTRACIÓN :

Q pertenece por lo menos a una componente indivisible V^* de V . Sea $\xi_0^*, \dots, \xi_n^*$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P^* de V^* respecto de Δ ; P^* es punto genérico de V respecto de Δ y punto genérico de V^* respecto de $K = \Delta(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*) \cap \Delta$.

La hipótesis de Δ -normalidad de V en Q implica que cada elemento de K , como elemento de $\Delta(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ entero sobre $\nu_\Delta(Q; P^*)$, pertenezca a $\nu_\Delta(Q; P^*)$. En virtud de 1.4. lema 1, se verifica, pues, $\nu_\Delta(Q; P^*) = \nu_K(Q; P^*)$, y según 1.4. teorema 3, V^* es la única componente indivisible de V que contiene a Q .

COROLARIO 1. — Si V es Δ -normal en Q y Σ es una extensión de Δ , entonces Q pertenece a una única Σ -componente irreducible de V .

Pues dos Σ -componentes irreducibles de V no tienen componente indivisible común.

COROLARIO 2. — Toda Δ -hipersuperficie de $P_n(\Omega)$, $n > 1$, irreducible y localmente normal respecto de Δ , es indivisible ¹³⁾.

¹¹⁾ Por convenio cerrado equivale a *integralmente cerrado*.

¹²⁾ En virtud de 1.3. a) estos conceptos no dependen del punto genérico P de V respecto de Δ elegido.

¹³⁾ Toda variedad algebraica irreducible sobre Δ de dimensión nula, es normal respecto de Δ .

OBSERVACIÓN. — Este último resultado no subsiste en el espacio afín como muestra el ejemplo siguiente.

Sea Δ el cuerpo de los números racionales y Ω el de los números complejos. La Δ -curva algebraica del plano afín $A_2(\Omega)$ definida mediante el polinomio $X^2 + 1$, es irreducible y normal respecto de Δ pero no es indivisible.

COROLARIO 3. — *Sea V' una subvariedad algebraica de V irreducible sobre Δ . Si V es Δ -normal sobre V' , cada componente indivisible de V' pertenece a una única componente indivisible de V , y por tanto a una única Σ -componente irreducible de V .*

Pues si V'_1 es una componente indivisible de V' y Q_1 es un punto genérico de V'_1 respecto de Δ_s , y por tanto, de V' respecto de Δ , V es Δ -normal en Q_1 y la componente indivisible de V que contiene a Q_1 es la única que contiene a V'_1 .

TEOREMA 2. — *Si V es localmente normal respecto de Δ , y posee una Δ -subvariedad algebraica indivisible V' , entonces V es indivisible.*

DEMOSTRACIÓN :

Pues de no ser así, 1.2. corolario exigiría que V' perteneciese a todas las componentes indivisibles de V , en contradicción con el corolario 3 del teorema 1.

COROLARIO. — *Si V es localmente normal respecto de Δ , y posee un Δ -punto, V es indivisible.*

Para cada índice i tal que $\xi_i \neq 0$, consideramos el anillo $A_i = \Delta [\zeta_0^{(i)}, \dots, \zeta_n^{(i)}]$, siendo $\zeta_j^{(i)} = \xi_j \xi_i^{-1}$, $j = 0, \dots, n$. Se tiene el siguiente criterio de normalidad local relativa:

Es condición necesaria y suficiente para la Δ -normalidad de V , que cada A_i sea cerrado en su cuerpo de cocientes.

En efecto :

1. *La condición es necesaria.* — Sea $\xi_i \neq 0$. Si u es un elemento de $\Delta (\zeta_0^{(i)}, \dots, \zeta_n^{(i)})$ entero sobre A_i , también es entero sobre cada $v_\Delta(Q; P)$ que corresponda a un punto $Q \equiv (\eta_0, \dots, \eta_n)$ de V tal que $\eta_i \neq 0$,¹⁴⁾. La Δ -normalidad de V implica que cada uno de tales

¹⁴⁾ pues $v_\Delta(Q; P)$ coincide con el conjunto de los elementos que admiten una expresión del tipo f/g siendo f y g elementos de $\Delta [\zeta_0^{(i)}, \dots, \zeta_n^{(i)}]$ de modo que $g(\eta_0 \eta_i^{-1}, \dots, \eta_n \eta_i^{-1}) \neq 0$.

anillos de especialización sea *cerrado* en $\Delta(\xi_0^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)})$; luego u pertenece a cada uno de ellos y el aserto es consecuencia inmediata de [4], Chap. II, Theorem 6.

2. *La condición es suficiente.* — Sea $Q \equiv (\eta_0, \dots, \eta_n)$ un punto cualquiera de V . Si $\eta_i \neq 0$ es $\xi_i \neq 0$ y como A_i es, por hipótesis, *cerrado* en $\Delta(\xi_0^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)})$ también lo es $v_{\Delta}(Q; P)$; luego V es Δ -normal en Q .

3.2. *Normalidad local absoluta.* — Sea W una Δ -variedad algebraica *indivisible* y Q un punto de W . Se dice que W es *absolutamente normal en Q* , si W es normal en Q respecto de *cualquier cuerpo de definición de W* . Se dice que W es *absolutamente normal* si lo es en cada uno de sus puntos [10], II, 2.1.

TEOREMA 3. — *Es condición necesaria y suficiente para que W sea absolutamente normal en Q , que W sea normal en Q respecto de un cuerpo perfecto Δ .*

DEMOSTRACIÓN.

Es obvio que la condición es necesaria. Veamos que es suficiente: Sea Σ un *cuerpo de definición* de W cualquiera $\xi_0, \dots, \xi_n$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico de W respecto de $\Delta(\Sigma)$. Como Δ es perfecto, $\Delta(\Sigma)$ es una extensión *separable de Δ* , luego de la hipótesis de Δ -normalidad de W en Q y de [4], Chp. V, Theorem 7, se deduce que $\Sigma[v_{\Delta}(Q; P)]$ es *cerrado* en su cuerpo de cocientes. Por consiguiente, $v_{\Delta(\Sigma)}(Q; P)$, que es el anillo de cocientes del $\Sigma[v_{\Delta}(Q; P)]$ respecto del subconjunto multiplicativamente estable formado por los elementos de $\Sigma(\Delta)[\xi_0, \dots, \xi_n]$ que no se anulan en Q , es asimismo *cerrado* en su cuerpo de cocientes. Ahora bien, de [16], Chap. II, Prop. 17, se deduce

$$v_{\Sigma}(Q; P) = v_{\Delta(\Sigma)}(Q; P) \cap \Sigma(\xi_0, \dots, \xi_n)$$

En consecuencia, $v_{\Sigma}(Q; P)$ es como $v_{\Delta(\Sigma)}(Q; P)$ *cerrado* en su cuerpo de cocientes, es decir, W es Σ -normal en Q .

OBSERVACIÓN 2. — La normalidad absoluta de una variedad algebraica irreducible sobre Δ , no implica su Δ -normalidad como muestra el ejemplo siguiente:

Sea Δ un cuerpo no perfecto de característica p , y a un elemento de Δ tal que $a^{1/p}$ no pertenezca a Δ . La Δ -curva algebraica C de

$P_2(\Omega)$ definida por $X_0^p + aX_1^p + X_2^p$ es indivisible y absolutamente normal. En cambio C no es localmente normal respecto de Δ , pues si λ es un elemento de Ω transcendente sobre Δ y $\mu = -1 - a\lambda$, los elementos $1, \lambda, \mu$ constituyen un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico de C respecto de Δ y $A_0 = \Delta[\lambda, \mu]$ no es cerrado en su cuerpo de cocientes, ya que a es entero sobre A_0 , pertenece a $\Delta(\lambda, \mu)$ y no a A_0 .

Si V es una variedad algebraica irreducible sobre Δ , pero no indivisible, adoptamos la definición siguiente :

DEFINICIÓN. — Se dice que V es absolutamente normal en Q , si se verifican las condiciones siguientes : 1) Q pertenece a una única componente indivisible V^* de V ; 2) V^* es absolutamente normal en Q .

TEOREMA 4. — Si V es absolutamente normal en Q y es separable respecto de Δ , entonces V es Δ -normal en Q .

DEMOSTRACIÓN.

Por definición, Q pertenece a una única componente indivisible V^* de V . Sea $\xi_0^*, \dots, \xi_n^*$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P^* de V^* respecto de Δ_s ; P^* es punto genérico de V respecto de Δ y punto genérico de V^* respecto de $K = \Delta(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*) \cap \Delta_s$. En virtud de 1.4. teorema 4, se verifica

$$(1) \quad v_{\Delta}(Q; P^*) = v_K(Q; P^*)$$

De la hipótesis de separabilidad de V sobre Δ resulta que K es cuerpo de definición de V^* , y por consiguiente V^* es K -normal en Q ; luego según (1) es V Δ -normal en Q .

Sea Δ' la mínima extensión perfecta de Δ contenida en Ω . Como las Δ' -especializaciones de un punto son sus Δ -especializaciones, la irreducibilidad de V sobre Δ implica su irreducibilidad sobre Δ' .

TEOREMA 5. — Es condición necesaria y suficiente para que V sea absolutamente normal en Q , que sea Δ' -normal en Q .

DEMOSTRACIÓN.

Como Δ' es perfecto, V es separable respecto de Δ' , y en virtud del teorema 4, la normalidad absoluta de V en Q implica la Δ' -normalidad de V en Q , es decir, la condición es necesaria.

La Δ' -normalidad de V en Q implica, según 3.1. teorema 1, que Q pertenece a una única componente indivisible V^* de V . Sea $\xi_n^*, \dots, \xi_0^*$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P^* de V^* respecto de Δ_s ; P^* es punto genérico de V respecto de Δ' y punto genérico de V^* respecto de $K' = \Delta'(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*) \cap \bar{\Delta}$. En virtud de 1.4. teorema 4 se tiene $v_{\Delta'}(Q; P^*) = v_{K'}(Q; P^*)$, y por consiguiente V^* es K' -normal en Q . Como Δ' es perfecto, también lo es K' ; luego según el teorema 3, V^* es absolutamente normal en Q . La condición es, pues, suficiente.

§ 4. GÉNERO DE UNA CURVA ALGEBRAICA.

4.1. *Bases normales de un cuerpo de funciones algebraicas de una variable. Fórmula de F. K. Schmidt.* — Sea k un cuerpo conmutativo cualquiera, K un cuerpo de funciones algebraicas de una variable sobre k , es decir, un cuerpo conmutativo extensión del k , de grado de trascendencia unidad sobre k , y engendrado (sobre k) por un sistema finito de elementos. Sea k^* el cuerpo de constantes de K , o sea, el cuerpo formado por los elementos de K que son algebraicos sobre k . Si k_0 es un subcuerpo de k^* extensión del k , entonces K es también un cuerpo de funciones algebraicas de una variable sobre k_0 , y diremos que k_0 es un cuerpo de referencia de K .

