CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA EN UNA BANDA DE ANCHURA NO CONSTANTE

por

BALTASAR R.-SALINAS

En este trabajo vamos a completar los resultados que hemos obtenido en [6] estudiando el crecimiento de una función analítica en una banda de anchura no constante. Así los teoremas del 3 al 8 que damos aquí son, respectivamente, una generalización de los teoremas 1, 2, 3, 4, 6 y 7 de [6].

NOTACIONES E HIPÓTESIS GENERALES. — I. *Designamos por* $a_k(\sigma)$ *o* $a(\sigma)$ *una función real continua y de variación acotada en el intervalo* $[\sigma_0, +\infty)$. *Entonces existe, evidentemente,*

$$\text{(A)} \qquad \lim_{\sigma \to +\infty} a_k(\sigma) = a_k \neq \pm \infty \qquad (\lim_{\sigma \to +\infty} a(\sigma) = a \neq \pm \infty).$$

II. *Si* $a(\sigma)$ *es una función positiva denotamos por* $b(\sigma)$ *a la función real definida poniendo*

$$\text{(B)} \qquad b(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{a(\sigma)}$$

para cada $\sigma \geq \sigma_0$ *y* $b(\sigma) = 0$ *para* $\sigma < \sigma_0$.

III. *Si las funciones* $a_1(\sigma)$ *y* $a_2(\sigma)$ *satisfacen* $a_1(\sigma) < a_2(\sigma)$ *para* $\sigma \geq \sigma_0$, *designamos por* $B_{\sigma_0}[a_1(\sigma), a_2(\sigma)]$ *a la banda*

$$B = \{s = \sigma + i\tau \mid \pi a_1(\sigma) < \tau < \pi a_2(\sigma), \ \sigma > \sigma_0\}$$

cuando $\sigma_0 \neq -\infty$ *y por* $B[a_1(\sigma), a_2(s)]$ *cuando* $\sigma_0 = -\infty$. *En todo este trabajo supondremos que* $B_{\sigma_0}[a_1(\sigma), a_2(\sigma)]$ *es una banda de amplitud*

$$\text{(C)} \qquad (a_2 - a_1)\,\pi > 0$$

en el punto ∞.

IV. *Sea* $B = B_{\sigma_0}[a_1(\sigma), a_2(\sigma)]$, *entonces designamos por* $z(s) = x(s) + iy(s)$ *la función continua en* $\overline{B}$ *que realiza la representación conforme de* B *sobre* $B_0 = B_0[-1/2, 1/2]$ *de forma que* $z(\sigma_0 + i\pi a_k(\sigma_0)) = (-1)^k \pi i/2$ *para* $k = 1, 2$ *y* $z(\infty) = \infty$. *De acuerdo con esto denotamos por* $s(z) = \sigma(z) + i\tau(z)$ $(z \in \overline{B}_0)$ *la función inversa de* $z(s)$ *y ponemos*

$$(\underline{\mathrm{D}}) \qquad \underline{x}(\sigma) = \min \{x(\sigma + i\tau) \mid \pi a_1(\sigma) \leq \tau \leq \pi a_2(\sigma)\},$$

$$(\overline{\mathrm{D}}) \qquad \overline{x}(\sigma) = \max \{x(\sigma + i\tau) \mid \pi a_1(\sigma) \leq \tau \leq \pi a_2(\sigma)\},$$

$$(\underline{\mathrm{E}}) \qquad \underline{\sigma}(x) = \min \{\sigma(x + iy) \mid |y| \leq \pi/2\},$$

$$(\overline{\mathrm{E}}) \qquad \overline{\sigma}(x) = \max \{\sigma(x + iy) \mid |y| \leq \pi/2\}.$$

V. *Designamos por* $H(\sigma)$ *y* $S(\sigma)$ *dos funciones reales, no negativas y no decrecientes de la variable real* σ.

Conviene que expongamos ahora algunas propiedades de las funciones $z(s)$ y $s(z)$, cuya demostración omitimos por ser conocidas o bien por poderse seguir la misma marcha que MANDELBROJT en [3] para el caso de bandas simétricas respecto del eje real $\tau = 0$.

PROPIEDADES DE $z(s)$ Y $s(z)$. — I'. *Siendo* a_1 *y* a_2 *finitos, se tiene*

$$(\mathrm{A}') \qquad \omega = \sup \{\overline{\sigma}(x) - \underline{\sigma}(x) \mid x \geq 0\} \neq +\infty \ (^1).$$

II'. *Siendo* $a_1(\sigma)$ *y* $a_2(\sigma)$ *de variación acotada en* $[\sigma_0, +\infty)$ *y* $a_2 - a_1 > 0$, *resulta*

$$(\mathrm{B}') \qquad x(s) = b(\sigma) + 0(1)$$

para $s = \sigma + i\tau \in \overline{B}$, $B = B_{\sigma_0}[a_1(\sigma), a_2(\sigma)]$ (2).

III'. *Cualquiera que sea el número* $\tau_0 : 0 < \tau_0 < 1/2$, $s'(z)$ *tiende hacia* $a_2 - a_1$ *cuando* $z \to \infty$ *en* $B_0[-\tau_0, \tau_0]$. *En particular,*

$$(\mathrm{C}') \qquad \lim_{x \to +\infty} \sigma'(x) = a_2 - a_1 \ (> 0) \ (^3).$$

IV'. *Si la derivada* $a_k'(\sigma)$ *existe para* $\sigma \geq \sigma_0$ $(k = 1$ *o* $k = 2)$ *y satisface las condiciones*

$$|a_k'(\sigma)| < A \quad y \quad (-1)^k [a_k'(\sigma + h) - a_k'(\sigma)] > -Ah \quad (h > 0),$$

---

(1) Véase MANDELBROJT [3], (2.2.6) pág. 34.

