APPLICATIONS MULTIFORMES PARTIELLES,

par

MAURICE CRESTEY

INTRODUCTION (1)

Ce travail a son origine dans la lecture d'un mémoire de A. I. MAL'CEV [6]. Dans ce mémoire, l'auteur retrouve un résultat dû à I. SCHREIER [7] concernant les automorphismes du demi-groupe des applications d'un ensemble quelconque E dans lui-même. Par ailleurs, L. M. GLUSKIN [5] a signalé une propriété analogue du demi-groupe des «applications partielles» de E dans E.

Je me propose dans ce qui suit de donner une nouvelle démonstration du résultat de GLUSKIN et d'en obtenir une généralisation en introduisant les «applications multiformes partielles» de E dans E.

Je tiens à remercier vivement Monsieur P. DUBREIL, dont les conseils et les encouragements m'ont été d'un grand secours lors de la rédaction de ce travail.

1. GÉNÉRALITÉS

Dans tout ce travail, E désigne un ensemble quelconque. Les éléments de E sont notés par des lettres minuscules d'imprimerie (u, v, w, x, y, z, ...). Les parties de E sont notées par des majuscules d'imprimerie (U, V, W, X, Y, Z, ...) et leur ensemble par $\mathcal{P}(E)$.

Définition 1.1 : On sait [2], [3] que l'ensemble des applications d'un ensemble Z dans lui-même est un demi-groupe (pour la composition des applications) qui sera appelé *demi-groupe symétrique de Z* et noté $H(Z)$.

Considérons un demi-groupe multiplicatif D qui posséde un élé-

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

ment-unité e. On sait [2] que l'ensemble Γ des éléments a inversibles par rapport à e (c'est-à-dire pour lesquels il existe a^{-1} tel que $a\,a^{-1} = a^{-1}\,a = e$) est le sous-groupe maximal de D qui contient e.

Définition 1.2 : On appelle *automorphisme intérieur strict* défini par l'élément $a \in \Gamma$ l'automorphisme $\mathcal{A}_a$ de D défini par

$$(\forall\, x \in D), \quad \mathcal{A}_a(x) = a\,x\,a^{-1}.$$

Définition 1.3 : On appelle *application multiforme partielle* définie dans E toute application φ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ qui satisfait aux conditions suivantes :

1.° $\varphi(\phi) = \phi$;

2.° Pour toute partie non vide X de E, $\varphi(X) = \bigcup_{x \in X} \varphi(x)$.

Une application multiforme partielle φ est donc déterminée par les images élémentaires $\varphi(x)$.

On désigne par Δ l'ensemble des applications multiformes partielles définies dans E.

Définition 1.4 : Pour deux éléments φ, ψ de Δ, on pose $\varphi \leq \psi$ si et seulement si :

$$(\forall\, x \in E), \quad \varphi(x) \subseteq \psi(x).$$

La relation $\leq$ ainsi définie est manifestement une relation d'ordre partiel.

Définition 1.5: On pose, pour deux éléments quelconques φ, ψ de Δ, $\Theta = \varphi\psi$ si et seulement si

$$(\forall\, x \in E), \quad \Theta(x) = \bigcup_{y \in \psi(x)} \varphi(y).$$

Il est clair que l'on définit ainsi une multiplication dans Δ.

Désignons par $\hat{\Delta}$ l'ensemble des relations binaires définies sur l'ensemble E, et rappelons que, muni de sa relation d'ordre et de sa multiplication habituelles [1], [2],

1.° $\hat{\Delta}$ est un treillis complet de Boole [4] ;

2.° $\hat{\Delta}$ est un demi-groupe avec élément-unité et élément-zéro ;

3.° La multiplication est distributive à droite et à gauche par rapport à l'union, pour toute famille (finie ou infinie) d'éléments de $\hat{\Delta}$.

Proposition 1.6 : L'application de Δ dans Δ qui fait correspondre à chaque $\varphi \in \Delta$ la relation binaire $\hat{\varphi}$ définie par

$$(\forall\, x,\ y \in E),\quad y\,\hat{\varphi}\,x \Longleftrightarrow y \in \varphi(x),$$

est un isomorphisme (de treillis et de groupoïdes).

En effet, cette application est surjective, car toute relation binaire définie dans E permet de définir une application multiforme partielle par ses images élémentaires. Elle est injective car $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$ équivaut à

$$y \in \varphi(x) \Longleftrightarrow y \in \psi(x),$$

c'est-à-dire à $\varphi = \psi$.

De plus $y\,\hat{\varphi}\hat{\psi}\,x \Longleftrightarrow (\exists\, z \in E,$ tel que $y\,\hat{\varphi}\,z,\ z\,\hat{\psi}\,x) \Longleftrightarrow (\exists z \in E,$ tel que $y \in \varphi(z),\ z \in \psi(x)) \Longleftrightarrow y \in (\varphi\psi)(x)$.

Enfin, $\hat{\varphi} \leq \hat{\psi} \Longleftrightarrow ((\forall\, x \in E),\ y\,\hat{\varphi}\,x \Longrightarrow y\,\hat{\psi}\,x) \Longleftrightarrow ((\forall\, x \in E),\ y \in \varphi(x) \Longrightarrow y \in \psi(x)) \Longleftrightarrow ((\forall\, x \in E),\ \varphi(x) \subseteq \psi(x)) \Longleftrightarrow \varphi \leq \psi$.