Sea ξ un elemento de K transcendente sobre k_0 ; R el anillo constituido por el elemento nulo de k_0 y por los elementos de K del tipo $f(\xi)/g(\xi)$ siendo $f(\xi)$ y $g(\xi)$ elementos de $k_0[\xi]$ tales que

$$\text{grado } f(\xi) \leq \text{grado } g(\xi)$$

Sea S el anillo constituido por los elementos de K que son enteros sobre $k_0[\xi]$.

Para cada elemento no nulo u de K consideremos, siguiendo a F. K. SCHMIDT [11], el mayor número entero $\rho(u)$ tal que $u \xi^{\rho(u)}$ pertenezca a S ¹⁵⁾.

Fácilmente se comprueban las siguientes propiedades de la función $u \rightarrow \rho(u)$.

a) Si u y v son elementos no opuestos de K se verifica

$$\rho(u + v) \geq \text{Min. } (\rho(u), \rho(v))$$

¹⁵⁾ Sea s un elemento de S . Como R es cerrado en $k_0(\xi)$, el polinomio mónico irreducible respecto de $k_0(\xi)$, que posee el cero s , es polinomio de dependencia integral de s sobre R , [14]. De aquí se deduce en particular la existencia del número $\rho(u)$ para cada elemento no nulo u de K .

b) Si $f(\xi)$ y $g(\xi)$ son elementos no nulos de $k_0[\xi]$ se verifica

$$\varrho(f(\xi)/g(\xi)) = \text{grado } f(\xi) - \text{grado } g(\xi)$$

c) Si u y v son elementos no nulos de K se verifica $\varrho(uv) \geq \varrho(u) + \varrho(v)$. Si u pertenece a $k_0(\xi)$ vale el signo de igualdad.

d) El anillo S está constituido por el elemento nulo de K y por los elementos u de K para los cuales es $\varrho(u) \geq 0$. Sea $n = [K : k_0(\xi)]$; si los elementos $s_1, \dots, s_n$ de S no forman una base modular de S sobre R , entonces existe un elemento u de K del tipo

$$u = \sum_{i=1}^m \delta_i s_i, \quad m \leq n, \quad \delta_i \in k_0, \quad \delta_m \neq 0$$

tal que $\varrho(u) > 0$.

e) Para cada elemento no nulo u de E es $\varrho(u) \leq 0$.

DEFINICIÓN 1. — Una base $u_1, \dots, u_n$ de K sobre $k_0(\xi)$ se dice que es normal, si $u_1 \xi^{\varrho(u_1)}, \dots, u_n \xi^{\varrho(u_n)}$ constituyen una base modular de S sobre R .

Como las demostraciones de [11], Satz 7 y Satz 9; así como la de [5], Satz 3, subsisten al considerar k_0 en lugar del cuerpo de constantes k^* , podemos enunciar la proposición siguiente :

TEOREMA 1. — Sea $u_1, \dots, u_n$ una base de K sobre $k_0(\xi)$ constituida por elementos de E elegidos de modo que I) u_1 pertenece a k^* ; II) Si u es un elemento de E linealmente independiente de $u_1, \dots, u_{j-1}$ sobre $k_0(\xi)$, es $\varrho(u) \leq \varrho(u_j)$.

De estas hipótesis se deduce :

1) $u_1, \dots, u_n$ es una base normal de K sobre $k_0(\xi)$.

2) $u_1, \dots, u_n$ es una base modular de E sobre $k_0[\xi]$.

3) Si F es el anillo constituido por los elementos de K que son enteros sobre $k_0[\xi^{-1}]$, entonces $u_1 \xi^{\varrho(u_1)}, \dots, u_n \xi^{\varrho(u_n)}$ es una base modular de F sobre $k_0[\xi^{-1}]$.

TEOREMA 2. — Sea $u_1, \dots, u_n$ una base modular de E sobre $k_0[\xi]$ de modo que $u_1 \xi^{\varrho(u_1)}, \dots, u_n \xi^{\varrho(u_n)}$ lo sea de F sobre $k_0[\xi^{-1}]$. Si se supone que los elementos u_i están numerados de modo que $\varrho(u_\lambda) \geq \varrho(u_\mu)$ para $\lambda < \mu$, entonces verifican las hipótesis del teorema 1.

DEMOSTRACIÓN :

Ante todo es obvio que $u_1, \dots, u_n$ constituyen una *base* de K sobre $k_0(\xi)$.

Cada elemento u de E es de la forma $u = \sum_{i=1}^n f_i \cdot u_i$ siendo f_i elementos de $k_0[\xi]$. Si es $u \neq 0$, procediendo como [11], Satz 9, resulta

$$(1) \quad \varrho(u) = \text{Min. } (\varrho(f_i \cdot u_i))$$

luego si h es el mayor índice i tal que $f_h \neq 0$ se tiene en virtud de las propiedades b) y c)

$$\varrho(u) \leq \varrho(f_h \cdot u_h) = -\text{grado } f_h + \varrho(u_h) \leq \varrho(u_h)$$

Por consiguiente si u es linealmente independiente sobre $k_0(\xi)$ de $u_1, \dots, u_{j-1}$, se verifica $\varrho(u) \leq \varrho(u_j)$; pues entonces es $h \geq j$.

Si es $u = 1$, como $\varrho(1) = 0$, la relación (1) exige $f_i \in k_0$ y $\varrho(u_i) = 0$ si $f_i \neq 0$; pero $\varrho(u_1) \geq \varrho(u_h) = 0$, luego $\varrho(u_1) = 0$. En consecuencia, los coeficientes del polinomio mónico e irreducible respecto de $k_0(\xi)$ que posee el cero u_1 pertenecen a $R \cap k_0[\xi] = k_0$; luego u_1 pertenece a $\bar{k}_0 \cap K = k^*$.

Verificándose pues las condiciones I) y II) del teorema 1, queda demostrada la proposición.

Cada sistema de elementos $u_1, \dots, u_n$ de K que verifique las hipótesis del teorema 1, o lo que en virtud del teorema 2 es equivalente, que verifique las tesis 2) y 3) del teorema 1, se denomina *base normal de E sobre $k_0[\xi]$* .

TEOREMA 3. — Sea $u_1, \dots, u_n$ una base normal de E sobre $k_0[\xi]$ y $v_1, \dots, v_n$ una base de K sobre $k_0(\xi)$ constituida por elementos de E . Si los elementos v_i están numerados de modo que $\varrho(v_\lambda) \geq \varrho(v_\mu)$ para $\lambda < \mu$ se verifica

$$\varrho(u_i) \geq \varrho(v_i), \quad i = 1, \dots, n$$

DEMOSTRACIÓN :

Si para algún índice j es $\varrho(u_j) < \varrho(v_j)$, entonces es $j > 1$ (ya que en virtud del teorema 2 se verifica $u_1 \in k^*$ y según las propiedades d) y e) resulta $\varrho(u_1) = 0 \geq \varrho(v_1)$). Por consiguiente v_j depende linealmente de $u_1, \dots, u_{j-1}$ sobre $k_0(\xi)$, y como $\varrho(v_1) \geq \dots \geq \varrho(v_j)$, también tienen esta propiedad los elementos $v_1, \dots, v_{j-1}$, lo cual

está en contradicción con la independencia lineal de $v_1, \dots, v_n$ sobre $k_0(\xi)$.

COROLARIO. — Si $u_1, \dots, u_n$ y $v_1, \dots, v_n$ son bases normales de E sobre $k_0[\xi]$ y los elementos u_i y v_i están numerados de modo que $\varrho(u_\lambda) \geq \varrho(u_\mu)$, $\varrho(v_\lambda) \geq \varrho(v_\mu)$ para $\lambda < \mu$, se verifica $\varrho(u_i) = \varrho(v_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Sea k' un subcuerpo de k^* extensión del k_0 . Como k^* es finito sobre $k \subseteq k_0$, resulta que k' es finito sobre k_0 . Se verifica la proposición siguiente :

TEOREMA 4. — Sea $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ una base de k' sobre k_0 y $u_1, \dots, u_m$ una base normal de E sobre $k'[\xi]$. Los elementos $u_{ij} = \alpha_i \cdot u_j$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, m$, constituyen una base normal de E sobre $k_0[\xi]$.

DEMOSTRACIÓN :

Como k' y $k_0(\xi)$ son linealmente disjuntos sobre k_0 , los elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ constituyen una base de $k'(\xi)$ sobre $k_0(\xi)$, y en consecuencia los elementos u_{ij} forman una base de K sobre $k_0(\xi)$.

Cada elemento u de R , como elemento de K entero sobre $k'[\xi]$, es expresable en la forma

$$u = \sum_{j=1}^m P_j \cdot u_j, \text{ siendo } P_j \in k'[\xi]$$

pero cada P_j admite una expresión del tipo $P_j = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot P_{ij}$ con $P_{ij} \in k_0[\xi]$, luego

$$u = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^r P_{ij} \cdot \alpha_i \right) \cdot u_j = \sum_{i,j} P_{ij} \cdot u_{ij}$$

Por consiguiente : Los elementos u_{ij} constituyen una base modular de E sobre $k_0[\xi]$.

Por otra parte, cada elemento s de F , como elemento entero de K sobre $k'[\xi^{-1}]$, se expresa en la forma

$$s = \sum_{j=1}^m T_j \cdot (u_j \xi^{e(u_j)}), \text{ siendo } T_j \in k'[\xi]$$

pero cada T_j admite una expresión del tipo $T_j = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot T_{ij}$ con $T_{ij} \in k_0[\xi]$, luego

$$s = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^r T_{ij} \cdot \alpha_i \right) \cdot u_j \cdot \xi^{q(u_j)} = \sum_{i,j} T_{ij} (\alpha_i \cdot u_j \xi^{q(u_j)})$$

y como $q(u_{ij}) = q(u_j)$ ¹⁶⁾, resulta

$$s = \sum_{i,j} T_{ij} (u_{ij} \xi^{q(u_{ij})})$$

Por consiguiente: *Los elementos $u_{ij} \xi^{q(u_{ij})}$ constituyen una base modular de F sobre $k_0[\xi^{-1}]$.*

Ahora el aserto es una consecuencia inmediata del teorema 2.

El concepto de *divisor primo de K* así como el de *orden* de un elemento de K respecto de un divisor primo de K , son independientes del cuerpo de referencia k_0 de K que se considere, y en consecuencia no dependen de k_0 las nociones de *divisor de K* , *divisor de un elemento de K* , *múltiplo de un divisor de K* , así como la de *divisores de K equivalentes*.