(2) Véase DUFRESNOY [1] y Mme. LELONG-FERRAND [2]. Para el caso de bandas simétricas: [3], (2.2.I) pág. 32 y (2.2.II) pág. 34.

(3) [3], (2.2.III) pág. 37.

donde A es una constante positiva, existe un número $\delta > 0$ *tal que para* $x_0(\sigma) = x(\sigma + i\pi a_k(\sigma))$ *resulta*

$$(\mathrm{D}') \qquad x_0(\sigma_2) - x_0(\sigma_1) > \delta(\sigma_2 - \sigma_1)$$

para $0 < \sigma_2 - \sigma_1 < 1$ *y* $\sigma_1 \geq \sigma_0$ (4).

V′. *Sea* $f(s)$ *una función no idénticamente nula, acotada y analítica en* $B = B_{\sigma_0}[a_1(\sigma), a_2(\sigma)]$ *y continua en* $\bar{B}$. *Entonces, si la derivada* $a_k'(\sigma)$ *existe para* $\sigma \geq \sigma_0$ $(k = 1$ *o* $k = 2)$ *y existe una constante positiva A tal que*

$$|a_k'(\sigma)| < A \quad y \quad (-1)^k [a_k'(\sigma + h) - a_k'(\sigma)] > -Ah \quad (h > 0),$$

se tiene

$$(\mathrm{E}') \qquad \int_{\sigma_0}^{+\infty} \log |f(\sigma + i\pi a_k(\sigma))| \, e^{-b(\sigma)} \, d\sigma > -\infty$$

para

$$b(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{a(\sigma)} \quad y \quad a(\sigma) = a_2(\sigma) - a_1(\sigma) \ (5).$$

Nos será también útil:

VI′. *Si* V_k *y* V *son las variaciones totales de* $a_k(\sigma)$ *y de* $\tau(x + i\eta)$ $(|\eta| < \pi/2)$ *en los intervalos* $[\sigma_0, +\infty)$ *y* $[0, +\infty)$, *respectivamente, resulta*

$$(\mathrm{F}') \qquad V \leq \max\{V_1, V_2\}.$$

Demostración. — Siendo $\sigma(iy) = 0$ para $|y| \leq \pi/2$, podemos prolongar la función armónica $\tau(z) = \operatorname{Im} s(z)$ en $B[-1/2, 1/2]$ poniendo $\tau(z) = \tau(-\bar{z})$ para $\operatorname{Re} z < 0$. Entonces, como

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n} [\tau(z + x_k) - \tau(z + x_{k-1})]$$

es una función sub-armónica y acotada en $B[-1/2, 1/2]$ por el principio del máximo resulta

$$\begin{aligned} u(z) &\leq \max u(x \pm \pi i/2) \\ &\leq 2 \max\{V_1, V_2\} \qquad (z \in B_0[-1/2, 1/2]) \end{aligned}$$

(4) [3], (2.3.I) pág. 42.
(5) [3], (2.3.II) pág. 45.

si tomamos $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$ y, por tanto,

$$2V \leq 2 \max \{V_1, V_2\},$$

o sea (F′).

TEOREMA 1. — *Sea $f(s)$ una función analítica en la banda $B = B_{\sigma_0}[a_1(\sigma), a_2(\sigma)]$, continua en su clausura $\bar{B}$ y tal que*

$$\log |f(s)| \leq H(\sigma) \qquad (\sigma = \operatorname{Re} s) \tag{1.1}$$

en B, y

$$\log |f(s)| \leq -S(\sigma) \qquad (\sigma = \operatorname{Re} s) \tag{1.2}$$

sobre la curva $s = \sigma + i\pi a_1(\sigma)$.

Si $a(\sigma) = a_2(\sigma) - a_1(\sigma)$ $(a > 0)$ satisface

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} H(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma < +\infty \tag{1.3}$$

y

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} S(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma = +\infty, \tag{1.4}$$

resulta $f(s) \equiv 0$.

DEMOSTRACIÓN. — El teorema es cierto, según la observación (1.1) de [6], si $a_k(\sigma) =$ conste. $= a_k$ $(k = 1, 2)$. Sean $a_1(\sigma)$ y $a_2(\sigma)$ no constantes, entonces tendremos que $f^*(z) = f(s(z))$, $H^*(x) = H(\sigma(x) + \omega)$ y $S^*(x) = S(\sigma(x) - \omega)$ gozan de las siguientes propiedades:

1. $f^*(z)$ es analítica en $B_0 = B_0[-1/2, 1/2]$ y continua en $\bar{B}_0$.

2. $H^*(x)$ y $S^*(x)$ son no negativas y no decrecientes para x suficientemente grande puesto que $\sigma'(x) \to a > 0$.

3. $\log |f^*(z)| \leq H^*(x)$ para $z = x + iy \in B_0$.

4. $\log |f^*(z)| \leq -S^*(x)$ sobre $z = x - \pi i/2$ $(x > 0)$.

5. $\int^{+\infty} H^*(x)\, e^{-x}\, dx = \int^{+\infty} H(\sigma + \omega)\, e^{-b(\sigma+\omega)+O(1)}\, d\sigma < +\infty$, pues $\sigma'(x) \to a > 0$.

6. $\int^{+\infty} S^*(x)\, e^{-x}\, dx = \int^{+\infty} S(\sigma - \omega)\, e^{-b(\sigma-\omega)+O(1)}\, d\sigma = +\infty$, pues $\sigma'(x) \to a < +\infty$.

Por consiguiente, $f^*(z) \equiv 0$ y $f(s) \equiv 0$.

TEOREMA 2. — *Sea $f(s)$ una función analítica en la banda* $B = B_{\sigma_0}[a_1(\sigma), a_2(\sigma)]$, *continua en* $\overline{B}$ *y tal que*

$$\log|f(s)| \leq H(\sigma) \qquad (\sigma = \operatorname{Re} s) \tag{2.1}$$

en B.

