SISTEMAS DIFERENCIALES ORDINARIOS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

por

ALBERTO DOU, S. I.

Como homenaje a mi maestro Dr. D. José M.ª Orts Aracil con admiración y cariño.

SUMMARY

Linear, ordinary, differential systems with constant coefficients.

In § 1 we say that a complex-valued scalar function $u(t)$ εC^{∞} (I), $t \varepsilon I \subset \mathbf{R}$, has finite differential dimension if the vector space generated by $u(t)$ and its derivatives has finite dimension. Let it be $\mathbf{Z}$ the vector space of all functions of finite differential dimension. It is easy to see that $u(t) \varepsilon \mathbf{Z}$ if and only if $u(t)$ is of form (3).

In § 2 starting from Lagrange's Formula (11) we get an explicit solution in finite terms of the system (9), where A is a complex constant matrix and $f(t)$ is a n-dimensional vector, whose components are of finite dimension. We may suppose $f(t)$ as in (10), where v is constant, r is an integer and μ a complex number.

We get the following result: *The vector* $\hat{\pi}(t)$ *given by* (24) *is a particular solution of* (9) *with* $f(t)$ *as in* (10). In this formula (24) the matrices $F(t)$ and $G(t)$, either one of which may be empty, are defined by (12), (13), (14), (15), (16), last identihy of (18), (20) and (23); where P is non singular, J is in Jordan canonical form, m is the multiplicity of μ as eigenvalue of A, k is the highest exponent of the elementary divisors of A containing the root μ, K is built with the Jordan boxes containing μ and M is built with the remaining boxes. The verification of the formula (24) poses no difficulty.

§ 1. *Funciones de dimensión diferencial finita.*

Sea $u(t) \varepsilon C^{\infty}(I)$ una función definida en un intervalo abierto I de la recta real y tomando valores complejos. Sea $V[u]$ el espacio vectorial funcional formado por las combinaciones lineales finitas de la función u y de sus derivadas sucesivas, o sea

$$V[u] = \{z | z = \sum_{k=0}^{m} c_k \frac{d^k u}{dt^k},\ m \varepsilon \mathbf{N},\ c_k\ \varepsilon \mathbf{C}\}.\} \tag{1}$$

Diremos que $u(t)$ tiene *dimensión diferencial finita* sólo y cuando $V[u]$ tenga una dimensión finita ; y en este caso, si $V[u]$ tiene dimensión p, diremos que p es la *dimensión diferencial* de u.

Sea Z (I) o simplemente Z el conjunto de las funciones $u(t) \varepsilon C^{\infty}(I)$ que tengan dimensión diferencial finita. Evidentemente Z es un espacio vectorial. Sea $u \varepsilon Z$. Diremos que $B[u]$,

$$B[u] = \{v_k | v_k\ \varepsilon V[u],\ k = 1.\ 2, \ldots, p\}, \tag{2}$$

es una *base diferencial* de u sólo y cuando $B[u]$ sea una base de $V[u]$

Aserto 1.—*Es condición necesaria y suficiente para que sea $u(t) \varepsilon Z(I)$, que existan un entero positivo m, unos números enteros s_k y unos números complejos c_k y μ_k tales que se tenga*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k\, t^{s_k}\, e^{\mu_k t}, \text{ para todo } t \varepsilon I. \tag{3}$$

Demostración. Es claro que es suficiente que $u(t)$ sea de la forma (3) para que tenga dimensión diferencial finita. Para demostrar la necesidad vamos a valernos del lema siguiente :

Lema.—*Para que $u(t) \varepsilon Z(I)$ es condición necesaria y suficiente que exista un operador diferencial lineal L de orden n y con coeficientes constantes,*

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n,\ a_k \varepsilon \mathbf{C},\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

tal que

$$L[u] = 0 \qquad \textit{para todo } t \varepsilon I. \tag{5}$$

En efecto : la condición (5) es manifiestamente suficiente, pues expresa que $\frac{d^n u}{dt^n}$ es una combinación lineal de las derivadas de orden inferior, y lo mismo se obtiene para las derivadas sucesivas. También es claramente necesaria.

Ahora bien, de este lema resulta que si $u(t) \varepsilon Z$, entonces $u(t)$ ha de ser una integral de la ecuación diferencial (5), y por tanto $u(t)$ ha de ser de la forma (3) con que el aserto primero queda demostrado.