El cuerpo Σ_p de clases de restos asociado a un divisor primo P de K , es finito sobre k y por tanto sobre k_0 . Llamando *grado de P respecto de k_0* al número $[\Sigma_p : k_0]$, esta definición induce de modo natural la de *grado respecto de k_0* de un divisor D de K cualquiera, que designamos por $\text{grado}_{k_0} D$. Sea $\dim_{k_0} D$ el rango del k_0 -módulo constituido por los elementos de K que son múltiplos de D . Si $g_{k_0} - 1$ es el máximo del conjunto de diferencias $\text{grado}_{k_0} D - \dim_{k_0} D$ diremos que g_{k_0} es el *género de K respecto de k_0* .

Si g es el género de K en el sentido de F. K. SCHMIDT, [11], es decir, si $g = g_{k^*}$ se obtiene inmediatamente la relación

$$(2) \quad g_{k_0} = [k : k_0] (g - 1) + 1$$

la cual muestra en particular que g_{k_0} puede ser negativo.

Sea $u_1, \dots, u_n$ una base normal de E sobre $k_0[\xi]$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ es una base de k^* sobre k_0 y $v_1, \dots, v_m$ es una base normal de E sobre $k^*[\xi]$, los elementos $v_{ij} = \alpha_i \cdot v_j$ $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, m$ forman, según el teorema 4, una base normal de E sobre $k_0[\xi]$; en virtud del corolario del teorema 3 podemos pues escribir: $-\sum_{\lambda=1}^n q(u_\lambda) = -\sum_{i,j} q(v_{ij})$, y como $q(v_{ij}) = q(v_j)$, $i = 1, \dots, r$, resulta teniendo en cuenta que $r = [k^* : k_0]$.

$$-\sum_{\lambda=1}^n q(u_\lambda) = [k^* : k_0] \left(-\sum_{j=1}^m q(v_j) \right)$$

¹⁶⁾ Pues α_i y α_i^{-1} pertenecen a S .

Ahora bien, según [11], Satz 16, es $g = -\sum_{i=1}^m \rho(v_i) - m + 1$ luego

$$-\sum_{\lambda=1}^n \rho(u_\lambda) - [k^* : k_0]. \quad m = [k^* : k_0] (g - 1)$$

y según (2) se tiene la relación

$$g_{k_0} = -\sum_{\lambda=1}^n \rho(u_\lambda) - n + 1$$

que en lo sucesivo llamaremos fórmula de F. K. SCHMIDT.

4.2. *Género de una curva algebraica irreducible.* — Sea C una curva algebraica irreducible sobre Δ del espacio proyectivo $P_n(\Omega)$, P un punto genérico de C respecto de Δ y $\xi_0, \dots, \xi_n$ un sistema de coordenadas reducidas de P .

$\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ es un cuerpo de funciones algebraicas de una variable sobre Δ . Si Δ' es la mínima extensión perfecta de Δ contenida en Ω , entonces $\Delta_0 = \Delta(\xi_0, \dots, \xi_n) \cap \Delta'$ es un cuerpo de referencia de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$; además C es irreducible respecto de Δ_0 y P es punto genérico de C con relación a Δ_0 .

DEFINICIÓN 2. — Llamaremos Δ -género de C , al género de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ respecto de Δ_0 .

Veamos que esta definición es admisible, es decir, que el Δ -género de C no depende del punto genérico P de C considerado.

En efecto, sea P' otro punto genérico de C respecto de Δ . Como P y P' son asimismo puntos genéricos de C respecto de Δ_0 , existe un sistema de coordenadas reducidas ξ'_i de P' de modo que ξ_i, ξ'_i , $i = 0, \dots, n$, son pares de elementos homólogos en un Δ_0 -isomorfismo I_0 de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ sobre $\Delta(\xi'_0, \dots, \xi'_n)$. Por consiguiente, si se supone $\xi_0 = 1$ y que ξ_1 es transcendente sobre Δ , lo cual no restringe la generalidad del razonamiento, tendremos $\xi'_0 = 1$ y que ξ'_1 es transcendente sobre Δ así como la relación $[\Delta(\xi_1, \dots, \xi_n) : \Delta_0(\xi_1)] = [\Delta(\xi'_1, \dots, \xi'_n) : \Delta_0(\xi'_1)]$. Además, si u es un elemento de $\Delta(\xi_1, \dots, \xi_n)$ entero sobre $\Delta_0[\xi_1]$, su imagen u' en el Δ_0 -isomorfismo I_0 es entero sobre $\Delta_0[\xi'_1]$ y se verifica $\rho(u) = \rho(u')$.

Teniendo en cuenta la fórmula de F. K. SCHMIDT, estas consideraciones justifican la definición precedente.

De la definición de Δ -género de C se deduce :

El Δ -género de C es un número entero que es invariante en las Δ -transformaciones birracionales de C .

Si C es indivisible, el Δ -género de C es el género de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ en el sentido de F. K. Schmidt [11].

Si C es separable respecto de Δ , el Δ -género de C coincide con g_Δ , es decir, es el género de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ respecto del cuerpo de referencia Δ .

4.3. Comportamiento del género de una curva algebraica indivisible en las extensiones del cuerpo de referencia.

LEMA 1. — Sea Γ un cuerpo conmutativo cualquiera, $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ elementos algebraicos sobre Γ . Si Λ es un cuerpo conmutativo extensión del Γ , cada base de $\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ sobre Γ contiene una base de $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ sobre Λ .

DEMOSTRACIÓN :

Sea $u_1, \dots, u_r$ una base de $\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ sobre Γ . Una base de $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ sobre Λ se puede formar con monomios m_j , $j = 1, \dots, s$, en los elementos generadores α_k ; como cada m_j pertenece a $\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ se tienen las relaciones

$$(3) \quad m_j = \sum_{i=1}^r \gamma_{ij} \cdot u_i, \quad \gamma_{ij} \in \Gamma, \quad j = 1, \dots, s$$

Por otra parte, si u_t , $t = 1, \dots, r'$, es un sistema maximal de elementos linealmente independientes sobre Λ elegidos entre los u_i , se tienen las relaciones

$$(4) \quad u_h = \sum_{t=1}^{r'} \lambda_{th} \cdot u_t, \quad \lambda_{th} \in \Lambda, \quad h = 1, \dots, r$$

De (3) y (4) se deduce

$$m_j = \sum_{t=1}^{r'} \mu_{tj} \cdot u_t, \quad \mu_{tj} \in \Lambda, \quad j = 1, \dots, s$$

que en virtud de la independencia lineal de $m_1, \dots, m_s$ sobre Λ exigen $r' = s$, y por consiguiente $u_1, \dots, u_s$ constituyen una base de $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ sobre Λ .

Sea C^* una curva algebraica indivisible de $P_n(\Omega)$ y Σ una extensión de Δ .

TEOREMA 5. — Δ -género de $C^* \geq \Sigma$ -género de C^* .

DEMOSTRACIÓN :

Sea $\xi_0^*, \dots, \xi_n^*$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P^* de C^* respecto de Σ , y por tanto respecto de Δ ; ξ un elemento de $\Delta(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ transcendente sobre Δ ; Δ^* el cuerpo de constantes de $\Delta(\xi^*, \dots, \xi_n^*)$ y $u_1, \dots, u_m$ una base normal sobre $\Delta^*[\xi]$ del anillo E de los elementos de $\Delta(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ que son enteros sobre $\Delta[\xi]$. El Δ -género de C^* es en virtud de la fórmula de F. K. SCHMIDT

$$(5) \quad g_{\Delta^*} = - \sum_{i=1}^m \varrho(u_i) - m + 1$$

Como P^* es punto genérico de C^* respecto de Σ , Σ y $\Delta(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ son algebraicamente disjuntos sobre Δ , lo cual implica la trascendencia de ξ sobre Σ . Sea Σ^* el cuerpo de constantes de $\Sigma(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ y $u'_1, \dots, u'_{m'}$ una base normal sobre $\Sigma^*[\xi]$ del anillo E' de los elementos de $\Sigma(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ que son enteros sobre $\Sigma[\xi]$. El Σ -género de C^* es

$$(6) \quad g_{\Sigma^*} = - \sum_{\lambda=1}^{m'} \varrho'(u'_\lambda) - m' + 1$$

En virtud del lema 1 el sistema $u_1, \dots, u_m$ contiene una base $u_{i_1}, \dots, u_{i_m'}$ de $\Sigma(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ sobre $\Sigma^*(\xi)$. Sin restricción de generalidad podemos suponer $\varrho'(u_{i_\mu}) \geq \varrho'(u_{i_\nu})$ para $\mu < \nu$ y además $u_{i_1} \in \Delta^*$ (De 4.1 teorema 2 se deduce la existencia de un tal u_i).

Como para $i \neq i_1$ es $\varrho(u_i) < 0$, de las relaciones (5) y (6) se deduce

$$(7) \quad g_{\Delta^*} - g_{\Sigma^*} \geq \sum_{\lambda=1}^{m'} (\varrho'(u'_\lambda) - \varrho(u_{i_\lambda}))$$

Si se supone que los elementos u'_λ están numerados de modo que $\varrho'(u'_\mu) \geq \varrho'(u'_\nu)$ para $\mu < \nu$, se verifica en virtud del teorema 3

$$\varrho'(u'_\lambda) \geq \varrho(u_{i_\lambda}), \quad \lambda = 1, \dots, m'$$

y como manifiestamente es $\varrho'(u) \geq \varrho(u)$ para todo elemento u de $\Delta(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ se tiene

$$(8) \quad \varrho'(u'_\lambda) \geq \varrho(u_{i_\lambda}), \quad \lambda = 1, \dots, m'$$

Ahora el aserto es una consecuencia inmediata de (7) y (8).

LEMA 2. — Sean L y T subcuerpos de Ω extensiones del Δ , algebraicamente disjuntos sobre Δ . Si L es separable respecto de Δ se verifica

- 1) $T(L) \cap \bar{L} = (T \cap \bar{A})(L)$.
- 2) T y L son linealmente disjuntos sobre $T \cap A$.

DEMOSTRACIÓN :

1) Como $T \cap \bar{A}$ es algebraicamente cerrado en T , el aserto es una consecuencia inmediata de [4], Chap. III, Theorem 4.

2) Si $t_1, \dots, t_h$ son elementos de T que dependen linealmente sobre L , entonces también son linealmente dependientes respecto de un subcuerpo L' de L , siendo L' una extensión separable de A engendrada por un sistema finito de elementos; luego en virtud de [6], I, Teorema 3, $t_1, \dots, t_h$ también son linealmente dependientes respecto de $T \cap A$, de donde se deduce fácilmente el aserto.

TEOREMA 6. — Si $A^*(\Sigma)$ es separable respecto de A^* , se verifica A) $\Sigma^* = A^*(\Sigma)$; y B) El A -género de C^* y el Σ -género de C^* coinciden ¹⁷⁾.

