ÜBER DIE COHOMOLOGIE VON KOMPLEXEN STIEFEL-MANNIGFALTIGKEITEN

por

ROLF KULTZE

Die Berechnung des Cohomologieringes von Stiefel-Mannigfaltigkeiten erfordert einigen Aufwand und ist wohl deshalb in den Standard-Lehrbüchern über algebraische Topologie nicht zu finden. Entweder benötigt man spektrale Sequenzen von Faserungen (vgl. [1]) oder die Zellenstruktur der Stiefel-Mannigfaltigkeiten (vgl. [2]). In der vorliegenden Note geben wir einen einfachen Beweis, in dem die Struktur des Cohomologieringes von komplexen Stiefel-Mannigfaltigkeiten bestimmt wird. Als Hilfsmittel werden die Wangsche exakte Sequenz und der Satz von Leray-Hirsch herangezogen. Beide Sätze lassen sich elementar und rasch beweisen. Damit ist es möglich, den Cohomologiering von komplexen Stiefel-Mannigfaltigkeiten ohne Mühe zu berechnen.

$W_{n,k}$ sei der Raum der orthonormierten k-Beine im C^n $(1 \leq k \leq n)$. Dann hat man die Faserung

$$W_{n-1,k-1} \xrightarrow{i} W_{n,k} \xrightarrow{\pi} S^{2n-1} \tag{1}$$

SATZ: $H^*(W_{n,k})$ ist eine äußere Algebra mit Erzeugenden

$$x_\nu \in H^{2(n+\nu-k)-1}(W_{n,k}) \qquad (1 \leq \nu \leq k).$$

Beweis: Der Beweis wird per Induktion nach k geführt. Für $k = 1$ hat man $W_{n,1} = S^{2n-1}$; hier ist die Behauptung klar. Die Behauptung sei nun richtig für alle $W_{n,1}$ mit $1 < $ k. Die Wangsche exakte Sequenz von (1) hat die Gestalt

$$\longrightarrow H^{q-2n+1}(W_{n-1,k-1}) \longrightarrow H^q(W_{n,k}) \xrightarrow{i^*} H^q(W_{n-1,k-1}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{q-2n+2}(W_{n-1,k-1}) \longrightarrow \tag{2}$$

Wir setzen $q = 2(n + \nu - k) - 1$ $(1 \leq \nu \leq k - 1)$; in diesem Fall verschwinden in (2) die äußeren Cohomologiegruppen, d.h. i^* ist für $q = 2(n + \nu - k) - 1$ ein Isomorphismus. $H^*(W_{n-1,k-1})$ ist nach Induktionsvoraussetzung eine äußere Algebra mit Erzeugenden $y_\nu \in H^{2(n+\nu-k)-1}(W_{n-1,k-1})$ $(1 \leq \nu \leq k - 1)$. Wir setzen $x_\nu = (i^*)^{-1}(y_\nu)$; dann bilden die Elemente $i^*(x_1^{i_1} \ldots x_{k-1}^{i_{k-1}}) = y_1^{i_1} \ldots y_{k-1}^{i_{k-1}}$ $(0 \leq i_\nu \leq 1)$ eine Basis von $H^*(W_{n-1,k-1})$. Nach dem Satz von Leray-Hirsch, angewandt auf die Faserung (1), bilden daher die Produkte $x_1^{i_1} \ldots x_{k-1}^{i_{k-1}}$ eine Basis des $H^*(S^{2n-1})$ — Moduls $H^*(W_{n,k})$. $H^*(S^{2n-1})$ besitzt nun die Basis 1, ε_{2n-1} mit $\varepsilon_{2n-1} \in H^{2n-1}(S^{2n-1})$. Setzen wir $x_k = \pi^*(\varepsilon_{2n-1}) \in H^{2n-1}(W_{n,k})$, so bilden die Elemente $x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}$ $(0 \leq i_k \leq 1)$ eine Basis von $H^*(W_{n,k})$. Wegen der Antikommutativität des cup-Produkts gilt $2x_\nu^2 = 0$ $(1 \leq \nu \leq k)$; aus der Torsionsfreiheit von $H^*(W_{n,k})$ folgt schließlich $x_\nu^2 = 0$.

Ähnlich berechnet man den Cohomologiering der symplektischen Stiefel-Mannigfaltigkeiten $Sp(n)/Sp(n-k)$.

LITERATUR

[1] BOREL, A.: *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts.* Ann. Math. 57, 115-207 (1953).

[2] STEENROD, N. E. and D. B. A. EPSTEIN: *Cohomology operations.* Ann. of Math. Studies 50, Princeton University Press 1962.

ROLF KULTZE
Math. Seminar der
J. W. Goethe-Universität
6 Frankfurt M. - Germany