CONSÉQUENCES : L'ensemble Δ possède aussi les propriétés de $\hat{\Delta}$ rappelées ci-dessus. On peut donner une définition directe de l'union $\vee$ et de l'intersection $\wedge$ d'une famille quelconque d'éléments de Δ :

$$\varphi = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \Longleftrightarrow (\forall\, x \in E),\quad \varphi(x) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x)\ ;$$

$$\psi = \bigwedge_{\mu \in M} \psi_\mu \Longleftrightarrow (\forall\, x \in E),\quad \psi(x) = \bigcap_{\mu \in M} \psi_\mu(x).$$

L'élément universel ω, l'élément-unité ε et l'élément minimum 0 de Δ peuvent être définis par :

$$(\forall\, x \in E),\quad \omega(x) = E,\quad \varepsilon(x) = \{x\},\quad 0(x) = \phi$$

Δ apparaît donc comme un *demi-groupe réticulé complet* [4].

Définition 1.7 : Pour toute application multiforme partielle φ définie dans E, on appelle *application multiforme partielle réciproque de* φ et on note φ^{-1} l'application multiforme partielle définie par

$$(\forall\, x,\ y \in E),\quad y \in \varphi^{-1}(x) \Longleftrightarrow x \in \varphi(y).$$

Proposition 1.8 : L'application $\varphi \to \varphi^{-1}$ de Δ dans lui-même possède les propriétés suivantes :

a). $(\forall \varphi \in \Delta)$, $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$;

b). $(\forall \varphi, \psi \in \Delta)$, $(\varphi \psi)^{-1} = \psi^{-1} \varphi^{-1}$;

c). $\varphi\varphi^{-1} = 0 \Longleftrightarrow \varphi = \varphi^{-1} = 0$;

d). $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$; $\omega^{-1} = \omega$;

e). Pour une famille quelconque $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de Δ,

$$(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda)^{-1} = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda^{-1}, \ (\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda)^{-1} = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda^{-1}$$

La démonstration de ces propriétés est immédiate, soit en revenant aux définitions, soit en utilisant l'isomorphisme entre Δ et $\hat{\Delta}$.

2. SOUS-DEMI-GROUPES REMARQUABLES DE Δ

Définition 2.1 : On appelle *application multiforme* définie dans E toute application multiforme partielle φ telle que

$$(\forall x \in E), \quad \varphi(x) \neq \phi.$$

L'ensemble des applications multiformes sera désigné par Δ'.

Proposition 2.2 : Δ' est un sous-demi-groupe de Δ et un sous-sup-demi-treillis complet de Δ (donc un gerbier complet [4]).

En effet, on a pour tout $x \in E$, si φ et ψ sont deux éléments de Δ':

$$(\varphi\psi)(x) = \bigcup_{y \in \psi(x)} \varphi(y) \neq \phi.$$

De même, si $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille quelconque d'éléments de Δ', la borne supérieure φ prise dans Δ de cette famille est dans Δ', car

$$(\forall x \in E), \quad \varphi(x) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \varphi(x) \neq \phi.$$

La distributivité de la multiplication, démontrée dans Δ, reste valable dans Δ'.

Définition 2.3 : On appelle *application uniforme partielle* définie dans E toute application multiforme partielle φ telle que $(\forall x \in E)$, $\varphi(x)$ contient au plus un élément.

L'ensemble des applications uniformes partielles sera désigné par Δ''.

Proposition 2.4: Δ'' est un sous-demi-groupe de Δ et un sous-inf-demi-treillis complet de Δ.

Si φ et ψ sont deux éléments de Δ'', on a pour tout x de E :

$(\varphi\psi)(x) = \varphi(\psi(x))$ est vide ou réduit à un seul élément, donc $\varphi\psi \in \Delta''$.

Si $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille quelconque d'éléments de Δ'', la borne inférieure φ prise dans Δ de cette famille est dans Δ'', car $(\forall\, x \in E)$, $\varphi(x) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(x)$ ne peut être que vide ou réduit à un élément.

L'intersection des sous-demi-groupes Δ' et Δ'' de Δ n'est autre que le demi-groupe symétrique $H(E)$, que l'on désignera plus brièvement par H. H contient évidemment l'élément-nité ε de Δ.

Proposition 2.5 : L'ensemble des éléments de Δ inversibles par rapport à ε coïncide avec l'ensemble des bijections de E (c'est-à-dire avec l'ensemble des éléments de H inversibles par rapport à ε).

Il suffit évidemment de montrer que si $\alpha \in \Delta$ est inversible par rapport à ε, il appartient à H.

Supposons donc que $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \varepsilon$.

$(\forall\, x \in E)$, $(\alpha\alpha^{-1})(x) = (\alpha^{-1}\alpha)(x) = \{x\}$, donc les applications α et α^{-1} sont surjectives, et de plus appartiennent à Δ'.