ASERTO 2.—*El conjunto de funciones*

$$F = \{t^s e^{\mu t} \mid s \varepsilon \mathbf{N},\ \mu \varepsilon \mathbf{C}\} \tag{6}$$

es una base del espacio vectorial Z.

Según (3) es evidente que si $u \varepsilon Z$, entonces $u(t)$ puede expresarse como combinación lineal finita de elementos de F. Por tanto hay que demostrar solamente que las funciones pertenecientes a F son linealmente independientes, es decir que si se tiene una suma de un número finito h de sumandos,

$$\sum_{j=1}^{h} c_j t^{s_j} e^{\mu_j t} = 0 \text{ para todo } t \varepsilon I \tag{7}$$

siendo los c_j números complejos y siendo $(s_j, \mu_j) \neq (s_i, \mu_i)$ cuando sea $j \neq i$, entonces necesariamente todos los coeficientes c_j han de ser nulos. En efecto : todas las funciones pertenecientes a F son analíticas y enteras y por tanto (7) tiene que verificarse para todo $t \varepsilon \mathbf{C}$. Consideremos en el plano complejo de las t una semirrecta que parta del origen y tal que la parte real de $\mu_j t$ sea distinta de la parte real de $\mu_i t$ siempre que $\mu_j \neq \mu_i$ y hagamos tender t hacia infinito a lo largo de esta semirrecta. Basta ordenar los sumandos de (7) según el orden de su crecimiento cuando $t \to \infty$ para ver inmediatamente que todos los c_j han de ser nulos c. q. d. Otras conocidas demostraciones son la de CODDINGTON-LEVINSON en [1], capítulo 3, teorema 6.5, o bien empleando las propiedades de los determinantes de Vandermonde y de los alternantes confluentes.

COROLARIO.—*Sea* $u(t) \varepsilon Z$ *y sea* p *su dimensión diferencial. Entonces existe una base diferencial* $B[u]$, *única, de la forma*

$$B[u] = \{t^{k_j} e^{\mu_j t} \mid j = 1, \ldots, m;\ k_j = 0, 1, \ldots, s_j\}, \tag{8}$$

donde $\mu_j \neq \mu_i$ *si* $j \neq i$, *y siendo naturalmente*

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_m + m = p.$$

§ 2. *Integración de la fórmula de Lagrange.*

Sea el sistema diferencial de orden n

$$\frac{dx}{dt} = A\,x + f(t),\; x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{9}$$

siendo A una matriz constante compleja y siendo $f(t)$ un vector n—dimensional, cada una de cuyas componentes sea de dimensión diferencial finita, es decir sea una combinación lineal con coeficientes complejos de productos de polinomios por exponenciales. En virtud de la linealidad del sistema podemos suponer

$$f(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} t^r e^{\mu t} \equiv t^r e^{\mu t} v, \tag{10}$$

siendo

$$r \in \mathbf{N},\; \mu \in \mathbf{C},\; v \text{ un vector constante complejo.}$$

Nos proponemos obtener una integral particular explícita y en términos finitos del sistema (9) cuando $f(t)$ es de la forma (10). Para ello partimos de la fórmula de Lagrange

$$\pi(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\,ds \tag{11}$$

que da la integral particular de (9) que para $t = t_0$ vale $\pi(t_0) = 0$.

Puede suceder que la constante μ que figura en (10) sea un autovalor de A ; en este caso sea m la multiplicidad de μ como raíz del polinomio característico en λ: $det\,(\lambda I - A) = 0$. Si μ no es un auto-valor de A entonces pondremos $m = 0$. Así mismo, si μ es un autovalor de A sea k el exponente máximo de los divisores elementales de A que contienen el autovalor μ ; si μ no es un autovalor de A entonces pondremos $k = 0$. Naturalmente ha de ser $0 \lesssim k \lesssim m \lesssim n$ y si $m > o$ también ha de ser $k > o$.

Supongamos que se conoce la forma canónica de Jordan de la matriz A y sea

$$A = PJP^{-1}, \tag{12}$$

siendo P no singular y estando J en la forma canónica de Jordan.

Recordemos que J es matricialmente diagonal,

$$J = \begin{pmatrix} K_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & K_s \end{pmatrix}, \tag{13}$$

siendo las cajas K_j de la forma

$$K_j = \lambda_j I_{n_j} + L_{n_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, s, \tag{14}$$

donde n_j es la dimensión de K_j y L_{nj} es una matriz nilpotente completa en forma canónica y de dimensión n_j, o sea

$$L_{n_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Suponemos que en (13) hemos colocado en primer lugar las cajas K_j para las cuales $\lambda_j = \mu$; y además que K_1 tiene la dimensión máxima $n_1 = k$ de las cajas K_j para las que $\lambda_j = \mu$.