DEMOSTRACIÓN :

$$A) \quad \Sigma^* = \Sigma(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*) \cap \bar{\Sigma} = A^*(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)(\Sigma \cap \overline{A^*(\Sigma)})$$

llamando $T = A^*(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ y $L = A^*(\Sigma)$, y aplicando el lema 2, 1), se obtiene

$$\Sigma^* = (A^*(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*) \cap \bar{A^*(\Sigma)})(\Sigma) = (A(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*) \cap \bar{A})(\Sigma)$$

o sea $\Sigma^* = A^*(\Sigma)$.

B) En virtud de 4.1. teorema 1, los anillos $A^*[\xi, u_1, \dots, u_m]$ y $A^*[\xi^{-1}, u_1 \xi^{e(u_1)}, \dots, u_m \xi^{e(u_m)}]$ son cerrados en $A(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$. De la hipótesis y de A) se deduce que Σ^* es separable sobre A^* , luego según [4], Chap. V, Theorem 7, resulta :

B₁₎ $\Sigma^*[\xi, u_1, \dots, u_m]$ y $\Sigma^*[\xi^{-1}, u_1 \xi^{e(u_1)}, \dots, u_m \xi^{e(u_m)}]$ son cerrados en $\Sigma(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$.

Por otra parte, llamando $T = A^*(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$, $L = \Sigma^*$, y aplicando el lema 2, 2), se deduce la disjunción lineal de Σ^* y $A^*(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ sobre A^* , la cual implica según [16], Chap. I, Prop. 5, la disjunción lineal de $A^*(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ y $\Sigma^*(\xi)$ sobre $A^*(\xi)$; por consiguiente, cada base de $A(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ sobre $A^*(\xi)$ es base de $\Sigma(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ sobre $\Sigma^*(\xi)$. En particular se verifica :

¹⁷⁾ Utilizamos la misma notación que en el teorema 5.

$B_2)$ $u_1, \dots, u_m$ es una base de $\Sigma(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ sobre $\Sigma^*(\xi)$.

De B_1) y $B_2)$ se deduce que $u_1, \dots, u_m$ es una base normal sobre $\Sigma^*[\xi]$ del anillo de los elementos de $\Sigma(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ que son enteros sobre $\Sigma[\xi]$. Por consiguiente

$$g_{\Delta^*} = - \sum_{i=1}^m \varrho(u_i) - m + 1 = g_{\Sigma^*}$$

COROLARIO. — Si Σ es separable sobre Δ , entonces Σ^* lo es sobre Δ^* y se verifica $g_{\Delta^*} = g_{\Sigma^*}$.

TEOREMA 7. — De Δ -género $C^* = \Delta'$ -género C^* , se deduce Δ -género de $C^* = \Sigma$ -género de C^* para cualquier extensión Σ de Δ .

DEMOSTRACIÓN :

En virtud del teorema 5 se verifica la limitación

$$(9) \quad \Delta\text{-género } C^* \geq \Delta\text{-género } C^* \geq \Delta'(\Sigma)\text{-género } C^*$$

Como Δ' es perfecto, $\Delta'(\Sigma)$ es separable sobre Δ' , luego del corolario del teorema 6 resulta

$$(10) \quad \Delta'(\Sigma)\text{-género } C^* = \Delta'\text{-género } C^*$$

De las relaciones (9) y (10) se deduce inmediatamente el aserto.

EJEMPLOS.

1. — Sea Δ un cuerpo conmutativo no perfecto de característica $p \neq 2$. Sea a un elemento de Δ de modo que $a^{1/p}$ no pertenezca a Δ . Consideremos la Δ -curva algebraica plana C definida mediante la forma

$$X_2^2 X_0^{p-2} + X_1^p + a X_0^p$$

La curva C es indivisible y separable respecto de Δ . Si ξ es un elemento de Ω transcendente sobre Δ , el punto $(1, \xi, \eta)$ siendo $\eta^2 + \xi^p + a = 0$, es un punto genérico de C respecto de Δ . Se comprueba fácilmente que los elementos u de $\Delta(\xi, \eta)$ enteros sobre $\Delta[\xi]$ tales que $\varrho(u) \geq -1$ son del tipo

$$u = \delta_0 + \delta_1 \xi, \quad \delta_i \in \Delta, \quad i = 0, 1$$

En consecuencia el Δ -género de C es

$$g_{\Delta} = - \varrho(u_2) - 2 + 1 > 0$$

Sea $\Sigma = \Delta(a^{1/p})$; entonces $v = \eta/(\xi + a^{1/p})^{\frac{p-1}{2}}$ es un elemento de $\Sigma(\xi, \eta)$, entero sobre $\Sigma[\xi]$, no perteneciente a $\Sigma[\xi]$, tal que $\varrho(v) = -1$ (pues v es cero del polinomio $Z^2 + \xi + a^{1/p}$). Por consiguiente el Σ -género de C es

$$g_{\Sigma} = -\varrho(v) - 2 + 1 = 0$$

2. — Sea Δ un cuerpo conmutativo no perfecto de característica 2. Sea a un elemento de Δ de modo que $a^{1/2}$ no pertenezca a Δ . Consideremos la Δ -curva algebraica plana C definida mediante la forma

$$X_2^2 X_0 + X_1^3 + \alpha X_1 X_0^2$$

La curva C es indivisible, y separable respecto de Δ . Si ξ es un elemento de Ω transcendente sobre Δ , el punto $(1, \xi, \eta)$, siendo $\eta^2 + \xi^3 + a\xi = 0$, es un punto genérico de C respecto de Δ . Como en el ejemplo precedente, los elementos u de $\Delta(\xi, \eta)$ enteros sobre $\Delta[\xi]$ tales que $\varrho(u) \geq -1$ pertenecen a $\Delta[\xi]$. Por consiguiente, el Δ -género de C es

$$g_{\Delta} = -\varrho(\eta) - 2 + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$$

Si $\Sigma = \Delta(a^{1/2})$, entonces $u = \eta/(\xi + a^{1/2})$ es un elemento de $\Sigma(\xi, \eta)$, entero sobre $\Sigma[\xi]$, no perteneciente a $\Sigma[\xi]$ y tal que $\varrho(u) = -1$ (pues u es cero del polinomio $Z^2 + \xi$). En consecuencia el Σ -género de C es

$$g_{\Sigma} = -\varrho(u) - 2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

En los ejemplos considerados se tiene, pues, $g_{\Delta} > g_{\Sigma}$.

4.4. *Relación entre el género de una curva algebraica irreducible con el de sus componentes indivisibles.* — Sea C una curva algebraica irreducible sobre Δ de $P_n(\Omega)$, $\xi_0, \dots, \xi_n$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico de C respecto de Δ , y N la mínima extensión de GALOIS de Δ que contiene a $\Gamma = \Delta(\xi_0, \dots, \xi_n) \cap \Delta_s$. Se verifica la proposición siguiente :

TEOREMA 8. — *Las componentes indivisibles de C poseen el mismo N -género g_{N^*} , y si g_{Δ_0} es el Δ -género de C se tiene*

$$(11) \quad g_{\Delta_0} = r_2 (g_{N^*} - 1) + 1$$

siendo r el número de componentes indivisibles de C .

DEMOSTRACIÓN :

De la disjunción lineal de Δ' y Δ_s sobre $\Delta' \cap \Delta_s = \Delta$, [6], I, Teorema 2, se deduce la de $\Delta_0 = \Delta(\xi_0, \dots, \xi_n) \cap \Delta'$ y Γ sobre Δ , la cual equivale a la relación $[\Delta_0(\Gamma); \Delta_0] = [\Gamma: \Delta]$ es decir, $[\Delta^*: \Delta_0] = [\Gamma: \Delta]$; pero $[\Gamma: \Delta]$ es el número r de componentes indivisibles de C , luego según la relación (2), 4.1, se tiene

$$g_{\Delta_0} = r \cdot (g - 1) + 1$$

siendo g el género del cuerpo $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ en el sentido de F. K. SCHMIDT, es decir, g es el Δ^* -género de la componente indivisible C^* de C de punto genérico $P \equiv (\xi_0, \dots, \xi_n)$, que en virtud del corolario del teorema 6, es igual al N -género g_{N^*} de C^* ya que N es una extensión separable de Γ . Como el concepto de Δ -género de C es independiente del punto genérico de C respecto de Δ que se considere, resulta que g_{N^*} es también el N -género de cualquier otra componente indivisible de C y la proposición está demostrada.

COROLARIO. — *Toda curva algebraica irreducible respecto de Δ de Δ -género cero, es indivisible.*

OBSERVACIÓN. — De la relación (11) se deduce que nuestra definición de género de una curva algebraica irreducible, es compatible con la definición clásica de género de una curva algebraica *no indivisible* [8].

§ 5. MODELOS PROYECTIVOS LOCALMENTE NORMALES DE UNA VARIEDAD ALGEBRAICA.

Sea V una variedad algebraica irreducible sobre Δ de $P_n(\Omega)$ de dimensión $d > 0$. Se dice que la Δ -variedad algebraica V' es un *modelo proyectivo localmente normal respecto de Δ* de V , si se verifican las condiciones siguientes :

1. — V' pertenece a un espacio proyectivo sobre Ω , es localmente normal respecto de Δ y Δ -transformada birracional de V .
2. — La Δ -transformación birracional $V \leftarrow \rightarrow V'$ es regular sobre V' y carece de elementos fundamentales sobre V . [18], II, 3.

5.1. *Modelos proyectivos absolutamente normales de una curva algebraica.* — Si $d = 1$, es decir, si V es una curva, cada Δ -transfor-

mada birracional de V perteneciente a un espacio proyectivo sobre Ω y localmente normal respecto de Δ , es un modelo proyectivo localmente normal de V respecto de Δ . [18], II, 3.

Sea C una curva algebraica irreducible sobre Δ de $P_n(\Omega)$ y Δ' la mínima extensión perfecta de Δ contenida en Ω .

TEOREMA 1. — *Si C es separable respecto de Δ y $g_\Delta = g_{\Delta'}$, cada Δ -transformada birracional de C localmente normal respecto de Δ es absolutamente normal.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\xi_0, \dots, \xi_n$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P de C respecto de Δ y por tanto respecto de Δ' . Si ξ es un elemento de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ transcendente sobre Δ , la hipótesis de separabilidad de C respecto de Δ implica, en virtud de [6], I, teorema 3 y [16], I, Prop. 5, la disjunción lineal de $\Delta'(\xi)$ y $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ sobre $\Delta(\xi)$. Por consiguiente, cada base de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ sobre $\Delta(\xi)$ es base de $\Delta'(\xi_0, \dots, \xi_n)$ sobre $\Delta'(\xi)$.