L'égalité $\{x\} = (\alpha\alpha^{-1})(x) = \bigcup_{y\in\alpha^{-1}(x)} \alpha(y)$ montre que, pour tout $y \in \alpha^{-1}(x)$, $\alpha(y)$ est réduite à un élément. Cette propriété est valable pour tout $y \in E$, puisque α^{-1} est surjective. Donc $\alpha \in H$.

Désignons par U et X deux parties quelconques de E.

Définition 2.6 : On appelle *application multiforme partielle stationnaire* toute application multiforme partielle $\beta_{U,X}$ définie comme suit :

— Si l'une des parties U, X est vide, $\beta_{U,X} = 0$;

— Si $U \neq \phi$ $X \neq \phi$, $\beta_{U,X}(x) = \phi$ pour $x \notin X$,

$$\beta_{U,X}(x) = U \text{ pour } x \in X.$$

L'ensemble des applications multiformes partielles stationnaires sera désigné par I. On pose en outre

$$I' = I \cap \Delta' \quad , \quad I'' = I \cap \Delta'',$$

$$J = I \cap H \quad , \quad I_0' = I' \cap \{0\}.$$

Pour simplifier les notations, on désignera un élément quelconque de I' par α_U (au de $\beta_{U,E}$), un élément quelconque de I'' par $\beta_{u,X}$ (au lieu de $\beta_{\{u\},X}$), un élément quelconque de J par α_u (au lieu de $\alpha_{\{u\}}$).

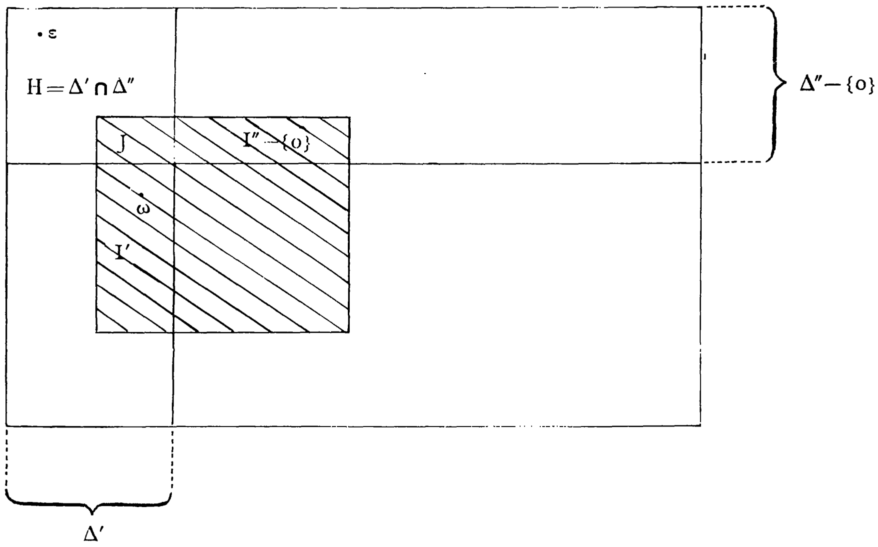

Figure 1. Sous-demi-groupes remarquables de Δ.
(0, n'est pas représenté. Le rectangle intérieur hachuré représente I — {0}).

Proposition 2.7 : φ étant un élément quelconque de Δ,

(1) $\beta_{U,X}\,\varphi = \beta_{U,Y}$, où $Y = \varphi^{-1}(X)$ (éventuellement vide)

(2) $\varphi\,\beta_{U,X} = \beta_{V,X}$, où $V = \varphi(U)$ (éventuellement vide)

Les relations (1) et (2) sont des conséquences immédiates de la définition de la multiplication dans Δ et de la définition d'une application multiforme partielle stationnaire.

Conséquences : 1.° La proposition 2.7 peut s'interpréter par : I est un idéal bilatère de Δ.

2.° En prenant $X = E$, et $\varphi \in \Delta'$ (ce qui entraîne $Y = \varphi^{-1}(E) = E$), on obtient de même :
I' est un idéal bilatère de Δ'.

3.° Avec $U = \{u\}$ et $\varphi \in \Delta''$, on obtient :
I'' est un idéal bilatère de Δ''.

4.° Enfin, avec $X = E$ (d'où $Y = E$), $U = \{u\}$, et $\varphi \in H$, on obtient:
J est un idéal bilatère de H.

Soient X, Y, U, V des parties quelconques de E.

Proposition 2.8 : Les éléments de I se multiplient entre eux de la façon suivante :

(3) $$\beta_{U,X}\ \beta_{V,Y} = 0 \quad \text{si} \quad V \cap X = \phi\ ;$$

(4) $$\beta_{U,X}\ \beta_{V,Y} = \beta_{U,Y} \quad \text{si} \quad V \cap X \neq \phi.$$

Il suffit, pour le vérifier, d'appliquer (1), avec $\varphi = \beta_{V,Y}$.

REMARQUE : Les règles de calcul précédentes permettent de s'assurer que dans Δ la multiplication n'est pas distributive par rapport à l'intersection. On vérifie en effet facilement que, si $u \neq v$:

$$\omega(\alpha_u \wedge \alpha_v) = 0, \ (\omega\alpha_u) \wedge (\omega\alpha_v) = \omega.$$

Proposition 2.9 : Les demi-groupes I et I'' sont complètement 0-simples; les demi-groupes I' et J sont complètement simples [2].