Ponemos

$$J = \begin{pmatrix} K & \bigcirc \\ \bigcirc & M \end{pmatrix}, \; K - \mu I = L, \tag{16}$$

donde K incluye todas las cajas K_j tales que $\lambda_j = \mu$, y M incluye las restantes. No se excluye que K o M sea vacía, es decir, que sea $m = 0$, o $m = n$.

Teniendo en cuenta estas fórmulas y haciendo $t_0 = 0$ la (11) se convierte en

$$\begin{aligned} \pi(t) &= e^{tA}\int_0^t e^{-sA}\, s^r\, e^{\mu s}\, v ds = Pe^{tJ}\int_0^t s^r \begin{pmatrix} e^{-sL} & \bigcirc \\ \bigcirc & e^{-s(M-\mu I)} \end{pmatrix} P^{-1} v ds = \\ &= Pe^{tJ}\left[\int_0^t s^r \left\{ \begin{pmatrix} e^{-sL} & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & e^{-s(M\mu - I)} \end{pmatrix} \right\} ds \right] P^{-1} v = \\ &= \pi^1(t) + \pi^2(t), \end{aligned} \tag{17}$$

donde $\pi^1(t)$ es el sumando correspondiente a la primera matriz y $\pi^2(t)$ el correspondiente a la segunda.

Vamos a calcular explícita y separadamente cada uno de los dos vectores $\pi^1(t)$, $\pi^2(t)$. Recordemos que toda matriz X conmuta con su exponencial e^X. Para calcular $\pi^1(t)$ integraremos por partes tomando

s^r como parte integrable, mientras que para calcular $\pi^2(t)$ tomaremos la matriz como parte integrable. Se tiene sucesivamente

$$\pi^1(t) = P\, e^{tJ}\left[\frac{t^{r+1}}{r+1}\begin{pmatrix} e^{-tL} & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{s^{r+1}}{r+1}\begin{pmatrix} Le^{-sL} & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} ds\right] P^{-1}\, v =$$

$$= P\begin{pmatrix} e^{t(\mu I+L)} & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix}\left[\frac{t^{r+L}}{r+1}\begin{pmatrix} e^{-tL} & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} + \frac{t^{r+2}}{(r+1)\,(r+2)}\begin{pmatrix} Le^{-tL} & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} +\right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{t^{r+k}.\ r!}{(r+k)!}\begin{pmatrix} L^{k-1}\, e^{-tL} & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix}\right] P^{-1}\, v =$$

$$= P.\ e^{\mu t}.\ r!\ t^r\left[\frac{t}{(r+1)!}\begin{pmatrix} I & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} + \frac{t^2}{(r+2)!}\begin{pmatrix} L & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} + \ldots +\right.$$

$$\left. + \frac{t^k}{(r+k)!}\begin{pmatrix} L^{k-1} & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix}\right] P^{-1}\, v \equiv P\begin{pmatrix} F(t) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} P^{-1}\, v, \qquad (18)$$

donde la última identidad sirve para definir $F(t)$.

Por ejemplo, si en (16) la matriz K incluyera sólo dos cajas K_1, K_2 de dimensiones $n_1 = k = 3$, $n_2 = 2$, se tendría

$$F(t) = e^{\mu t}.\ r!\ t^r \begin{Bmatrix} \frac{t}{(r+1)!} & \frac{t^2}{(r+2)!} & \frac{t^3}{(r+3)!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{(r+1)!} & \frac{t^2}{(r+2)!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t}{(r+1)!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t}{(r+1)!} & \frac{t^2}{(r+2)!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t}{(r+1)!} \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

Para calcular $\pi^2(t)$ pongamos

$$M - \mu\, I = H, \qquad (20)$$

y en virtud de la definición de M se tiene $det\, H \neq 0$.

