ADDENDA a la Memoria
«SOBRE EL PRODUCTO DE SUCESIONES Y SERIES»

publicada en COLLECTANEA MATHEMATICA
(Vol. XXIII, Fasc. 2.º, 1972)

por

PABLO BOBILLO

En el trabajo «Sobre el producto de sucesiones y series» publicado en Collectanea Mathematica (vol. XXIII, fasc. 2.º, 1972) nos planteábamos la siguiente cuestión:

Sea $(a_{ij})_{ij\in N}$ una matriz compleja infinita tal que si $(x_i)_{i\in N}$ e $(y_j)_{j\in N}$ son sucesiones complejas convergentes cualesquiera, converge la serie doble

$$\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}\, x_i\, y_j$$

¿Es necesario para que ello suceda que $\sum\limits_{i,j\geq 0} |a_{ij}| < +\infty$?

En prensa el citado trabajo, se ha publicado una obra en que hemos visto citado (ref. 1.ª) de la bibliografía) un trabajo de Littelwood (ref. 2.ª) que contesta negativamente a la pregunta. En atención al lector, ya que Littelwood no demuestra un punto no trivial directamente, daremos una idea del contraejemplo.

Es conocido (ref. 3.ª, pág. 125) que si $(u_i)_{i\in N}$ y $(v_j)_{j\in N}$ son dos elementos de 1^2, la serie doble $\sum\limits_{\substack{i,j\geq 0\\ i\neq j}} \frac{u_i\, v_j}{i-j}$ es convergente. Y si $(x_i)_{i\in N}$ e $(y_j)_{j\in N}$ son sucesiones complejas acotadas, será

$$\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i\neq j}} \frac{u_i\cdot v_j}{i-j}\, x_i y_j \text{ convergente también.}$$

Tomando $a_{ij} = \frac{u_i\cdot v_j}{i-j}$, resulta pues que para cada par de sucesiones $(x_i)_{i\in N}$, $(y_j)_{j\in N}$ complejas acotadas, converge la serie doble compleja $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij} x_i y_j$. Se sobreentiende que a_{ij} se toma igual a cero cuando las operaciones que aparecen no están definidas en el cuerpo complejo.

Eligiendo
$$u_i = v_i = \frac{1}{(Li)^{2/3}\sqrt{i}}$$

resulta por lo dicho que $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$ converge. Y Littelwood afirma que no converge absolutamente, lo que no es inmediato, incluso enfocando artificiosamente la demostración.

Para demostrar que la citada serie no converge absolutamente basta demostrar que

$$\sum_{j\geq 2} \sum_{k\geq 1} |a_{k,k+j}| = +\infty$$

Gráficamente, por decirlo así, lo que se hace es considerar las diagonales paralelas a la principal, y a la derecha, de la matriz compleja infinita $(a_{ij})_{ij\in N}$. En primer lugar se calcula la suma de los valores absolutos de los elementos de cada diagonal, y luego se considera la serie de tales sumas.

Se tiene

$$|a_{k,k+j}|^{-1} = j\,[L(k+j)]^{2/3}\sqrt{k+j}\,(Lk)^{2/3}\sqrt{k}.$$

Y mediante un cálculo sencillo

$$\sum_{k\geq 2} |a_{k',k+j}| \geq \frac{1}{j} \sum_{i>j+1} \frac{1}{i\,(Li)^{4/3}}.$$

En virtud de la nota 11.6, de la ref. (4), pág. 102, se tiene que es

$$\sum_{i>j+1} \frac{1}{i\,(Li)^{4/3}} \sim \int_{j+1}^{\infty} \frac{dx}{x\,(Lx)^{4/3}} = [L(j+1)]^{-\frac{1}{3}}.$$

De otro modo,

$$\sum_{i>j+1} \frac{1}{i\,(Li)^{4/3}} = [L(j+1)]^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon_j,$$

siendo
$$\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j \sqrt[3]{L(j+1)} = 0.$$

Así, $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k\geq 2} |a_{k,k+j}| \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\left(\varepsilon_j + \frac{1}{\sqrt[3]{L(j+1)}}\right).$$

Pero como

$$\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j\sqrt[3]{L(j+1)}} \quad \text{y} \quad \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j}\left(\varepsilon_j + \frac{1}{\sqrt[3]{L(1+j)}}\right)$$

tiene el mismo carácter de convergencia, y la primera serie diverge en virtud del criterio de condensación de Cauchy, queda que diverge la serie

$$\sum_{j\geq 1}\left(\sum_{k\geq 2} |a_{k,k+j}|\right).$$

Creemos que es difícil la demostración sin recurrir a desarrollos asintóticos, cuestión ésta no muy frecuente en trabajos modernos precisamente, por lo que nos ha parecido interesante dar la anterior demostración.

Así, aunque nuestra conjetura queda resuelta negativamente, indirectamente queda claro que el teorema 10 del trabajo citado no está de más, al dar una condición necesaria y suficiente que puede simplificar el cálculo.

BIBLIOGRAFIA

(1) PIETSCH: *Nuclear locally convex spaces*, Springer V. 1972.

(2) LITTLEWOOD: *On bounded bilinear forms*, Quart. J. Math., Oxford, tomo 1.º, pág. 164, 1930.

(3) HILBERT: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen*, Chelsea, 1953.

(4) DIEUDONNÉ: *Calcul Infinitésimal*, Hermann, 1968.