Soit $\beta_{U,X}$ un élément de I, autre que 0. Les règles de calcul précédentes entraînent

$$\beta_{V,Y} = \beta_{V,E}\ \beta_{U,X}\ \beta_{E,Y}, \ \text{d'où}\ I = I\ \beta_{U,X}\ I,$$

ce qui montre que I est un demi-groupe simple.

La simplicité des demi-groupes I', I'', J s'établit de la même façon.

D'après la relation (3), les idempotents de I sont 0 et les $\beta_{U,X}$ tels que $U \cap X \neq \phi$. Montrons que deux idempotents non nuls ne sont jamais comparables au sens de la relation d'ordre de REES :

$$\xi \prec \eta \iff \xi\,\eta = \eta\,\xi = \xi$$

Pour $\xi = \beta_{U,X}$, $\eta = \beta_{V,Y}$ (différents de 0),

$$\beta_{U,X} \prec \beta_{V,Y} \iff \beta_{U,X}\ \beta_{V,Y} = \beta_{V,Y}\ \beta_{U,X} = \beta_{U,X},$$

ce qui exige, d'après (3), que $X = Y$ et $U = V$.

Tout idempotent non nul de I (ou de I', de I'' ou de J) est primitif, ce qui achève la démonstration.

Proposition 2.10 : Deux éléments φ, ψ de Δ pour lesquels

$$(\forall\, \alpha \in J),\ \varphi\alpha = \psi\alpha,$$

sont nécessairement égaux.

En effet, à tout $x \in E$, on peut faire correspondre l'élément α_x de J, défini par : $(\forall\, t \in E),\ \alpha_x(t) = \{x\}$.

L'hypothèse $\varphi\alpha_x = \psi\alpha_x$ entraîne alors

$$(\forall\, x \in E),\ (\varphi\alpha_x)(t) = (\psi\alpha_x)(t),\ \text{d'où}\ \varphi(x) = \psi(x),\ \text{c'est-à-dire}\ \varphi = \psi.$$

Proposition 2.11 : Si la restriction à I d'un automorphisme $\mathcal{A}$ du demi-groupe Δ est l'identité, $\mathcal{A}$ est nécessairement l'automorphisme identique. (On obtient un énoncé analogue en remplaçant I et Δ par I' et Δ' respectivement, ou par I'' et Δ'', ou par J et H).

Soit $\mathcal{A}$ un automorphisme du demi-groupe Δ, tel que

$$(\forall \beta \in I), \quad \mathcal{A}(\beta) = \beta.$$

I étant un idéal de Δ, on a pour $\varphi \in \Delta$ et pour tout $\beta \in I$:

$$\varphi\beta = \mathcal{A}(\varphi\beta) = \mathcal{A}(\varphi)\,\mathcal{A}(\beta) = \mathcal{A}(\varphi)\,\beta.$$

La proposition 2.10 entraîne alors $\mathcal{A}(\varphi) = \varphi$.

COROLLAIRE : Si deux automorphismes du demi-groupe Δ (resp. Δ', Δ'', H) ont même restriction à I (resp. I', I'', J), ils coïncident.

3. IDEAUX O-MINIMAUX DE Δ

(La terminologie employée dans ce paragraphe est celle du chapitre II de [2]).

Définition 3.1 : A toute partie non vide U de E, on associe l'ensemble R_U des éléments $\beta_{U,X}$ de I, X décrivant $\mathcal{P}(E)$.

A toute partie non vide X de E, on associe l'ensemble L_X des éléments $\beta_{U,X}$ de I, U décrivant $\mathcal{P}(E)$.

On pose aussi $R^*_U = R_U - \{0\}$, $L^*_X = L_X - \{0\}$.

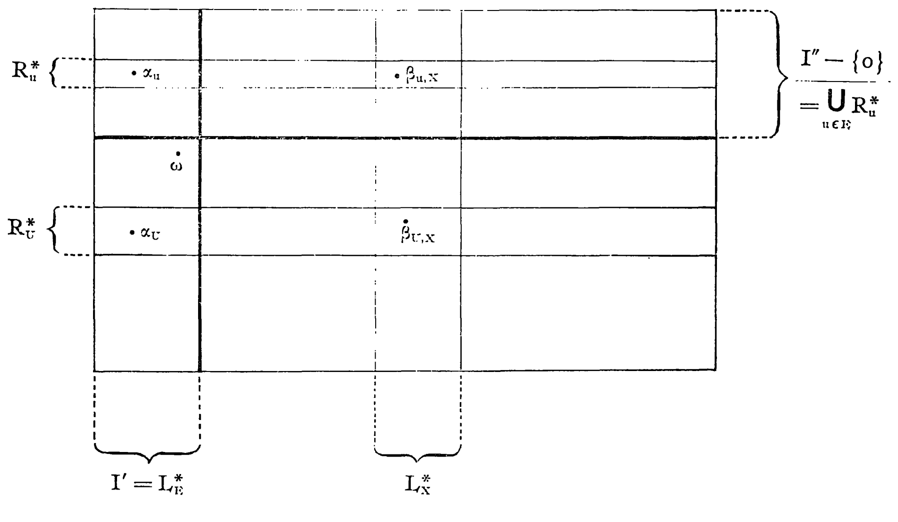

Figure 2. Structure de I. (0 n'est pas représenté).