Para simplificar la escritura calculemos previamente

$$\int_0^t e^{-sH}\, s^r\, ds = -\, H^{-1}\, e^{-tH}\, t^r + H^{-1}\, r\int_0^t e^{-sH}\, s^{r-1}\, ds =$$

$$= -\, e^{-tH}[t^r\, H^{-1} + r\, t^{r-1}\, H^{-2} + \ldots + r(r-1)\ldots 2\, t H^{-r}] + r!\, H^{-r}\int_0^t e^{-sH} ds =$$

$$= -e^{-tH}.H^{-1}\,[t^r I + r\, t^{r-1} H^{-1} + r(r-1)\, t^{r-2} H^{-2} + \ldots + r!\, H^{-r}] + r! H^{-r-1}$$

Por tanto, partiendo de (17) obtenemos

$$\pi^2(t) = P\begin{pmatrix} e^{tK} & \bigcirc \\ \bigcirc & e^{t(\mu I+H)} \end{pmatrix}\left[\int_0^t \begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & e^{-sH} \end{pmatrix} s^r\, ds\right] P^{-1}v =$$

$$= P\begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & r!\, e^{tM}\, H^{-r-1} - e^{\mu t} H^{-1}\,[t^r I + r\, t^{r-1} H^{-1} + \ldots + r!\, H^{-r}] \end{pmatrix} P^{-1}\, v. \tag{21}$$

En la fórmula (21) el término $r!\, e^{tM}\, H^{-r-1}$ se debe a la hipótesis de que para $t = o$, sea $\pi^2(0) = 0$. Ahora bien $r!\, e^{tM}\, H^{-r-1}$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo $x' = Mx$, y por tanto si prescindimos de este término obtendremos otra integral particular $\hat{\pi}(t)$ de (9),

$$\hat{\pi}(t) = \pi^1(t) + \hat{\pi}^2(t), \tag{22}$$

como se comprobará con lo que diremos a continuación. En (22) el vector $\pi^1(t)$ viene dado por (18) y $\hat{\pi}^2(t)$ es

$$\left.\begin{aligned} \hat{\pi}^2(t) &= P\begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & G(t) \end{pmatrix} P^{-1}\, v \\ G(t) &= -\, e^{\mu t}\, H^{-1}\,[t^r\, I + r\, t^{r-1}\, H^{-1} + \ldots + r!\, H^{-r}] \end{aligned}\right\}, \tag{23}$$

como se desprende de (21).

Por ejemplo, si $r = 2$ y si en (16) la matriz M incluyera solamente dos cajas K_3, K_4 de dimensiones $n_3 = 3$, $n_4 = 1$, se tendría, poniendo $\lambda_3 - \mu = \varrho \neq 0$, $\lambda_4 - \mu = \sigma \neq 0$,

$$G(t) = -\, e^{\mu t}\left[\begin{pmatrix} \varrho^{-1} & -\varrho^{-2} & \varrho^{-3} & 0 \\ 0 & \varrho^{-1} & -\varrho^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \varrho^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^{-1} \end{pmatrix} t^2 + 2\begin{pmatrix} \varrho^{-2} & -2\varrho^{-3} & 3\varrho^{-4} & 0 \\ 0 & \varrho^{-2} & -2\varrho^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & \varrho^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^{-2} \end{pmatrix} t + \right.$$

$$\left. + 2\begin{pmatrix} \varrho^{-3} & -3\varrho^{-4} & 6\varrho^{-5} & 0 \\ 0 & \varrho^{-3} & 3\varrho^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & \varrho^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^{-3} \end{pmatrix}\right].$$

Podemos resumir los resultados obtenidos en esta sección en el teorema siguiente :

TEOREMA.—*Con la hipótesis* (10) *y suponiendo* (12), (16), (20), *se tiene que*

$$\hat{\pi}(t) = P\begin{pmatrix} F(t) & \bigcirc \\ \bigcirc & G(t) \end{pmatrix} P^{-1}\, v, \tag{24}$$

donde F y G están definidas por (18) *y* (23), *es una integral particular de* (9).

Para comprobarlo, hay que comprobar que

$$P\begin{pmatrix} F'(t) & \bigcirc \\ \bigcirc & G'(t) \end{pmatrix} P^{-1}\, v = \left(P J P^{-1} \right) P \begin{pmatrix} F(t) & \bigcirc \\ \bigcirc & G(t) \end{pmatrix} P^{-1}\, v + t^{r}\, e^{t\mu}.\, v$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} F'(t) = K.\, F(t) + t^{r}\, e^{\mu t}.\, I \\ G'(t) = M.\, G(t) + t^{r}\, e^{t\mu}.\, I, \end{cases}$$

lo cual es inmediato.

Los resultados enunciados en § 1 y § 2 permiten dar un procedimiento simple y seguro para aplicar el método de los coeficientes indeterminados.

BIBLIOGRAFIA

[1] CODDINGTON AND LEVINSON. — *Theory of Ordinary Differential Equations.* Mc Graw-Hill, New York, 1955.