Si $u_1, \dots, u_m$ y $v_1, \dots, v_m$ son, respectivamente, bases de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ sobre $\Delta(\xi)$ y de $\Delta'(\xi_0, \dots, \xi_n)$ sobre $\Delta'(\xi)$ que verifiquen las condiciones de 4.1. teorema 1, la hipótesis $g_\Delta = g_{\Delta'}$ y 4.1. teorema 3 exigen, teniendo en cuenta la fórmula de F. K. SCHMIDT, las relaciones $\varrho'(v_i) = \varrho(u_i)$, $i = 1, \dots, m$. Por consiguiente, los elementos $u_1, \dots, u_m$ satisfacen, respecto de Δ' , las condiciones de 4.1. teorema 1; luego se verifica:

$\Delta'[\xi, u_1, \dots, u_m]$ y $\Delta'[\xi^{-1}, u_1 \xi^{e(u_1)}, \dots, u_m \xi^{e(u_m)}]$ son cerrados en su cuerpo de cocientes.

En virtud de [18], II, 2, Lemma 5, la proposición estará demostrada si construimos una Δ -transformada birracional de C , perteneciente a un espacio proyectivo sobre Ω , y que sea absolutamente normal. Para ello sea ϱ un número entero *negativo* tal que $\varrho \leq \varrho(u_m)$; pongamos

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi x_0; y_0 = x_0 \cdot x_1^{-e-1}; y_1 = x_1 \cdot x_0^{-e-1} \\ y_{j+1} &= u_j \cdot x_0^{-e} \\ y_{j+m+1} &= u_j \cdot x_0^{-e} \cdot \xi^{e(u_j)-e} \end{aligned} \right\} j = 1, \dots, m$$

siendo x_0 un elemento de Ω transcendente sobre $\Delta(\xi)$, y consideremos la Δ -correspondencia algebraica irreducible asociada al par (x_0, x_1) ;

$y_0, \dots, y_{2m+1}$). La variedad imagen de esta correspondencia algebraica es decir, el lugar geométrico de las Δ -especializaciones de $(y_0, \dots, y_{2m+1})$ compatibles con las Δ -especializaciones de (x_0, x_1) , verifica las condiciones apetecidas. En efecto, dicha imagen es la Δ -variedad algebraica irreducible C' asociada al punto $P' \equiv (y_0, \dots, y_{2m+1})$, del cual son representantes reducidos

$$(1) \quad P' \equiv (\xi^{-e-1}, \xi, u_1, \dots, u_m, u_1 \xi^{v(u_1)}, \dots, u_m \xi^{v(u_m)})$$

$$(2) \quad P' \equiv (\xi^{-1}, \xi^{e+1}, u_1 \xi^e, \dots, u_m \xi^e, u_1 \xi^{v(u_1)}, \dots, u_m \xi^{v(u_m)})$$

C' es, pues, una Δ -transformada birracional de C de $P_{2m+1}(\Omega)$. Veamos finalmente que C' es localmente normal respecto de Δ' y por consiguiente absolutamente normal (3.2. teorema 5). Los anillos de coordenadas reducidas (sobre Δ') relativos a los representantes (1) y (2) de P' , coinciden respectivamente con $\Delta'[\xi, u_1, \dots, u_m]$ y $\Delta'[\xi^{-1}, u_1 \xi^{v(u_1)}, \dots, u_m \xi^{v(u_m)}]$, que como hemos demostrado, son cerrados en su cuerpo de cocientes; luego: si Q' es un punto de C' en el cual C' no es Δ' -normal, entonces Q' pertenece a la variedad lineal L_{2m-1} definida por el sistema de formas Y_2, Y_{m+2} . Ahora bien, como L_{2m-1} es no incidente con C' queda probado el aserto.

COROLARIO. — Si C es separable respecto de Δ y es $g_\Delta \leq 0$, cada Δ -transformada birracional de C localmente normal respecto de Δ es absolutamente normal.

TEOREMA 2. — Si C es separable respecto de Δ y posee en un espacio proyectivo sobre Ω una Δ -transformada birracional absolutamente normal C' , entonces se verifica $g_\Delta = g_{\Delta'}$.

DEMOSTRACIÓN.

C' es, como C , irreducible y separable con relación a Δ . Sea $\xi'_0, \dots, \xi'_h$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P' de C' respecto de Δ y por tanto respecto de Δ' . Según 3.2. teorema 4, C' es localmente normal respecto de Δ y Δ' ; luego si $\xi'_i \neq 0$ $A_i = \Delta[\xi'_0 \xi'^{-1}_i, \dots, \xi'_h \xi'^{-1}_i]$ y $A'_i = \Delta'[\xi'_0 \xi'^{-1}_i, \dots, \xi'_h \xi'^{-1}_i]$ son cerrados en sus respectivos cuerpos de cocientes. (3.1).

En virtud del teorema de normalización de E. NOETHER⁽¹⁸⁾, existe un elemento ξ de A_i , tal que A_i es el anillo de los elementos de

¹⁸⁾ [4], Chap. II.

$\Delta(\xi'_0, \dots, \xi'_h)$ que son enteros sobre $\Delta[\xi]$. Si $u_1, \dots, u_m$ es una base de $\Delta(\xi'_0, \dots, \xi'_h)$ sobre $\Delta(\xi)$ que verifique las condiciones de 4.1. teorema 1, se tienen las relaciones

$$(3) \quad \Delta[\xi'_0 \xi'^{-1}_i, \dots, \xi'_h \xi'^{-1}_i] = A_i = \Delta[\xi, u_1, \dots, u_m]$$

$$(4) \quad g_A = - \sum_{\lambda=1}^m \rho(u_\lambda) - m + 1$$

De (3) se deduce

$$\Delta'[\xi, u_1, \dots, u_m] = \Delta'[\xi'_0 \xi'^{-1}_i, \dots, \xi'_h \xi'^{-1}_i] = A'_i$$

y como A'_i es *cerrado* en $\Delta'(\xi'_0, \dots, \xi'_h)$ también lo es el anillo $\Delta'[\xi, u_1, \dots, u_m]$. La separabilidad de C' respecto de Δ , exige la disjunción lineal de $\Delta'(\xi)$ y $\Delta(\xi'_0, \dots, \xi'_h)$ sobre $\Delta(\xi)$, y por consiguiente $u_1, \dots, u_m$ es base de $\Delta'(\xi'_0, \dots, \xi'_h)$ sobre $\Delta'(\xi)$. De estas consideraciones se deduce:

$$(5) \quad u_1, \dots, u_m \text{ es base modular de } A'_1 \text{ sobre } \Delta'[\xi].$$

Si B'_i es el anillo de los elementos de $\Delta'(\xi'_0, \dots, \xi'_h)$ que son enteros sobre $\Delta'[\xi^{-1}]$, se verifica:

$$(6) \quad u_1 \xi^{e(u_1)}, \dots, u_m \xi^{e(u_m)} \text{ es base modular de } B'_i \text{ sobre } \Delta'[\xi^{-1}].$$

En efecto, consideremos la Δ -curva algebraica irreducible C_1 de $P_{m+1}(\Omega)$ asociada al punto $P_1 \equiv (\xi^{-1}, u_1 \xi^{e(u_1)}, \dots, u_m \xi^{e(u_m)})$. C_1 es manifiestamente Δ -transformada birracional de C' . En virtud de 4.1. teorema 1,3), $\Delta[\xi^{-1}, u_1 \xi^{e(u_1)}, \dots, u_m \xi^{e(u_m)}]$ es *cerrado* en su cuerpo de cocientes y por tanto también goza de esta propiedad $v_\Delta(Q_1; P_1)$ para cada punto $Q_1 \equiv (\eta_0, \dots, \eta_{m+1})$ de C_1 tal que $\eta_1 \neq 0$. La Δ -especialización $P_1 \rightarrow Q_1$ es prolongable a una Δ -especialización $(P_1, P') \rightarrow (Q_1, Q')$ en donde $Q' \equiv (\zeta'_0, \dots, \zeta'_h)$ es un punto de C' . Como $v_\Delta(Q_1; P_1)$ es *cerrado* en su cuerpo de cocientes, los elementos $\xi'^{-1}_0 \xi'^{-1}_i, \dots, \xi'^{-1}_h \xi'^{-1}_i$ siendo i un índice tal que $\zeta'_i \neq 0$, pertenecen a $v_\Delta(Q_1; P_1)$ y Q' está determinado; ahora bien A_i es *cerrado* en su cuerpo de cocientes y como la Δ -especialización $(P', P_1) \rightarrow (Q', Q_1)$ es prolongación de la $P' \rightarrow Q'$, resulta que (Q_1, Q') es elemento birregular de la Δ -transformación birracional $C_1 \leftarrow C'$. Por consiguiente se verifica $v_{\Delta'}(Q_1; P_1) = v_{\Delta'}(Q'; P')$. Como A'_i es *cerrado* en su cuerpo de cocientes, también goza de esta propiedad $v_{\Delta'}(Q_1; P_1) = v_{\Delta'}(Q'; P')$, y por tanto $\Delta'[\xi^{-1}, u_1 \xi^{e(u_1)}, \dots, u_m \xi^{e(u_m)}]$ es *cerrado* en su cuerpo de

cocientes, de donde se deduce (6) ya que $u_1 \xi^{a(u_1)}, \dots, u_m \xi^{a(u_m)}$ son linealmente independientes respecto de $\Delta'(\xi)$.

De (5), (6), 4.1. teorema 2, 4.1. teorema 1, y de la fórmula de F. K. SCHMIDT resulta

$$(7) \quad g_{\Delta'} = - \sum_{\lambda=1}^m \rho(u_\lambda) - m + 1$$

De las relaciones (4) y (7) se deduce inmediatamente el aserto.

TEOREMA 3. — Si C es una Δ -curva algebraica indivisible de $P_n(\Omega)$ absolutamente normal, entonces el género de C no depende del cuerpo de definición de C que se considere.

DEMOSTRACIÓN.

Sean Σ_1 y Σ_2 cuerpos de definición de C . Como C pertenece a un espacio proyectivo sobre Ω y es absolutamente normal, se verifica, en virtud del teorema 2, $g_{\Sigma_1} = g_{\Sigma'_1}$ y $g_{\Sigma_2} = g_{\Sigma'_2}$ siendo Σ'_i , $i = 1, 2$, la mínima extensión perfecta de Σ_i contenida en Ω ; luego según 4.3. teorema 7 resulta

$$g_{\Sigma_1} = g_{\Sigma_1(\Sigma_2)} = g_{\Sigma_2}$$

como se quería demostrar.

5.2. Algunas proposiciones auxiliares.

Sea V una variedad algebraica irreducible sobre Δ , de dimensión $d > 0$ de $P_n(\Omega)$; u_{ij} , $i = 1, \dots, h \leq d$, $j = 1, \dots, s \geq h$ elementos de Ω algebraicamente independientes sobre Δ ; $\xi_0, \dots, \xi_n$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico P de V respecto de $\Delta(u_{11}, \dots, u_{hs})$,¹⁸⁾ y $\eta_1, \dots, \eta_s$ un sistema de elementos de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ de grado de trascendencia $t \geq h$ sobre Δ .