Si

$$|a_k'(\sigma)| < A \quad y \quad |a_k'(\sigma + h) - a_k'(\sigma)| < A\,|h| \tag{2.2}$$

para una constante A *y* $k = 1$ *o* $k = 2$, *y la función* $a(\sigma) = a_2(\sigma) - a_1(\sigma)$ $(a > 0)$ *satisface*

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} H(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma < +\infty \tag{2.3}$$

y

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} \log|f(\sigma + i\pi a_k(\sigma))|\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma = -\infty, \tag{2.4}$$

resulta $f(s) \equiv 0$.

DEMOSTRACIÓN. — El teorema desde luego es cierto, según el lema 1 de [6], si $a_k(\sigma) = \text{conste.} = a_k$ $(k = 1, 2)$. Sean $a_1(\sigma)$ y $a_2(\sigma)$ no constantes, $x_0(\sigma) = x(\sigma + i\pi a_k(\sigma))$ y $\sigma_0(x)$ su función inversa. Entonces, poniendo $f^*(z) = f(s(z))$ y $H^*(x) = H(\sigma_0(x) + \omega)$, tendremos

$$\int_0^{+\infty}\left[H^*(x) - \log\left|f^*\left(x - i\,\frac{\pi}{2}\right)\right|\right] e^{-b(\sigma_0(x))}\, d\sigma_0(x) \geq$$
$$\geq \int_{\sigma_0}^{+\infty}\left[H(\sigma) - \log\left|f(\sigma + i\pi a_k(\sigma))\right|\right] e^{-b(\sigma)}\, d\sigma = +\infty.$$

Ahora bien $b(\sigma_0(x)) = x + 0(1)$ y $|d\sigma_0(x)| \leq \delta^{-1}|dx|$, luego

$$\int^{+\infty}\left[H^*(x) - \log\left|f^*\left(x - i\,\frac{\pi}{2}\right)\right|\right] e^{-x}\, dx = +\infty$$

y

$$\int^{+\infty} \log\left|f^*\left(x - i\,\frac{\pi}{2}\right)\right| e^{-x}\, dx = -\infty,$$

puesto que

$$\int^{+\infty} H^*(x)\, e^{-x}\, dx < +\infty.$$

Por tanto, $f^*(z) \equiv 0$ y $f(s) \equiv 0$.

LEMA 1. — *Sea* $f(s)$ *una función analítica en la banda* $B_0 = B_0[-1/2, 1/2]$, *continua en* $\overline{B}_0$ *y tal que*

$$(A_1) \qquad \log|f(s)| \leq H(\sigma) \qquad (\sigma = \operatorname{Re} s)$$

en B_0, *y*

$$(B_1) \qquad \log|f(s)| \leq -S(\sigma)$$

sobre $s = \sigma + i\frac{\pi}{2}$ $(\sigma > 0)$.

Sean $b(\sigma)$ y $b_0(\sigma) = \sigma + O(1)$ *dos funciones crecientes y derivables en* $[o, +\infty)$ *que verifiquen*

$$(C_1) \qquad \frac{b'(\sigma)}{b_0'(\sigma)} \leq p < 1 \qquad (\sigma > 0).$$

Si

$$(D_1) \qquad \int_0^{+\infty} H(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma < +\infty$$

y

$$(E_1) \qquad \int_0^{+\infty} S(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma = +\infty,$$

resulta

$$(F_1) \qquad \int_0^{+\infty} \log|f(\sigma + i\tau(\sigma))|\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma = -\infty$$

sobre cada curva $\tau = \tau(\sigma)$ *con* $|\tau(\sigma)| \leq \tau_0 < \pi/2$.

DEMOSTRACIÓN. — La función

$$(G_1) \qquad u(z) = \log\left|f\left(\log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)\right)\right| - H(0)$$
$$\left(\log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \in B_0\right)$$

es sub-armónica en $\operatorname{Re} z > 0$ y satisface las condiciones siguientes :

1. $u(z) \leq H^*(r) = H(\log(2r+1))$ para $\operatorname{Re} z > 0$ y $r = |z|$.
2. $u(z) \leq -S^*(r) = -S(\log^+(2r-1))$ para $z = ir$ y $r \geq 1$,
   $u(z) \leq -S^*(r) = 0$ para $z = ir$ y $r < 1$.
3. $H^*(r)$ y $S^*(r)$ son funciones no negativas y no decrecientes de $r \geq 0$.
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{H^*(r)}{r} e^{-b(\log r)}\, dr < +\infty$ y $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{H^*(r)}{r^2}\, dr < +\infty$.
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{S^*(r)}{r} e^{-b(\log r)}\, dr = +\infty$.

Por tanto de igual forma que en el lema 2 de [6] resulta

1,2) $$u(z) \leq -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+(y-t)^2} S^*(t)\,dt + $$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+(y+t)^2} H^*(t)\,dt.$$