Proposition 3.2 : Chaque R_U est un idéal à droite 0-minimal de Δ.

Chaque R^*_U est une $\mathcal{R}$ -classe de Green dans Δ.

D'après la proposition 2.7, R_U est un idéal à droite de Δ. Si $\beta_{U,A} \neq 0$ et $\beta_{U,B}$ sont deux éléments quelconques de R_U, on peut choisir φ de façon que $\beta_{U,A}\ \varphi = \beta_{U,B}$; il suffit de prendre par exemple $\varphi = \beta_{v,B}$ où v est un élément quelconque de A.

Par conséquent, tout $\beta_{U,A} \neq 0$ est un générateur de l'idéal à droite R_U. Il en résulte que R_U est un idéal à droite 0-minimal de Δ, et que R_U est contenu dans une $\mathcal{R}$-classe de GREEN.

Inversement, si φ et $\beta_{U,A} \neq 0$ appartiennent à une même $\mathcal{R}$-classe de GREEN, on a nécessairement $\varphi\Delta = R_U$, d'où $\varphi = \varphi\varepsilon \in R^*_U$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 3.3 : Tout idéal à droite 0-minimal de Δ est un R_U.

Soient K un idéal à droite 0-minimal de Δ, et φ un élément non nul de K. Il existe alors une partie U de E telle que $\varphi(U) \neq \phi$. On sait [2] que le produit $\varphi\ R_U$ est, soit réduit à l'élément 0, soit un idéal à droite 0-minimal de Δ. Or $\varphi\beta_{U,A} = \beta_{\varphi(U),A} \neq 0$ dès que $A \neq \phi$. $\{0\} \neq R_U \subseteq K\ R_U \subseteq K$ entraîne alors $K = \varphi\, R_U = R_{\varphi(U)}$.

Proposition 3.4 : Chaque L_X est un idéal à gauche 0-minimal de Δ.

Chaque L^*_X est une $\mathcal{L}$-classe de GREEN dans Δ.

Proposition 3.5 : Tout idéal à gauche 0-minimal de Δ est un L_X.

Ces deux propositions se démontrent par un raisonnement analogue à celui qui a permis d'établir les deux précédentes.

Proposition 3.6 : I est idéal bilatère 0-minimal unique de Δ.

On sait dejà (conséquence de la proposition 2.7) que I est idéal bilatère de Δ.

Soit K un idéal bilatère non nul de Δ. $K\ L_X$ est alors un idéal à gauche de Δ, contenu dans L_X, donc réduit à l'élément 0 ou égal à L_X puisque L_X est idéal à gauche 0-minimal de Δ. Or, si φ est un élément non nul de K, il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\varphi(A) \neq \phi$, d'où

$$\varphi\,\beta_{A,X} = \beta_{\varphi(A),X} \neq 0,$$

ce qui entraîne $K\ L_X \neq \{0\}$, donc $K\ L_X = L_X$.

De plus, K étant idéal bilatère, $K\ L_X \subseteq K$, ce qui extraîne

$$I = \bigcup_{\substack{X \in \mathcal{P}(E) \\ X \neq \phi}} L_X \subseteq K$$

4. IDÉAUX MINIMAUX ET AUTOMORPHISMES DE H

Proposition 4.1 (MAL'CEV) : J est l'ensemble des éléments permis à droite [3] dans H. Les idéaux à droite minimaux de H sont les complexes réduits à un élément de J. J est idéal à gauche minimum de H (donc aussi idéal bilatère minimum).

Tout élément α_x de J est permis à droite dans H, en vertu de la proposition 2.7 qui se traduit ici par

$$(\forall \varphi \in H), \ \alpha_x \varphi = \alpha_x \ (\text{puisque } \varphi^{-1}(E) = E).$$

Inversement : si un élément ψ de H est permis à droite, on a en particulier $\psi\alpha_x = \psi$, d'où
$(\forall x, t \in E)$, $\psi(t) = (\psi\alpha_x)(t) = \psi(x)$, ce qui entraîne $\psi \in J$.

Il est clair que tout élément de J constitue un idéal à droite minimal de H. Inversement, si K est un idéal à droite de H, le produit KJ est contenu dans l'intersection $K \cap J$, et par conséquent K contient au moins un élément de J. Il ne peut être idéal à droite minimal que s'il est réduit à un élément unique de J.

Enfin, si S et un idéal à gauche de H, on a $J = JS \subseteq S$, ce qui montre que J est idéal à gauche (et idéal bilatère) minimum de H.

Proposition 4.2 : Pour toute application $\Phi \in H(J)$, il existe un élément unique $\varphi \in H$ tel que

$$(\forall \alpha \in J), \quad \Phi(\alpha) = \varphi\alpha.$$

L'application F de $H(J)$ sur J définie par $F(\Phi) = \varphi$ est un isomorphisme de demi-groupes.

Toute bijection de J peut être prolongée par un automorphisme intérieur strict de H.