LEMA. — a) $u_{i0} = u_{i1} \eta_1 + \dots + u_{is} \eta_s$ es transcendente sobre $\Delta(u_{i1}, \dots, u_{is})$; b) El grado de trascendencia del sistema $\eta_1, \dots, \eta_s$ sobre $\Delta(u_{i1}, \dots, u_{is}, u_{i0})$ es $t - 1$; c) Si Ω es de característica $p \neq 0$ y u_{i0} pertenece a $\Delta(u_{i1}, \dots, u_{is}, \xi_0^p, \dots, \xi_n^p)$ entonces $\eta_1, \dots, \eta_s$ pertenecen a $\Delta(\xi_0^p, \dots, \xi_n^p)$.

¹⁸⁾ Como los elementos u_{ij} son algebraicamente independientes sobre Δ , V es irreducible respecto de $\Delta(u_{11}, \dots, u_{hs})$.

DEMOSTRACIÓN.

La Δ -variedad algebraica irreducible V' del espacio afín $A_s(\Omega)$ asociada al punto $P' \equiv (\eta_1, \dots, \eta_s)$ es de dimensión $t > 0$. P' es punto genérico, respecto de $\bar{\Delta}$, de una componente indivisible W' de V' . Sean $(\alpha_1, \dots, \alpha_s), (\beta_1, \dots, \beta_s)$ dos $\bar{\Delta}$ -puntos de W' .

Como P es punto genérico de V respecto de $\Delta(u_{i_1}, \dots, u_{i_s})$, $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ y $\Delta(u_{i_1}, \dots, u_{i_s})$ son algebraicamente disjuntos sobre Δ . Por consiguiente, el grado de trascendencia del sistema $\eta_1, \dots, \eta_s$ sobre $\Delta(u_{i_1}, \dots, u_{i_s})$ es t ; luego P' es punto genérico de W' respecto de $\Delta(\overline{u_{i_1}, \dots, u_{i_s}})$.

En consecuencia, si fuera $u_{i_0} \in \overline{\Delta(u_{i_1}, \dots, u_{i_s})}$, la relación

$$u_{i_0} = u_{i_1} \eta_1 + \dots + u_{i_s} \eta_s$$

exigiría

$$u_{i_0} = u_{i_1} \alpha_1 + \dots + u_{i_s} \alpha_s \text{ y } u_{i_0} = u_{i_1} \beta_1 + \dots + u_{i_s} \beta_s$$

y por tanto

$$u_{i_1} (\alpha_1 - \beta_1) + \dots + u_{i_s} (\alpha_s - \beta_s) = 0$$

en contradicción con la hipótesis de independencia algebraica del sistema de elementos u_{ij} sobre Δ .

b) Sea r el grado de trascendencia del sistema $\eta_1, \dots, \eta_s$ sobre $\Delta(u_{i_1}, \dots, u_{i_s}, u_{i_0})$. Llamando $\Delta_0 = \Delta(u_{i_1}, \dots, u_{i_s})$ se tiene gr. tr. $(u_{i_0}, \eta_1, \dots, \eta_s)$ sobre $\Delta_0 = r + \text{gr. tr. } (u_{i_0}) \text{ sobre } \Delta_0$ y en virtud de a)

$$\text{gr. tr. } (u_{i_0}, \eta_1, \dots, \eta_s) \text{ sobre } \Delta_0 = r + 1$$

Ahora bien, de la relación $u_{i_0} = u_{i_1} \eta_1 + \dots + u_{i_s} \eta_s$ se deduce

$$\Delta(u_{i_1}, \dots, u_{i_s}, u_{i_0}, \eta_1, \dots, \eta_s) = \Delta_0(\eta_1, \dots, \eta_s)$$

y por consiguiente

$$\text{gr. tr. } (u_{i_0}, \eta_1, \dots, \eta_s) \text{ sobre } \Delta_0 = \dim P' = \dim V' = t$$

luego

$$t = r + 1 \text{ o sea } r = t - 1$$

c) Si u_{i_0} pertenece a $\Delta(u_{i_1}, \dots, u_{i_s}, \xi_0^p, \dots, \xi_n^p)$ se tiene una relación del tipo

$$\sum_{\lambda} N_{\lambda} \cdot f_{\lambda} = (u_{i_1} \eta_1 + \dots + u_{i_s} \eta_s) \sum_{\mu} D_{\mu} \cdot g_{\mu}$$

en donde N_λ, D_μ son monomios de $\Delta [u_{i_1}, \dots, u_{i_s}]$ y f_λ, g_μ elementos de $\Delta [\xi_0^p, \dots, \xi_n^p]$.

Como $u_{i_1}, \dots, u_{i_s}$ son algebraicamente independientes sobre Δ , la disjunción algebraica de $\Delta (\xi_0, \dots, \xi_n)$ y $\Delta (u_{i_1}, \dots, u_{i_s})$ sobre Δ exige la independencia algebraica de $u_{i_1}, \dots, u_{i_s}$ sobre $\Delta (\xi_0, \dots, \xi_n)$; luego si N_{λ_j} es uno de los monomios N_λ de grado maximal respecto de u_{ij} , de la relación precedente se deduce la existencia de un índice μ tal que

$$N_{\lambda_j} = u_{ij} \cdot D_\mu \text{ y } f_{\lambda_j} = \eta_j \cdot g_\mu, \quad g_\mu \neq 0$$

Por consiguiente $\eta_j = f_{\lambda_j}/g_\mu$ pertenece a $\Delta (\xi_0^p, \dots, \xi_n^p)$.

Sea V_h la $\Delta (u_{11}, \dots, u_{1s}, u_{10}; \dots; u_{h1}, \dots, u_{hs}, u_{h0})$ — variedad algebraica irreducible de $P_n(\Omega)$ asociada al punto $P \equiv (\xi_0, \dots, \xi_n)$.

TEOREMA 4. — *La dimensión de V_h es $d - h$. Si Ω es de característica $p \neq 0$ y no todos los elementos η_j pertenecen a $\Delta (\xi_0^p, \dots, \xi_n^p)$, de la separabilidad de V respecto de Δ se deduce la de V_h respecto de $\Delta (u_{11}, \dots, u_{1s}, u_{10}; \dots; u_{h1}, \dots, u_{hs}, u_{h0})$.*

DEMOSTRACIÓN.

Las hipótesis realizadas sobre los sistemas $(u_{ij}), (\eta_j), i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, s$, y el lema precedente, permiten demostrar la proposición por recurrencia. Es suficiente, pues, considerar $h = 1$.

Si r es la dimensión de P sobre $U(\eta_1, \dots, \eta_s)$ siendo $U = \Delta (u_{11}, \dots, u_{1s}, u_{10})$, tendremos

$$\dim. V_1 = \dim_U P = r + \dim_U (\eta_1, \dots, \eta_s)$$

y en virtud de b) (lema precedente)

$$\dim. V_1 = r + t - 1$$

Llamando $\Delta_0 = \Delta (u_{11}, \dots, u_{1s})$ y teniendo en cuenta que

$$U(\eta_1, \dots, \eta_s) = \Delta_0(\eta_1, \dots, \eta_s), \quad t = \dim_{\Delta_0} (\eta_1, \dots, \eta_s),$$

resulta

$$r + t = \dim. P \text{ (sobre } \Delta_0(\eta_1, \dots, \eta_s)) + \dim_{\Delta_0} (\eta_1, \dots, \eta_s)$$

o sea

$$r + t = \dim_{\Delta_0} P = \dim_{\Delta} P = \dim. V = d$$

Por consiguiente

$$\dim. V_1 = d - 1$$

Si V es separable respecto de Δ , también lo es respecto de Δ_0 y como P es punto genérico de V respecto de Δ_0 , se verifica

$$[\Delta_0(\xi_0, \dots, \xi_n) : \Delta_0(\xi_0^p, \dots, \xi_n^p)] = p^d$$

Como u_{10} pertenece a $\Delta_0(\xi_0, \dots, \xi_n)$, la relación precedente se puede escribir

$$[\Delta(u)(\xi_0, \dots, \xi_n) : \Delta(u)(\xi_0^p, \dots, \xi_n^p)] [\Delta(u)(\xi_0^p, \dots, \xi_n^p) : \Delta_0(\xi_0^p, \dots, \xi_n^p)] = p^d$$

Ahora bien, por hipótesis no todos los elementos $\eta_1, \dots, \eta_s$ pertenecen a $\Delta(\xi_0^p, \dots, \xi_n^p)$, luego según c) (lema precedente) u_{10} no pertenece a $\Delta_0(\xi_0^p, \dots, \xi_n^p) = \Delta_0(u_{10}^p, \xi_0^p, \dots, \xi_n^p)$, y por tanto

$$[\Delta(u)(\xi_0^p, \dots, \xi_n^p) : \Delta_0^*(\xi_0^p, \dots, \xi_n^p)] = p$$

En consecuencia

$$[\Delta(u)(\xi_0, \dots, \xi_n) : \Delta(u)(\xi_0^p, \dots, \xi_n^p)] = p^{d-1}$$

que implica la separabilidad de V_1 respecto de U , 2.1 proposición 9.

Cada punto Q de V_h es especialización de P respecto de

$$\Delta(u) = \Delta(u_{11}, \dots, u_{1s}, u_{10}; \dots; u_{h1}, \dots, u_{hs}, u_{h0}),$$

y por tanto Q es Δ -especialización de P , es decir, un punto de V . Sea $v_\Delta(Q; P)$ el anillo de especialización de Q sobre P respecto de Δ .