Luego, si

$$\int_1^{+\infty} \frac{S^*(t)}{t^2}\,dt = +\infty,$$

se deduce $u(z) \equiv -\infty$ y $f(s) \equiv 0$. Sea

3) $$\int_1^{+\infty} \frac{S^*(t)}{t^2}\,dt \neq +\infty,$$

entonces para $\theta(r) = \tau(\log r)$ se verifica

4) $$\int_1^{+\infty} \frac{u(re^{i\sigma})}{r} e^{-b(\log r)}\,dr \leq$$
$$\leq -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} S^*(t)\,dt \int_1^{+\infty} \frac{\cos\theta(r)\, e^{-b(\log r)}}{r^2 - 2rt \operatorname{sen}\theta(r) + t^2}\,dr + $$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} H^*(t)\,dt \int_1^{+\infty} \frac{\cos\theta(r)\, e^{-b(\log r)}}{r^2 + 2rt \operatorname{sen}\theta(r) + t^2}\,dr = -\infty$$

porque

5) $$\int_1^{+\infty} \frac{\cos\theta(r) e^{-b(\log r)}}{r^2 \pm 2rt \operatorname{sen}\theta(r) + t^2}\,dr \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-b(\log r)}}{r^2 - 2rt \operatorname{sen}\theta_0 + t^2}\,dr \quad (\theta_0 = \tau_0)$$
$$= \frac{1}{t}\int_{1/t}^{+\infty} \frac{e^{-b(\log(st))}}{s^2 - 2s\operatorname{sen}\theta_0 + 1}\,ds = \frac{e^{-b(\log t)}}{t}\int_{1/t}^{+\infty} \frac{\max[1, (K/s)^p]}{s^2 - 2s\operatorname{sen}\theta_0 + 1}\,ds$$

y

6) $$\frac{1}{\cos\theta_0}\int_1^{+\infty} \frac{\cos\theta(r)\, e^{-b(\log r)}}{r^2 \pm 2rt\operatorname{sen}\theta(r) + t^2}\,dr \geq \frac{e^{-b(\log r)}}{t}\int_{1/t}^{+\infty} \frac{\min[1, (Ks)^{-p}]}{s^2 + 2s\operatorname{sen}\theta_0 + 1}\,ds,$$

por ser

7) $$0 < \frac{b(\log(st)) - b(\log t)}{b_0(\log(st)) - b_0(\log t)} = \frac{b'(\xi)}{b_0'(\xi)} \leq p < 1$$

y

$$e^{-b(\log t)} \min[1, (Ks)^{-p}] \leq e^{-b(\log(st))} \leq e^{-b(\log t)} \max[1, (K/s)^p],$$

si tomamos

$$\log K = \sup_{\substack{st \geq 1 \\ t \geq 1}} |b_0(\log(st)) - b_0(\log t) - \log s| \qquad (< +\infty).$$

TEOREMA 3. — *Sea* $f(s)$ *una función analítica en* $B = B_{\sigma_0}[a_1(\sigma), a_2(\sigma)]$ *y tal que*

(3.1) $$\log |f(s)| \leq H(\sigma) \qquad (\sigma = \operatorname{Re} s)$$

en B, *y*

(3.2) $$\log |f(s)| \leq - S(\sigma)$$

sobre la curva $s = \sigma + i\pi a_0(\sigma)$ *de* B *con* $a_1 < a_0 < a_2$.

Si la función $a(\sigma)$ *satisface*

(3.3) $$0 < a < a_2 - a_1,$$

(3.4) $$\int_{\sigma_0}^{+\infty} H(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma < +\infty$$

y

(3.5) $$\int_{\sigma_0}^{+\infty} S(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma = +\infty,$$

resulta $f(s) \equiv 0$.

DEMOSTRACIÓN. — Como se pueden determinar a_1^*, a_2^* y σ_0^* de manera que se verifiquen

$$a_1 < a_1^* < a_0 < a_2^* < a_2, \qquad a_2^* - a_1^* > a$$

y

$$a_1^* < a_0(\sigma) < a_2^*, \qquad a_2^* - a_1^* > a(\sigma)$$

para $\sigma > \sigma_0^*$, no hay inconveniente en suponer que $a_1(\sigma)$ y $a_2(\sigma)$ son constantes. Igualmente, podemos suponer que $a_0 \neq (a_1 + a_2)/2$.

Caso 1 : $\max\limits_{k=1,2} |a_k - a_0| > a$. Sea por ejemplo $a_2 - a_0 > a$, entonces se verifica $a_2 - a_0(\sigma) > a(\sigma)$ para $\sigma > \sigma_0^*$. Por tanto, aplicando el teorema 1 en la banda $B_{\sigma_0^*}[a_0(\sigma), a_0(\sigma) + a(\sigma)]$, resulta $f(s) \equiv 0$.

Caso 2: $\min\limits_{k=1,2} |a_k - a_0| < a$. Sea por ejemplo $a_0 - a_1 < a$, entonces se verifica $a_0(\sigma) - a_1 < a(\sigma)$ para $\sigma > \sigma_0^*$. Por consiguiente, si excepcionalmente designamos aquí por $z(s)$ la función que realiza la representación conforme de $B_{\sigma_0^*}[a_1, a_0(\sigma)]$ en $B_0 = B_0[-1/2, 1/2)]$ y es continua en la clausura de la primera de estas bandas, $s(z) = \sigma(z) + i\tau(z)$ es la función inversa de $z(s)$ y ponemos $\sigma_0(x) = \sigma\left(x + \frac{i\pi}{2}\right)$, se deduce que las funciones $f^*(z) = f(s(z))$, $H^*(x) = H(\sigma_0(x) + \omega)$ y $S^*(x) = S(\sigma_0(x) - \omega)$ poseen las siguientes propiedades :

1. $f^*(z)$ es analítica en B_0 y continua en $\bar{B}_0$.

2. $H^*(x)$ y $S^*(x)$ son funciones no negativas y no decrecientes de $x \geq 0$.

3. $\log |f^*(z)| \leq H^*(x)$ en B_0.

4. $\log |f^*(z)| \leq -S^*(x)$ sobre $z = x + \frac{i\pi}{2}$ $(x \geq 0)$.

5. $\int_0^{+\infty} H^*(x)\, e^{-b(\sigma(x))}\, dx < +\infty$.

6. $\int_0^{+\infty} S^*(x)\, e^{-b(\sigma(x))}\, dx = +\infty$.