Soient $\alpha_x \in J$, $\alpha_y = \Phi(\alpha_x)$. Pour que $\alpha_y = \varphi\alpha_x$, il faut et il suffit que :

$$(\forall t \in E), \ \alpha_y(t) = \varphi\alpha_x(t), \ \text{c'est-à-dire } y = \varphi(x).$$

Ceci définit d'une façon unique un élément $\varphi = F(\Phi)$ de H.

Tout élément φ de H est une image $F(\Phi)$, puisque J est idéal à gauche dans H et l'application F est injective d'après sa définition même. De plus, si $\Phi_i \in H(J)$, $\varphi_i = F(\Phi_i)$, $(i = 1,2)$:

$$(\forall \alpha \in J), (\Phi_1\Phi_2)(\alpha) = \Phi_1(\Phi_2(\alpha)) = \Phi_1(\varphi_2\alpha) = \varphi_1\varphi_2\alpha = F(\Phi_1)F(\Phi_2)\alpha,$$

c'est-à-dire que $F(\Phi_1\Phi_2) = F(\Phi_1)F(\Phi_2)$.

Dans l'isomorphisme F, une bijection Φ de J, élément inversible de $H(J)$, a pour image un élément inversible φ de H. On a alors

$$(\forall \alpha \in J),\ \Phi(\alpha) = \varphi\alpha = \varphi\alpha\varphi^{-1},$$

Proposition 4.3 (Schreier, Mal'cev) : Tout automorphisme du demi-groupe H est un automorphisme intérieur strict.

Soit A un automorphisme de H. J étant idéal bilatère minimum de H, $A(J) = J$ et la restriction de A à J est une bijection Φ de J. D'après la proposition 4.2, cette bijection peut être prolongée par un automorphisme intérieur strict A_φ. Le corollaire de la proposition 2.11 entraîne alors $A = A_\varphi$.

5. PROPRIÉTÉS DU DEMI-GROUPE Δ'

Proposition 5.1 : I' est l'ensemble des éléments permis à droite dans Δ'.

Les idéaux à droite minimaux de Δ' sont les complexes réduits à un élément de I'. I' est idéal à gauche minimum (donc aussi idéal bilatère minimum) de Δ'.

Cette proposition se démontre de la même façon que la proposition 4.1.

Proposition 5.2 : I' est un sous-sup-demi-treillis complet du sup-demi-treillis Δ'.

Il suffit de vérifier que pour toute famille $(\alpha_{A_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de I' la borne supérieure prise dans Δ' (ou dans Δ) est encore un élément de I'.

Or: $(\forall x \in E),\ (\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \alpha_{A_\lambda})(x) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \alpha_{A_\lambda}(x) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \alpha_A(x)$, où $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Proposition 5.3 : Pour toute application $\Phi \in H(I')$, qui vérifie la condition

$$(P) \qquad \Phi(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{F}} \alpha) = \bigvee_{\alpha\in\mathcal{F}} \Phi(\alpha)$$

(quelle que soit la famille $\mathcal{F}$ d'éléments de I'), il existe un élément unique $\varphi \in \Delta'$, tel que

$$(\forall \alpha \in I'),\quad \Phi(\alpha) = \varphi\alpha.$$

L'application F définie par $F(\Phi) = \varphi$ est un isomorphisme du sous-demi-groupe de $H(I')$ formé par les éléments de $H(I')$ qui vérifient (P) sur le demi-groupe Δ'.

Toute bijection de I' qui possède la propriété (P) peut être prolongée par un automorphisme intérieur strict de Δ'.

Soit Φ un élément de $H(I')$, vérifiant la condition (P). L'image d'un élément $\alpha_x \in J$ par Φ est un élément α_X de I'. Pour que $\alpha_X = \varphi\alpha_x$, il faut et il suffit que :

$$(\forall\, t \in E),\ \alpha_X(t) = (\varphi\alpha_x)(t),\ \text{c'est-à-dire } X = \varphi(x).$$

Ceci détermine, d'une façon unique, un élément φ de Δ', et l'égalité $\Phi(\alpha) = \varphi\alpha$ est vérifiée pour tout $\alpha \in J$.

Pour étendre cette égalité à I', considérons une partie quelconque non vide A de E comme la réunion de ses éléments. Alors $\alpha_A = \bigvee_{a\in A} \alpha_a$, ce qui entraîne

$$\Phi(\alpha_A) = \Phi(\bigvee_{a\in A} \alpha_a) = \bigvee_{a\in A} \Phi(\alpha_a) = \bigvee_{a\in A} (\varphi\alpha_a) = \varphi(\bigvee_{a\in A} \alpha_a) = \varphi\alpha_A.$$

La démonstration s'achève de la même façon que celle de la proposition 4.2.

Proposition 5.4 : Tout automorphisme $\mathcal{A}$ du demi-groupe Δ' qui vérifie la condition

$$(P') \qquad (\forall\varphi,\ \varphi' \in \Delta'),\quad \mathcal{A}(\varphi \vee \varphi') = \mathcal{A}(\varphi) \vee \mathcal{A}(\varphi'),$$

est un automorphisme intérieur strict.