TEOREMA 5. — *Si cada uno de los elementos $\eta_1, \dots, \eta_s$ pertenece a $v_\Delta(Q; P)$, la $\Delta(u)$ -normalidad de V_h en Q implica la Δ -normalidad de V en Q y recíprocamente.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea Δ_0 la extensión de Δ engendrada por los elementos u_{ij} y $v_{\Delta_0}(Q; P)$ el anillo de especialización de Q sobre P respecto de Δ_0 . Como Δ_0 y $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$ son linealmente disjuntos sobre Δ , en virtud de [4], Chap. IV, Prop. 6, se verifica

$$(8) \quad v_\Delta(Q; P) = v_{\Delta_0}(Q; P) \cap \Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$$

Sea $v_{\Delta(u)}(Q; P)$ el anillo de especialización de Q sobre P respecto de $\Delta(u)$, y ζ un elemento de $v_{\Delta(u)}(Q; P)$. Si $\chi_0, \dots, \chi_n$ es un sistema de coordenadas reducidas de Q y $\chi_r = 1$, podemos suponer sin restricción de generalidad que $\xi_r = 1$. Por consiguiente $\zeta = F/G$ siendo F y G elementos de $\Delta(u) [\xi_0, \dots, \xi_n]$ de modo que $G(\chi_0, \dots, \chi_n) \neq 0$; además, podemos considerar que $F = F(u_{10}, \dots, u_{h0}, \xi_0, \dots, \xi_n)$ y $G(u_{10}, \dots, u_{h0}, \xi_0, \dots, \xi_n)$ pertenecen a $\Delta_0[u_{10}, \dots, u_{h0}, \xi_0, \dots, \xi_n]$. Por otra parte, como los elementos η_j pertenecen por hipótesis a $v_{\Delta}(Q; P)$, admiten una expresión del tipo $\eta_j = f_j/g_j$, siendo f_j, g_j elementos de $\Delta[\xi_0, \dots, \xi_n]$ de modo que $g_j(\chi_0, \dots, \chi_n) \neq 0$. De las relaciones

$$(9) \quad u_{i0} = \sum_{j=1}^s u_{ij} \eta_j = \sum_{j=1}^s u_{ij} \cdot f_j/g_j, \quad i = 1, \dots, h$$

se deduce la existencia de un número natural e tal que

$$\Phi = \left(\prod_{j=1}^s g_j \right)^e \cdot F(u_{10}, \dots, u_{h0}, \xi_0, \dots, \xi_n) \text{ y } \Psi = \left(\prod_{j=1}^s g_j \right)^e \cdot G(u_{10}, \dots, u_{h0}, \xi_0, \dots, \xi_n)$$

pertenecen a $\Delta_0[\xi_0, \dots, \xi_n]$; además las relaciones (9) implican

$$u_{i0} = \sum_{j=1}^s u_{ij} \cdot f_j(\chi_0, \dots, \chi_n)/g_j(\chi_0, \dots, \chi_n), \quad i = 1, \dots, h$$

y por consiguiente

$$\Psi(\chi_0, \dots, \chi_n) = \left(\prod_{j=1}^s g_j(\chi_0, \dots, \chi_n) \right)^e \cdot G(u_{10}, \dots, u_{h0}, \chi_0, \dots, \chi_n) \neq 0$$

luego $\zeta = F/G = \Phi/\Psi$ pertenece a $v_{\Delta_0}(Q; P)$; ahora bien, es obvio que $v_{\Delta_0}(Q; P) \subseteq v_{\Delta(u)}(Q; P)$. En consecuencia, se tiene

$$(10) \quad v_{\Delta_0}(Q; P) = v_{\Delta(u)}(Q; P)$$

Veamos finalmente que de las relaciones (8) y (10) se deduce el aserto. En efecto:

Si V_h es $\Delta(u)$ -normal en Q , entonces según (10) $v_{\Delta_0}(Q; P)$ es *cerrado* en su cuerpo de cocientes; luego en virtud de (8) también tiene esa propiedad $v_{\Delta}(Q; P)$, es decir, V es Δ -normal en Q .

Recíprocamente: Si V es Δ -normal en Q , también es normal en Q respecto de Δ_0 , [4], Chap. V, Theorem 7, o sea, $v_{\Delta_0}(Q; P)$ es *cerrado* en su cuerpo de cocientes, que en virtud (10) implica la normalidad de V_h en Q respecto de $\Delta(u)$.

5.3. Géneros de intersección.

Sean $F_0, \dots, F_s$ formas del mismo grado de $\Delta [X_0, \dots, X_n]$ que verifiquen las condiciones siguientes:

1. — La Δ -variedad algebraica de $P_n(\Omega)$ definida por el sistema $F_0, \dots, F_s$ no es incidente con V .
2. — La Δ -transformada racional $\bar{V}$ de V definida por el sistema $F_0, \dots, F_s$ es de dimensión $t > 0$.

Sea h un número natural no superior a t , λ_{ij} , $i = 1, \dots, h$, $j = 0, \dots, s$, elementos de Ω algebraicamente independientes sobre Ω y consideremos la $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs})$ -variedad algebraica V_λ definida por el sistema de formas

$$\lambda_{10} F_0 + \dots + \lambda_{is} F_s, \quad i = 1, \dots, h$$

TEOREMA 6. — A) $V \cap V_\lambda$ es irreducible sobre $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs})$ y de dimensión $d - h$. B) Si Ω es de características $p \neq 0$ y el cuerpo de las Δ -funciones racionales de $\bar{V}$ no es Δ -isomorfo a un subcuerpo de $\Delta(\xi_0^p, \dots, \xi_n^p)$,¹⁹⁾ entonces de la separabilidad de V respecto de Δ se deduce la de V_λ respecto de $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs})$. C) Si Q es un punto de $V \cap V_\lambda$, la $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs})$ -normalidad de V_λ en Q implica la Δ -normalidad de V en Q y recíprocamente. En particular, si V es localmente normal sobre Δ , V_λ lo es sobre $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs})$.

DEMOSTRACIÓN.

En virtud de la condición 1 impuesta al sistema de formas $F_0, \dots, F_s$, podemos suponer sin restricción de generalidad que la hipersuperficie definida por F_0 no contiene a V , y por tanto $F_0(\xi_0, \dots, \xi_n) \neq 0$. En virtud de la condición 2 impuesta al sistema de formas F_j , los elementos $\eta_j = -F_j(\xi_0, \dots, \xi_n)/F_0(\xi_0, \dots, \xi_n)$ constituyen un sistema de grado de trascendencia $t \geq h > 0$ sobre Δ . Según el lema, a), los elementos u_{i0} definidos por

$$(11) \quad u_{i0} = u_{i1} \eta_1 + \dots + u_{is} \eta_s, \quad i = 1, \dots, h$$

son algebraicamente independientes sobre $\Delta(u_{11}, \dots, u_{hs})$. Por consi-

¹⁹⁾ Esta última condición se verifica si V es Δ -transformada birracional de V .

guiente u_{ij}, λ_{ij} , con pares de elementos homólogos en el Δ -isomorfismo:

$$\Delta(u_{10}, \dots, u_{hs}) \cong \Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs})$$

que es prolongable a un isomorfismo

$$(12) \quad \Delta(u_{10}, \dots, u_{hs}, \xi_0, \dots, \xi_n) \cong \Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs}, \xi'_0, \dots, \xi'_n)$$

en donde $\xi_\mu, \xi'_\mu, \mu = 0, \dots, n$, son pares de elementos homólogos.

Consideremos la $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs})$ -variedad algebraica irreducible V_h' de $P_n(\Omega)$ asociada al punto $P' \equiv (\xi'_0, \dots, \xi'_n)$. En virtud de (12), P' es punto genérico de V respecto de Δ , que satisface las relaciones

$$(13) \quad \lambda_{i0} F_0(\xi'_0, \dots, \xi'_n) + \dots + \lambda_{is} F_s(\xi'_0, \dots, \xi'_n) = 0, \quad i = 1, \dots, h$$

y en consecuencia $V_h' \subseteq V \cap V_\lambda$.

Sea $Q \equiv (\chi_0, \dots, \chi_n)$ un punto cualquiera de $V \cap V_\lambda$ y F una forma de $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs}) [X_0, \dots, X_n]$ tal que $F(\xi'_0, \dots, \xi'_n) = 0$. En virtud de la condición 1 impuesta a las formas F_j , existe un índice r tal que $F_r(\chi_0, \dots, \chi_n) \neq 0$, y por consiguiente $F_r(\xi'_0, \dots, \xi'_n) \neq 0$ ya que Q es Δ -especialización de P' . Sea Δ_r la *extensión* de Δ engendrada por $\lambda_{ij}, j \neq r$, y Δ un elemento no nulo de $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs})$ de modo que $\Phi = \Delta \cdot F$ pertenezca a $\Delta_r[\lambda_{1r}, \dots, \lambda_{hr}, X_0, \dots, X_n]$ y sea q un número natural tal que

$$\Psi = F_r^q \cdot \Phi \left(- \sum_{j \neq r} \lambda_{ij} F_j / F_r, \dots, - \sum_{j \neq r} \lambda_{hj} F_j / F_r, X_0, \dots, X_n \right)$$

pertenezca a $\Delta_r[X_0, \dots, X_n]$. En virtud de las relaciones (11) y (12), se tiene:

$$\Psi(\xi'_0, \dots, \xi'_n) = F_r^q(\xi'_0, \dots, \xi'_n) \cdot \Phi(\lambda_{1r}, \dots, \lambda_{hr}, \xi'_0, \dots, \xi'_n) = 0$$

y como P' es punto genérico de V respecto de Δ_r ²⁰, se verifica $\Psi(\chi_0, \dots, \chi_n) = 0$; pero Q pertenece a V_λ y por tanto

$$\lambda_{i0} F_0(\chi_0, \dots, \chi_n) + \dots + \lambda_{is} F_s(\chi_0, \dots, \chi_n) = 0, \quad i = 1, \dots, h$$

y como por hipótesis es $F_r(\chi_0, \dots, \chi_n) \neq 0$, resulta

$$0 = \Psi(\chi_0, \dots, \chi_n) = F_r^q(\chi_0, \dots, \chi_n) \cdot \Phi(\lambda_{1r}, \dots, \lambda_{hr}, \chi_0, \dots, \chi_n),$$

²⁰ Es una consecuencia de (12).

o sea

$$0 = F_r^e(\chi_0, \dots, \chi_n). \Delta. F(\chi_0, \dots, \chi_n), \text{ de donde } F(\chi_0, \dots, \chi_n) = 0$$

Por consiguiente, Q es $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs})$ -especialización de P' ; luego $V_h' \supseteq V \cap V_\lambda$.

En resumen $V_h' = V \cap V_\lambda$, y por tanto $V \cap V_\lambda$ es *irreducible respecto de* $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs})$. De la igualdad $V_h' = V \cap V_\lambda$, del isomorfismo (12), y de los teoremas 1 y 2 se deducen fácilmente las restantes conclusiones de la proposición.

En particular, si M_j , $j = 0, \dots, s$, son los monomios de grado $m > 0$ de $\Delta[X_0, \dots, X_n]$, se verifica

TEOREMA 7. — *La intersección de V con la variedad algebraica $L_h^{(m)}$ de $P_n(\Omega)$ definida por el sistema de formas*

$$\lambda_{i0} M_0 + \dots + \lambda_{is} M_s, \quad i = 1, \dots, h \leq d$$

es irreducible respecto de $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{is})$ y de dimensión $d-h$; además $V \cap L_h^{(m)}$ es, respectivamente, separable y localmen'e normal sobre $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{hs})$ si V tiene estas propiedades con relación a Δ .