7. Si $b_0(\sigma) = \int_{\sigma_0^*}^{\sigma} \frac{d\sigma}{a_0(\sigma) - a_1}$, se verifica

$$\frac{b'(\sigma(x))}{b_0'(\sigma(x))} = \frac{a_0(\sigma(x)) - a_1}{a(\sigma(x))} \to \frac{a_0 - a_1}{a} < 1.$$

Por tanto, según el lema 1, se tiene

$$\int_0^{+\infty} \log |f^*(z(\sigma + i\pi a_1'))|\, e^{-b(\sigma(x))}\, dx = -\infty$$

si $x = \operatorname{Re} z(\sigma + i\pi a_1')$, y

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} \log |f(\sigma + i\pi a_1')|\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma = -\infty \qquad (\sigma'(x) \to a_0 - a_1)$$

para cada $a_1' = a_1 + \varepsilon < \inf a(\sigma)$ $(\varepsilon > 0)$ puesto que $y(\sigma + i\pi a_1') \to$ $\to -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon\pi}{a_0 - a_1}$. Por consiguiente, si tomamos $\varepsilon < a_2 - a_1 - a$ y σ_0^* suficientemente grande de modo que sea $a_1 + \varepsilon < a_2 - a(\sigma)$ para $\sigma > \sigma_0^*$ y aplicamos el teorema 2 en la banda $B_{\sigma_0^*}[a_1', a_1' + a(\sigma)]$, resulta $f(s) \equiv 0$.

Teorema 4. — *Sea $f(s)$ una función analítica en $B = B_{\sigma_0}[a_1(\sigma), a_2(\sigma)]$ y tal que*

$$\log |f(s)| \leq H(\sigma) \qquad (\sigma = \operatorname{Re} s) \tag{4.1}$$

en B, y

$$\log |f(s)| \leq -S(\sigma) \tag{4.2}$$

sobre la curva $s = \sigma + i\pi a_0(\sigma)$ de B con $a_1 < a_0 < a_2$.

Si $a(\sigma) = a_2(\sigma) - a_2(\sigma)$ *satisface*

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} H(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma < +\infty \tag{4.3}$$

y

$$\overline{\lim_{\sigma \to +\infty}}\, S(\sigma)\, e^{-b(\sigma)} = +\infty, \tag{4.4}$$

resulta $f(s) \equiv 0$.

DEMOSTRACIÓN. — Evidentemente las funciones $f^*(z) = f(s(z))$, $H^*(x) = H(\sigma(x) + \omega)$ y $S^*(x) = S(\sigma(x) - \omega)$ cumplen las condiciones:

1. $f^*(z)$ es analítica en $B_0 = B_0[-1/2,\ 1/2]$.

2. $H^*(x)$ y $S^*(x)$ son funciones no negativas y no decrecientes para x suficientemente grande.

3. $\log|f^*(z)| \leq H^*(x)$ en B_0.

4. $\log|f^*(z)| \leq -S^*(x)$ sobre $z = z(\sigma + i\pi a_0(\sigma))$ $(x \geq 0)$.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} H^*(x)\, e^{-x}\, dx = \int_{\sigma_0}^{+\infty} H(\sigma + \omega)\, e^{-b(\sigma+\omega)+O(1)}\, d\sigma < +\infty$

$(\sigma'(x) \to a > 0)$.

6. $\displaystyle\overline{\lim_{x \to +\infty}}\, S^*(x)\, e^{-x} = \overline{\lim_{\sigma \to +\infty}}\, S(\sigma - \omega)\, e^{-b(\sigma-\omega)+O(1)} = +\infty.$

Por consiguiente, como

$$\lim_{\sigma \to +\to} |y(\sigma + i\pi a_0(\sigma))| = \left|\frac{a_0 - (a_1 + a_2)/2}{a_2 - a_1}\, \pi\right| < \frac{\pi}{2},$$

de igual forma que en el teorema 2 de [6] se deduce que $f^*(z) \equiv 0$ y $f(s) \equiv 0$.

TEOREMA 5. — *Si* $a(\sigma) = a_2(\sigma) - a_1(\sigma)$ *y*

$$\overline{\lim_{\sigma \to +\infty}}\, S(\sigma)\, e^{-b(\sigma)} < +\infty, \tag{5.1}$$

existe una función $f(s) \neq 0$, *analítica y acotada en la banda* $B = B_{\sigma_0}[a_1(\sigma),\ a_2(\sigma)]$, *tal que sobre la curva* $s = \sigma + i\pi a_0(\sigma)$ *de* B *se verifica*

$$\log|f(s)| \leq -S(\sigma). \tag{5.2}$$

DEMOSTRACIÓN. — Siendo

$$\lim_{\sigma \to +\infty} |y(\sigma + i\pi a_0(\sigma))| = \left|\frac{a_0 - (a_1 + a_2)/2}{a_2 - a_1}\pi\right| < y_0 < \frac{\pi}{2}$$

y

$$x(\sigma + i\pi a_0(\sigma)) = b(\sigma) + O(1),$$

se pueden elegir los números positivos A y B de modo que sea

$$S(\sigma) \leq A + Be^{x(\sigma + i\pi a_0(\sigma))} \cos y(\sigma + i\pi a_0(\sigma))$$

para todo $\sigma \geq \sigma_0$. Entonces la función

(5.3) $$f(s) = \exp\{-A - Be^{z(s)}\}$$

cumple las condiciones requeridas.