On sait (voir par exemple [4], Propriété 4, page 49) que $\mathcal{A}$ est un isomorphisme du sup-demi-treillis Δ' sur lui-même. I' étant idéal bilatère minimum de Δ', $\mathcal{A}(I') = I'$ et la restriction de $\mathcal{A}$ à I' est une bijection Φ de I' qui vérifie la condition (P) puisque I' est un sous-sup-demi-treillis complet de Δ'. D'après la proposition 5.3, cette bijection peut être prolongée par un automorphisme intérieur strict $\mathcal{A}_\varphi$. Le corollaire de la proposition 2.11 entraîne alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varphi$.

6. PROPRIETES DU DEMI-GROUPE Δ''

Δ'' contient l'élément permis 0 du demi-groupe Δ.

Proposition 6.1 : Les idéaux à droite 0-minimaux des demi groupes Δ'' et I'' sont les complexes R_u $(u \in E)$. Les idéaux à gauche 0-minimaux de Δ'' et I'' sont les complexes $L_X'' = L_X \cap \Delta''$ $(X \neq \phi)$. I'' est idéal bilatère 0-minimal unique de Δ''.

R_u, étant un idéal à droite de Δ est a fortiori un idéal à droite de Δ'' et I''. Le raisonnement fait dans la démonstration de la proposition 3.2 suffit pour affirmer que tout $\beta_{u,A}$ $(A \neq \phi)$ est un générateur de l'idéal à droite R_u, qui est donc 0-minimal. De même, la démonstration de la proposition 3.3, dans laquelle on remplace U par u et Δ par Δ'' ou I'' montre que tout idéal à droite 0-minimal de Δ'' ou I'' est un R_u. Une étude analogue permet de vérifier que les idéaux à gauche 0-minimaux de Δ'' et I'' sont les L_X''.

Enfin, en remplaçant Δ par Δ'' et L_X par L_X'' dans la démonstration de la proposition 3.6, on montre que I'' est idéal bilatère 0-minimal unique de Δ''.

Proposition 6.2 : I'' est un sous-inf-demi-treillis complet du inf-demi-treillis Δ''.

Il suffit de vérifier que pour toute famille $\mathcal{F}$ d'éléments de I'' la borne inférieure prise dans Δ'' (ou dans Δ) est encore un élément de I''. Or, pour chaque $x \in E$ et chaque $\beta \in \mathcal{F}$, $\beta(x)$ se compose d'un élément de E au plus, et il en est de même pour $(\bigwedge_{\beta \in \mathcal{F}} \beta)(x) = \bigcap_{\beta \in \mathcal{F}} \beta(x)$, d'où $\bigwedge_{\beta \in \mathcal{F}} \beta \in I''$.

Proposition 6.3 : Tout automorphisme du demi-groupe I'' peut être prolongé par un automorphisme intérieur strict de Δ''.

Il existe une bijection $u \longleftrightarrow R_u$ entre E et l'ensemble des idéaux à droite 0-minimaux du demi-groupe I'', et une autre bijection $X \longleftrightarrow L_X''$ entre $\mathcal{P}(E) - \phi$ et l'ensemble des idéaux à gauche 0-minimaux de I''.

Dans un automorphisme $\mathcal{A}$ du demi-groupe I'', chacun de ces ensembles d'idéaux subit une permutation. Il en résulte qu'il existe une bijection λ de E sur lui-même et une bijection μ de $\mathcal{P}(E) - \phi$ sur lui-même telles que

$$(\forall\, u \in E),\ \mathcal{A}(R_u) = R_{\lambda(u)}\ ;\ (\forall\, X \in \mathcal{P}(E) - \phi),\ \mathcal{A}(L_X'') = L''_{\mu(X)}.$$

Par suite, pour tout élément $\beta_{u,X}$ de I'', on a

$$\mathcal{A}(\beta_{u,X}) = \beta_{\lambda(u)\mu(X)}.$$

D'après la proposition 2.8 et la définition de $\mathcal{A}$:

$$u \in X \Longleftrightarrow \beta_{v,X}\,\beta_{u,Y} \neq 0 \Longleftrightarrow \mathcal{A}(\beta_{v,X}\,\beta_{u,Y}) \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\beta_{\lambda(v),\mu(X)}\,\beta_{\lambda(u),\mu(Y)} \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda(u) \in \mu(X).$$

Par conséquent, μ n'est autre que l'extension de λ aux parties de E, et

$$(\forall\, \beta_{u,X} \in I''),\ \mathcal{A}\,(\beta_{u,X}) = \beta_{\lambda(u),\lambda(X)} = \lambda\, \beta_{u,X}\, \lambda^{-1},$$

ce qui achève la démonstration.

Proposition 6.4 (GLUSKIN) : Tout automorphisme du demi-groupe Δ'' est un automorphisme intérieur strict.

En effet, si $\mathcal{A}$ est un tel automorphisme, il laisse globalement invariant l'idéal bilatère 0-minimal unique I'', et sa restriction à I'' est un automorphisme de I''. D'après la proposition 6.3, il existe un automorphisme intérieur strict $\mathcal{A}_\lambda$ du demi-groupe Δ'' qui a la même restriction que $\mathcal{A}$ à I''. En vertu du corollaire de la proposition 2.11, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_\lambda$ coïncident.

7. APPLICATION AU DEMI-GROUPE Δ

Remarquons tout d'abord que tout élément $\beta_{U,X}$ de I se met sous la forme $\alpha_U\, \beta_{u,X}$ (notations du § 2.º ; u est un élément quelconque de E). Ce fait est une conséquence immédiate de la proposition 2.8.

Proposition 7 : Tout automorphisme $\mathcal{A}$ du demi-groupe Δ qui vérifie la condition

$$(P_0) \qquad (\forall\, \varphi,\, \varphi' \in \Delta),\ \mathcal{A}\,(\varphi \vee \varphi') = \mathcal{A}\,(\varphi) \vee \mathcal{A}\,(\varphi'),$$

est un automorphisme intérieur strict.

$\mathcal{A}$ est un isomorphisme du treillis Δ sur lui même ([4], Propriété 4, page 49). I étant idéal bilatère 0-minimal unique de Δ (proposition 3.6) il est globalement invariant dans $\mathcal{A}$.

$L_E = I_0'$ est celui des idéaux à gauche 0-minimaux de Δ qui contient l'élément universel ω. Il est donc lui aussi globalement invariant, ainsi que $I' = I_0' - \{0\}$, puisque $\mathcal{A}\,(0) = 0$, et la restriction de $\mathcal{A}$ à I' est une bijection de I' qui possède la propriété (P) de la proposition 5.3.

Les éléments du treillis Δ qui couvrent 0 (c'est-à-dire les points ou atomes [4] de Δ) sont évidemment les $\beta_{u,v}$, où u et v sont des éléments quelconques de E. L'ensemble de ces éléments de Δ est aussi globalement invariant dans $\mathcal{A}$, ainsi que l'ensemble des R_u, idéaux à droite 0-minimaux de Δ qui les contiennent. La restriction de $\mathcal{A}$ à I''

définit donc une bijection de l'ensemble des R_u sur lui-même, et c'est un automorphisme du demi-groupe I''.

D'après les propositions 5.3 et 6.3, il existe deux bijections λ et μ de E sur lui-même telles que

$$(\forall\, \alpha_U \in I'), \quad \mathcal{A}(\alpha_U) = \lambda\ \alpha_U\, \lambda^{-1},$$

$$(\forall\, \beta_{u,X} \in I''), \quad \mathcal{A}(\beta_{u,X}) = \mu\, \beta_{u,X}\ \mu^{-1}.$$

En prenant en particulier $U = \{u\}$, $X = E$, d'où $\beta_{u,X} = \alpha_u$, on a $(\forall\, \alpha_u \in J)$, $\lambda\alpha_u\,\lambda^{-1} = \mu\alpha_u\,\mu^{-1}$, c'est-à-dire $\lambda\alpha_u = \mu\alpha_u$, ce qui entraîne, d'après la proposition 2.10, $\lambda = \mu$.

En utilisant la remarque initiale du § 7, on voit que, pour tout élément $\beta_{U,X}$ de I

$$\mathcal{A}(\beta_{U,X}) = \mathcal{A}(\alpha_U\, \beta_{u,X}) = \mathcal{A}(\alpha_U)\ \mathcal{A}(\beta_{u,X}) =$$

$$\lambda\alpha_U\, \lambda^{-1}\, \lambda\, \beta_{u,X}\, \lambda^{-1} = \lambda\alpha_U\, \beta_{u,X}\, \lambda^{-1} = \lambda\, \beta_{U,X}\, \lambda^{-1}.$$

Il existe donc un automorphisme intérieur strict $\mathcal{A}_\lambda$ du demi-groupe Δ qui a la même restriction que $\mathcal{A}$ à I. En vertu du corollaire de la proposition 2.11, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_\lambda$ coïncident.

Il serait intéressant de caractériser les autres automorphismes du demi-groupe Δ (s'il en existe ; il n'en existe pas dans le cas où E se compose de deux éléments seulement). Plus généralement, les résultats exposés ci-dessus posent le problème de la caractérisation des demi-groupes qui possèdent un élément-unité et dont tout automorphisme est un automorphisme intérieur strict.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BIRKHOFF. — *Lattice Theory*. Amer. Math. Society, 1948.

[2] A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON. — *The Algebraic Theory of Semigroups*, vol. 1, Amer. Math. Society, 1961.

[3] P. DUBREIL. — *Algèbre*. Cahiers Scientifiques Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[4] M.-L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT. — *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*. Cahiers Scientifiques Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[5] L. M. GLUSKIN. — *Idéaux des demi-groupes de transformations* (en russe). Mat. Sbornik, 47 (1959), 111-130.

[6] A. I. MAL'CEV, *Groupoides symétriques* (en russe). Mat. Sbornik, 31 (1952), 136-151 (Math. Reviews, vol. 14, p. 349).

[7] I. SCHREIER. — *Über Abbildungen einer abstrakten Menge auf ihre Teilmenge*. Fundam. Math., 28 (1937), 261-264.

MAURICE CRESTEY,

Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Paris,
Ecole des Filles, VILLENNES (Seine-et-Oise), France.