Si $d > 1$ adoptamos la definición siguiente :

DEFINICIÓN. — *Llamaremos Δ -género de intersección de orden m de V , al $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1, s})$ -género $g_\Delta^{(m)}$ de la $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1, s})$ -curva algebraica $L_{d-1}^{(m)} \cap V$.*

Si μ_{ij} , $i = 1, \dots, d-1$, $j = 0, \dots, s$, son elementos de Ω algebraicamente independientes sobre Δ , entonces λ_{ij} , μ_{ij} son pares de elementos homólogos en un Δ -isomorfismo

$$\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1, s}) \cong \Delta(\mu_{10}, \dots, \mu_{d-1, s})$$

que es prolongable a un isomorfismo

$$(14) \quad \Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1, s}, \zeta_0, \dots, \zeta_n) \cong \Delta(\mu_{10}, \dots, \mu_{d-1, s}, \zeta_0', \dots, \zeta_n')$$

siendo $\zeta_0, \dots, \zeta_n$ un sistema de coordenadas reducidas de un punto genérico de $V \cap L_{d-1}^{(m)}$ respecto de $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1, s})$. Del Δ -isomorfismo (14) y de la fórmula de F. K. SCHMIDT se deduce fácilmente que la definición precedente no depende del sistema de elementos λ_{ij} .

5.4. *Modelos proyectivos absolutamente normales de una variedad algebraica de dimensión $d > 1$.*

TEOREMA 8. — Si V es separable respecto de Δ y posee un modelo proyectivo localmente normal respecto de Δ que sea absolutamente normal, entonces para cada carácter de homogeneidad m de V , ²¹⁾ se verifica $g_{\Delta}^{(m)} = g_{\Delta'}^{(m)}$ siendo Δ' la mínima extensión perfecta de Δ contenida en Ω .

DEMOSTRACIÓN.

Sea τ un elemento de Ω transcendente sobre Δ ($\xi_0, \dots, \xi_n$), $\xi_{\mu}^* = \tau \cdot \xi_{\mu}$, $\mu = 0, \dots, n$, E el anillo constituido por los elementos de $\Delta(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ que son enteros sobre $\Delta[\xi_0^*, \dots, \xi_n^*]$, y sea $\zeta_0^*, \dots, \zeta_r^*$ una base del Δ -espacio vectorial constituido por el elemento nulo de Ω y por los elementos de grado m de E . Como m es por hipótesis un carácter de homogeneidad de V , la Δ -variedad algebraica irreducible $\bar{V}$ de $P_r(\Omega)$ asociada al punto $\bar{P} \equiv (\zeta_0^*, \dots, \zeta_r^*)$ es un modelo proyectivo localmente normal respecto de Δ de V , ²²⁾ De [18], Lemma 5, y de las hipótesis de la proposición, resulta que $\bar{V}$ es absolutamente normal.

Si M_j , $j = 0, \dots, s$, son los monomios de grado m del anillo de polinomios $\Delta[X_0, \dots, X_n]$, $M_j(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ son elementos de grado m de E , y por consiguiente se verifican las relaciones :

$$(15) \quad M_j(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*) = \delta_{0j} \zeta_0^* + \dots + \delta_{rj} \zeta_r^*, \quad j = 0, \dots, s$$

en donde $\delta_{vj} \in \Delta$, $v = 0, \dots, r$, de las cuales se deduce :

1. La Δ -variedad algebraica de $P_r(\Omega)$ definida por el sistema de formas $F_j = \delta_{0j} Y_0 + \dots + \delta_{rj} Y_r$ no es incidente con $\bar{V}$.

En efecto. Sea $\bar{Q} \equiv (x_0, \dots, x_r)$ un punto de $\bar{V}$. La Δ -especialización $\bar{P} \rightarrow \bar{Q}$ es prolongable a una Δ -especialización $(\bar{P}, P) \rightarrow (\bar{Q}, Q)$ siendo $Q \equiv (\eta_0, \dots, \eta_n)$ un punto de V . En virtud de las relaciones (15) se tiene, pues :

$$M_j(\eta_0, \dots, \eta_n) = \delta_{0j} x_0 + \dots + \delta_{rj} x_r, \quad j = 0, \dots, s.$$

En consecuencia, de $F_j(x_0, \dots, x_r) = 0$ para $j = 0, \dots, s$, se deduciría $M_j(\eta_0, \dots, \eta_n) = 0$ para $j = 0, \dots, s$, que manifiestamente es absurdo.

²¹⁾ [17]; [18], II, 2; [4], Chap. V.

²²⁾ Si Δ es algebraicamente cerrado en $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$, V es, además, aritméticamente normal, es decir, $\Delta[\xi_0^*, \dots, \xi_n^*]$ es cerrado en su cuerpo de cocientes [18] II, 2.

2. El sistema de formas $F_j = \delta_{0j} Y_0 + \dots + \delta_{rj} Y_r$, define una Δ -transformación birracional $V \leftarrow \rightarrow \bar{V}$.

Pues si $\xi_h \neq 0$, los elementos $M_j(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)/\xi_n^{*m}$, para $j = 0, \dots, s$, constituyen un sistema de generadores de $\Delta(\xi_0, \dots, \xi_n)$.

Por consiguiente, si $\bar{V}_\lambda$ es la $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1s})$ -variedad algebraica definida por el sistema de formas :

$$\lambda_{i0}(\delta_{00} Y_0 + \dots + \delta_{r0} Y_r) + \dots + \lambda_{is}(\delta_{0s} Y_{s0} + \dots + \delta_{rs} Y_r)$$

$i = 1, \dots, d-1$, se tiene en virtud del teorema 6, que $\bar{V} \cap \bar{V}_\lambda$ es una curva algebraica $\bar{C}_\lambda$, irreducible, separable, y localmente normal respecto de $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1s})$; además como $\bar{V}$ es absolutamente normal, es $\bar{V}$ localmente normal respecto de Δ' (3.2. Teorema 5), y por tanto $\bar{C}_\lambda$ es localmente normal con relación a $\Delta'(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1s})$, luego de la demostración del teorema 2 se deduce la coincidencia de los géneros de $\bar{C}_\lambda$ respecto de $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1s})$ y $\Delta'(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1s})$. Ahora bien, de la demostración del teorema 6 y de las relaciones (15) se deduce que C es $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1s})$ -transformada birracional de $V \cap L_{d-1}^{(m)}$; por consiguiente, se verifica $g_{\Delta'}^{(m)} = g_{\Delta}^{(m)}$.

TEOREMA 9. — Si V es separable respecto de Δ , y para algún carácter de homogeneidad m de V se tiene $g_{\Delta}^{(m)} = g_{\Delta'}^{(m)}$, entonces cada modelo localmente normal de V respecto de Δ , es absolutamente normal.

DEMOSTRACIÓN :

En virtud de [18], II, Lemma 5, es suficiente demostrar la normalidad absoluta de $\bar{V}$,²³⁾ o lo que es equivalente, la normalidad local de $\bar{V}$ respecto de Δ' .

Como $\bar{V}$ es separable (por serlo V) y localmente normal respecto de Δ resulta, en virtud del teorema 7, la separabilidad y normalidad local de $\bar{C}_\lambda$ respecto de $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1s})$; pero $\bar{C}_\lambda$ es $\Delta(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1s})$ -transformada birracional de $V \cap L_{d-1}^{(m)}$, luego de la hipótesis $g_{\Delta}^{(m)} = g_{\Delta'}^{(m)}$ y de la demostración del teorema 1, se deduce la $\Delta'(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1s})$ -normalidad local de $\bar{C}_\lambda$.

Sea $\bar{Q}$ un punto de $\bar{V}$ de dimensión $d-1$ sobre Δ , y $\bar{V}_{\bar{Q}}$ la Δ -variedad algebraica irreducible asociada al punto $\bar{Q}$. Como $\bar{C}_\lambda$ es localmente normal respecto de $\Delta'(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{d-1s})$, $\bar{V}$ es, en virtud del teorema 7,

²³⁾ Conservamos la notación empleada en el teorema 8.

Δ' -normal sobre cada punto de $\bar{V}_Q \cap \bar{C}_i$, y por consiguiente $\bar{V}$ es Δ' -normal en $\bar{Q}$, ²⁴⁾.

En resumen V es separable y localmente normal respecto de Δ , y Δ' -normal, y por tanto, absolutamente normal en cada punto de codimensión unidad sobre Δ , o sea, absolutamente simple en codimensión unidad [7], Chap. IV. El aserto es ahora una consecuencia inmediata de [16], Appendix II, Prop. 4.

²⁴⁾ Pues la anormalidad de V sobre Q implicaría la anormalidad de V en cada Δ -especialización de Q , 18, p. 512.

NOTA BIBLIOGRAFICA

1. C. CHEVALLEY, *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*. New York (1951).
2. DIEUDONNÉ, J., *Sur les extensions transcendentes séparables*. *Summa Brasiliensis Mathematicae*, Vol. II, Fasc. I (1947).
3. KUNZ, E., *Über die kanonische Klasse eines vollständigen Modells eines algebraischen Funktionenkörpers*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, B. 209, H. 1/2 (1962).
4. LANG, S., *Introduction to Algebraic Geometry*. New York (1958).
5. MALLOL, R., *Über die Existenz eines singularitätenfreien Modells einer algebraischen Kurve*. *Math. Ann.* 140 (1960).
6. MALLOL, R., *Sobre el comportamiento de una variedad algebraica en las extensiones del cuerpo de referencia*. *Collect. Math.* 10, 2 (1958).
- 6'. MUHLY, H.T., *A remark on normal varieties*, *Ann. of Math.* 42 (1941).
7. NOETHER, M., *Über die reductiblen algebraischen Curven*. *Acta Math.* 8 (1886).
8. NORTHCOTT, D.G., *Ideal theory*, Cambridge (1953).
9. ROSENLICHT, M., *Equivalence relations on algebraic curves*. *Ann. of Math.* 56 (1952).
10. SAMUEL, P., *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*. *Erg. Math.* Berlin (1955).
11. SCHMIDT, F. K., *Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen I. Beweis des Riemann-Rochschen Satzes für algebraische Funktionen mit beliebigen Konstantenkörper*. *Math. Z.* 41, 3 (1936).
12. SEGRE, C., *Mehrdimensionale Räume*. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, C III, 7 (1921).
13. v.d. WAERDEN, B.L., *Z.A.G. XIV*, *Math. Ann.* 115 (1938).
14. v.d. WAERDEN, B.L., *Moderne Algebra*, Berlin (1940).
15. v.d. WAERDEN, B.L., *Einführung in die algebraische Geometrie*, Berlin 1939.
16. WEIL, A., *Foundations of algebraic geometry*. New York (1946).
17. ZARISKI, O., *Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties*. *Amer. J. Math.* 61 (1939).
18. ZARISKI, O., *Foundations of a general theory of birational correspondences*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 53 (1943).
19. ZARISKI, O., *Normal varieties and birational correspondences*, *Bull. Amer. Soc.* 48 (1942).
20. ZARISKI, O., *Complete linear systems on normal varieties and a generalisation of a lemma of Enriques-Severi*. *Ann. of Math.* 55 (1952).