LEMA 2. — *Sea* $\alpha \geq a\left(= \lim\limits_{t \to \infty} a(t)\right)$ *y* $\varphi(t)$ *una función no negativa tal que*

(A₂) $$\varphi(t) \leq \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{y} \quad \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, \varphi(t) < \frac{a\pi}{2}.$$

Si $g(t)$ *es una función no negativa y no decreciente de* t *que satisface*

(B₂) $$\int_0^{+\infty} e^{-b(t)} g(t)\, dt < +\infty \quad \left(b(t) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}\right),$$

existe una función $G(z)$, *analítica en la banda* $B = B[-\alpha, \alpha]$, *y otra función* $h(t)$, *no negativa y no decreciente de* t, *tales que*

(C₂) $$g(x) \leq \operatorname{Re} G(z) \qquad (z = x + iy)$$

para $|y| \leq \varphi(x)$,

(D₂) $$|G(z)| \leq h(x) \qquad (z = x + iy)$$

para $|y| \leq \alpha\pi/2$, *y*

(E₂) $$\int_0^{+\infty} e^{-b(t)} h(t)\, dt < +\infty.$$

DEMOSTRACIÓN. — Determinemos p y x_0 de forma que

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}}\, \varphi(t) < \frac{\pi}{2p} < \frac{a\pi}{2}$$

y

$$\varphi(t) < \frac{\pi}{2p} < \frac{a(t)\pi}{2}$$

para $t \geq x_0$ (≥ 0). Sean

$$p_1^{-1} = \sup_{t \geq x_0} a(t) \quad (< +\infty) \quad \text{y} \quad p_2^{-1} = \inf_{t \geq x_0} a(t) \quad (> p^{-1})$$

entonces, siendo

$$b(\xi) \leq b(t) + p_2(\xi - t)$$

para $\xi \geq t \geq x_0$, resulta

$$e^{-b(t)} g(t) = e^{-b(t)} g(t) \int_t^{+\infty} e^{-p_2(\xi - t)} p_2 \, d\xi$$

$$\leq p_2 g(t) \int_t^{+\infty} e^{-b(\xi)} d\xi \leq p_2 \int_t^{+\infty} e^{-b(\xi)} g(\xi) \, d\xi \to 0 \qquad (t \geq x_0)$$

para $t \to +\infty$ y

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^{-b(t)} dg(t) = - e^{-b(x_0)} g(x_0) + \int_{x_0}^{+\infty} e^{-b(t)} b'(t) g(t) \, dt$$

$$\leq p_2 \int_{x_0}^{+\infty} e^{-b(t)} g(t) \, dt < +\infty.$$

Por consiguiente, como

$$\int_{x_0}^{+\infty} \left| \frac{e^{pz}}{\left(e^{\frac{z}{\alpha}} + e^{\frac{t}{\alpha}}\right)^{p\alpha}} \right| dg(t) < < \int_{x_0}^{+\infty} \frac{e^{px}}{\left(e^{\frac{2x}{\alpha}} + e^{\frac{2t}{\alpha}}\right)^{\frac{p\alpha}{2}}} dg(t)$$

$$< < e^{px} \int_{x_0}^{+\infty} e^{-pt} dg(t) = e^{p(x - x_0) + b(x_0)} \int_{x_0}^{+\infty} e^{-b(t)} dg(t) < +\infty,$$

para $|y| \leq \frac{\alpha\pi}{2}$, tendremos que

$$(\mathrm{F}_2) \qquad G(z) = \lambda + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{2^{p\alpha + \frac{1}{2}} e^{pz}}{\left(e^{\frac{z}{\alpha}} + e^{\frac{t}{\alpha}}\right)^{p\alpha}} dg(t)$$

es una función analítica en B y

$$(\mathrm{G}_2) \qquad h(x) = \lambda + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{2^{p\alpha + \frac{1}{2}} e^{px}}{\left(e^{\frac{2x}{\alpha}} + e^{\frac{2t}{\alpha}}\right)^{\frac{p\alpha}{2}}} dg(t)$$

es una función no negativa y no decreciente de x que satisfacen:
(C_2) para λ suficientemente grande. En efecto, como

$$\lim_{x \to -\infty} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{2^{p\alpha + \frac{1}{2}} e^{pz}}{\left(e^{\frac{z}{\alpha}} + e^{\frac{t}{\alpha}}\right)^{p\alpha}} dg(t) = 0 \qquad (z \in B),$$

se puede elegir λ de forma que se verifique

$$\operatorname{Re} G(z) \geq g(x_0) \qquad (\lambda \geq g(x_0))$$

en B para $x \leq x_0$, luego

$$\operatorname{Re} G(z) \geq g(x) \qquad (z \in B)$$

para $x \leq x_0$.

Igualmente, para $|y| \leq \varphi(x)$ $(<\pi/2p)$ y $x \geq x_0$, resulta:

$$\operatorname{Re} G(z) \geq \lambda + \int_{x_0}^{x} \operatorname{Re} \frac{2^{p\alpha+\frac{1}{2}}}{\left[1+\exp\left(\frac{t-z}{\alpha}\right)\right]^{p\alpha}} dg(t)$$

$$\geq \lambda + \int_{x_0}^{x} \frac{2^{p\alpha+\frac{1}{2}} \cos\frac{py}{2}}{\left(2\cos\frac{y}{2\alpha}\right)^{p\alpha}} dg(t)$$

$$\geq g(x_0) + \int_{x_0}^{x} 2^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\pi}{4}\, dg(t) = g(x).$$

(D$_2$) Evidente.

(E$_2$) Siendo

$$p_1 \leq \frac{b(\xi+t)-b(t)}{\xi} \leq p_2$$

ara $t \geq x_0$ y $\xi + t \geq x_0$, tendremos

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{e^{px-b(x)}}{\left(e^{\frac{2x}{\alpha}}+e^{\frac{2t}{\alpha}}\right)^{\frac{p\alpha}{2}}} dx = \int_{x_0-t}^{+\infty} \frac{e^{p\xi-b(\xi+t)}}{\left(e^{\frac{2\xi}{\alpha}}+1\right)^{\frac{p\alpha}{2}}} d\xi$$

$$\leq e^{-b(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{p\xi}\max\left[e^{-p_1\xi},\ e^{-p_2\xi}\right]}{\left(e^{\frac{2\xi}{\alpha}}+1\right)^{\frac{p\alpha}{2}}} d\xi = O\left(e^{-b(t)}\right)$$

para $t \geq x_0$ y, por tanto,

$$\int_{x_0}^{+\infty} h(x)\, e^{-b(x)}\, dx = \lambda \int_{x_0}^{+\infty} e^{-b(x)}\, dx +$$

$$+ 2^{p\alpha+\frac{1}{2}} \int_{x_0}^{+\infty} dg(t) \int_{x_0}^{+\infty} \frac{e^{px-b(x)}}{\left(e^{\frac{2x}{\alpha}}+e^{\frac{2t}{\alpha}}\right)^{\frac{p\alpha}{2}}} dx < +\infty.$$

TEOREMA 6. — *Sean*

$$a_1{}^*(t) \leq a_1(t) \leq a_2(t) \leq a_2{}^*(t)$$

y

$$a_2 - a_1 < a.$$

Si

$$\int_0^{+\infty} e^{-b(\sigma)} S(\sigma)\, d\sigma < +\infty, \tag{6.1}$$

existe una función $f(s)$, analítica y no nula en $B^* = B[a_1{}^*(\sigma), a_2{}^*(\sigma)]$, y otra función $H(\sigma)$, no negativa y no decreciente, tales que

$$\log |f(s)| \leq -S(\sigma) \quad (\sigma = \operatorname{Re} s) \tag{6.2}$$

en $B = B[a_1(\sigma), a_2(\sigma)]$,

$$\log |f(s)| \leq H(\sigma) \quad (\sigma = \operatorname{Re} s) \tag{6.3}$$

en B^*, y

$$\int_0^{+\infty} e^{-b(\sigma)} H(\sigma)\, d\sigma < +\infty. \tag{6.4}$$

DEMOSTRACIÓN.—Según el lema 2 bastará poner

$$f(s) = e^{-G(s - i\pi a_0)} \quad (a_0 = (a_1 + a_2)/2) \tag{6.5}$$

tomando $g(t) = S(t)$, $H(t) = h(t)$, $\varphi(t) = \max\limits_{k=1,2} |a_k(t) - a_0|\pi$ y α suficientemente grande, por ejemplo,

$$\alpha = 2 \sup \{|a^*_1(t) - a_0| + |a^*_2(t) - a_0|\}.$$

LEMA 3.—*Sean $a(t) \geq a$ y $\alpha \geq a$. Si $g(t)$ es una función no negativa y no decreciente de t con la integral*

$$\int_0^{+\infty} e^{-b(t)} tg(t)\, dt < +\infty, \tag{A$_3$}$$

existe una función $G(z)$, analítica en $B = B[-\alpha, \alpha]$, y otra función $h(t)$, no negativa y no decreciente de t, tales que

$$g(x) \leq \operatorname{Re} G(z) \quad (z = x + iy) \tag{B$_3$}$$

para $|y| \leq a\pi/2$,

$$|G(z)| \leq h(x) \quad (z = x + iy) \tag{C$_3$}$$

para $|y| \leq \alpha\pi/2$, y

$$\int_0^{+\infty} e^{-b(t)} h(t)\, dt < +\infty. \tag{D$_3$}$$

DEMOSTRACIÓN.—Igualmente como en el lema 2 se ve que

$$G(z) = \lambda + \int_0^{+\infty} \frac{2^{\frac{\alpha}{a}+\frac{1}{2}} e^{\frac{z}{\alpha}}}{\left(e^{\frac{z}{\alpha}} + e^{\frac{t}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{a}}} dg(t) \tag{E_3}$$

es una función analítica en B y que

$$h(x) = \lambda + \int_0^{+\infty} \frac{2^{\frac{\alpha}{a}+\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{a}}}{\left(e^{\frac{2x}{\alpha}} + e^{\frac{2t}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2a}}} dg(t) \tag{F_3}$$

es una función no negativa y no decreciente de x que satisfacen (B_3) y (C_3) para λ suficientemente grande.

Entonces bastará probar (D_3). En primer lugar, observemos que

$$e^{-b(t)} tg(t) \leq \frac{1}{a} \int_t^{+\infty} e^{-b(\xi)} \xi g(\xi)\, d\xi \to 0$$

para $t \to +\infty$ y

$$\int_0^{+\infty} e^{-b(t)} t dg(t) \leq \int_0^{+\infty} e^{-b(t)} (tb'(t) - 1)\, g(t)\, dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-b(t)} \left(\frac{t}{a} - 1\right) g(t)\, dt < +\infty.$$

Por otra parte, como

$$p_1 \leq \frac{b(\xi + t) - b(t)}{\xi} \leq p_2 = \frac{1}{a} \qquad (p = p_2),$$

se tiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{a} - b(x)}}{\left(e^{\frac{2x}{\alpha}} + e^{\frac{2t}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2a}}} dx \leq e^{-b(t)} \int_{-t}^{+\infty} \frac{\max\,[e^{(p-p_1)\xi},\ 1]}{\left(e^{\frac{2\xi}{\alpha}} + 1\right)^{\frac{\alpha}{2a}}} d\xi$$

$$\leq (At + B)\, e^{-b(t)} \qquad (A = 1,\ B = 1/p_1)$$

para $t \geq 0$ y, por tanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-b(x)} h(x)\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-b(x)}\, dx +$$

$$+ 2^{\frac{\alpha}{a}+\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-b(t)} (At + B)\, dg(t) < +\infty.$$

De este lema se deduce inmediatamente:

TEOREMA 7. — *Sean*

$$a_1^* \leq a_1 \leq a_2 \leq a_2^*$$

y

$$a(\sigma) \geq a = a_2 - a_1.$$

Si

$$\int_0^{+\infty} \sigma S(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma < +\infty, \tag{7.1}$$

existe una función $f(s)$, analítica y no nula en la banda $B[a_1^*, a_2^*]$, y otra función $H(\sigma)$, no negativa y no decreciente, tales que

$$\log |f(s)| \leq -S(\sigma) \qquad (\sigma = \mathrm{Re}\, s) \tag{7.2}$$

en $B[a_1, a_2]$,

$$\log |f(s)| \leq H(\sigma) \qquad (\sigma = \mathrm{Re}\, s) \tag{7.3}$$

en $B[a_1^*, a_2^*]$ y

$$\int_0^{+\infty} H(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma < +\infty. \tag{7.4}$$

TEOREMA 8. — *Sea $f(s)$ una función analítica en la banda $B^* = B_{\sigma_0}[a_1^*(\sigma), a_2^*(\sigma)]$ y tal que*

$$\log |f(s)| \leq H(\sigma) \qquad (\sigma = \mathrm{Re}\, s) \tag{8.1}$$

en B^* y

$$\log |f(s)| \leq -S(\sigma) \qquad (\sigma = \mathrm{Re}\, s) \tag{8.2}$$

sobre la frontera de la banda $B = B_{\sigma_0}[a_1(\sigma), a_2(\sigma)] \subset B^*$ de amplitud $(a_2 - a_1)\pi < (a_2^* - a_1^*)\pi$ en $s = \infty$.

Si para $a(\sigma) = a_2(\sigma) - a_1(\sigma)$ se verifica

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} H(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma < +\infty \tag{8.3}$$

y

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} \sigma S(\sigma)\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma = +\infty, \tag{8.4}$$

resulta $f(s) \equiv 0$.

DEMOSTRACIÓN. — Como $f^*(z) = f(s(z))$ es una función analítica en $B_0 = B_0[-1/2, 1/2]$ que satisface, evidentemente,

$$\log |f^*(z)| \leq H^*(x) = H(\sigma(x) + \omega) \qquad (z = x + iy)$$

en B_0 y

$$\log |f^*(z)| \leq - S^*(x) = - S(\sigma(x) - \omega) \quad (z = x + iy)$$

sobre las semirrectas $\{z = x + iy \mid y = \pm \pi/2\}$ y

$$\int_0^{+\infty} H^*(x)\, e^{-x}\, dx = \int_{\sigma_0}^{+\infty} H(\sigma + \omega)\, e^{-b(\sigma+\omega)+0(1)}\, d\sigma < +\infty$$

y

$$\int_0^{+\infty} x S^*(x) e^{-x}\, dx \geq \delta \int_{\sigma_0}^{+\infty} [b(\sigma - \omega) + 0(1)]\, S(\sigma - \omega)\, e^{-b(\sigma-\omega)+0(1)}\, d\sigma$$
$$= +\infty$$

de igual modo que en el teorema 7 de [6] resulta

$$\int_0^{+\infty} \log |f^*(x + i\eta)|\, e^{-x}\, dx = -\infty$$

para cada η : $|\eta| < \pi/2$ y, por tanto,

$$\int_{\sigma_0}^{+\infty} \log |f(\sigma + i\pi a_\eta(\sigma))|\, e^{-b(\sigma)}\, d\sigma = -\infty$$

si $\sigma + i\pi a_\eta(\sigma) = s(x + i\eta)$ y $|\eta| < \pi/2$ (6).

De aquí se deduce $f(s) \equiv 0$ si elegimos los números η : $|\eta| < \pi/2$ y σ_0^* de manera que sea

$$a_2^* - a_\eta > a \quad \text{y} \quad a_2^*(\sigma) - a_\eta(\sigma) > a(\sigma)$$

para $\sigma \geq \sigma_0^*$ cuando $a_2 \neq a_2^*$ y

$$a_\eta - a_1^* > a \quad \text{y} \quad a_\eta(\sigma) - a_1^*(\sigma) > a(\sigma)$$

para $\sigma \geq \sigma_0^*$ cuando $a_2 = a_2^*$ (o $a_1 \neq a_1^*$), y aplicamos el teorema 2 en $B_{\sigma_0^*}[a_\eta(\sigma), a_\eta(\sigma) + a(\sigma)]$ o $B_{\sigma_0^*}[a_\eta(\sigma) - a(\sigma), a_\eta(\sigma)]$ puesto que, según VI', $a(\sigma)$ es de variación acotada y satisface (2.2) por ser

$$\lim_{\sigma \to +\infty} a_\eta'(\sigma) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\sigma \to +\infty} a_\eta''(\sigma) = 0 \qquad (|\eta| < \pi/2).$$

(6) Esta función $a_\eta(\sigma)$ está perfectamente definida para $\sigma \geq \sigma_0^*$ si se toma σ_0^* suficientemente grande puesto que $\sigma'(x + i\eta) \to a > 0$ para $x \to \infty$.

BIBLIOGRAFIA

[1] DUFRESNOY, J., *Sur une théorème d'Ahlfors et son application à l'étude de la representation conforme*. C. R. Acad. Sc., vol. 220 (1945), pág. 426.

[2] FERRAND, J., *Extension d'une inégalité de M. Ahlfors*. C. R. Acad. Sc., vol. 220 (1945), pág. 873.

[3] MANDELBROJT, S., *Séries adhérentes. Regularisation des suites. Applications*. París, Gauthier-Villars, 1952.

[4] RODRÍGUEZ-SALINAS, B., *Moments de fonctions analytiques et problème de Watson*. Journal de Math. Pures et Appl., vol. 35 (1956), págs. 359-382.

[5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B., *Complemento a un teorema de Ahlfors-Heins sobre funciones sub-armónicas*. Rev. de la Acad. de Ciencias de Zaragoza, (2) vol. 9 (1954), págs. 119-125.

[6] RODRÍGUEZ-SALINAS, B., *Crecimiento de una función analítica en un ángulo*. Collectanea Math., vol. 13 (1961) págs. 197-217.

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA