NOTA SOBRE LA DESCOMPOSICION DE UNA VARIEDAD ALGEBRAICA EN LAS EXTENSIONES DEL CUERPO DE REFERENCIA

por

RAFAEL MALLOL

A mi estimado maestro D. José M.ª Orts.

Sea $\varDelta$ un cuerpo conmutativo cualquiera, Ω un dominio universal sobre $\varDelta$, $\overline{\varDelta}$ el cuerpo formado por los elementos de Ω que son algebraicos sobre $\varDelta$, y $\varDelta_s$ el subcuerpo de $\overline{\varDelta}$ constituido por los elementos separables respecto de $\varDelta$. Llamaremos *extensión* de $\varDelta$, a todo cuerpo extensión del $\varDelta$ respecto del que Ω sea dominio universal.

Sea V una variedad algebraica irreducible sobre $\varDelta$, P un punto genérico de V respecto de $\varDelta$, $\varDelta(P)$ el cuerpo de las $\varDelta$-funciones racionales sobre V, y N la *extensión* normal de $\varDelta$ engendrada por $\varDelta(P) \cap \varDelta_s$. Las *extensiones* de $\varDelta$ respecto de las cuales cada componente irreducible de V es indivisible (absolutamente irreducible), son exclusivamente las *extensiones* de N, [1]).

Si Σ es una *extensión* de $\varDelta$, las Σ-componentes irreducibles de V son sus $(\Sigma \cap \varDelta_s)$-componentes irreducibles, [2]). El objeto de este artículo es obtener el resultado más preciso siguiente:

TEOREMA.—*Las Σ-componentes irreducibles de V son sus $(\Sigma \cap N)$-componentes irreducibles.*

Antes de proceder a su demostración, consideremos algunas proposiciones auxiliares.

PROPOSICIÓN 1.—*Sea Γ una extensión normal de $\varDelta$. Si α es un elemento de Γ, entonces Σ y $(\Sigma \cap \Gamma)(\alpha)$ son linealmente disjuntos sobre $\Sigma \cap \Gamma$.* [3]).

---

1) Véase, por ejemplo, [2], II, Teorema 4.
2) [2], II, Teorema 1, o bien [1], Chap. III, Prop. 8.
3) Es una generalización de [5], Chap. I, Prop. 7.

DEMOSTRACIÓN : Sean f y g los polinomios mónicos irreducibles de $\Sigma[X]$ y $(\Sigma \cap \Gamma)[X]$ respectivamente, que poseen el cero α. Como g es divisible por f, los ceros de f lo son de g ; ahora bien, la normalidad de Γ sobre Δ implica su normalidad sobre $\Sigma \cap \Gamma$, luego los ceros de g, y por tanto los de f, son elementos de Γ. Por consiguiente, los coeficientes de f pertenecen a $\Sigma \cap \Gamma$, lo cual exige $f = g$, que equivale a la relación

$$[\Sigma(\alpha) : \Sigma] = [(\Sigma \cap \Gamma)(\alpha) : (\Sigma \cap \Gamma)]$$

de la cual, según [5], Chap. I, Prop. 6, se deduce el aserto.

PROPOSICIÓN 2.—*Si Γ es una extensión normal y separable sobre Δ, entonces Σ y Γ son linealmente disjuntos sobre $\Sigma \cap \Gamma$.*

DEMOSTRACIÓN : Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ elementos de Γ linealmente independientes sobre $\Sigma \cap \Gamma$. La separabilidad de Γ sobre Δ implica su separabilidad sobre $\Sigma \cap \Gamma$, y por tanto existe un elemento α de Γ tal que $(\Sigma \cap \Gamma)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = (\Sigma \cap \Gamma)(\alpha)$, [4] ; ahora bien, en virtud de la proposición 1, de la normalidad de Γ sobre Δ se deduce la disjunción lineal de Σ y $(\Sigma \cap \Gamma)(\alpha)$ sobre $\Sigma \cap \Gamma$, luego $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son también linealmente independientes sobre Σ, de donde se deduce el aserto.

PREPOSICIÓN 3.—*Sea Γ una extensión normal y separable sobre Δ. Si σ es un elemento de $\Sigma \cap \bar{\Delta}$, se verifica la relación*

$$[\Gamma(\sigma) : \Gamma] = [(\Sigma \cap \Gamma)(\sigma) : (\Sigma \cap \Gamma)]$$

DEMOSTRACIÓN : Pues si $[(\Sigma \cap \Gamma)(\sigma) : (\Sigma \cap \Gamma)] = m$, la disjunción lineal de Σ y Γ sobre $\Sigma \cap \Gamma$ (proposición 2), exige la independencia lineal sobre Γ del sistema de elementos $1, \sigma, \ldots, \sigma^{m-1}$.

Pasamos ahora a demostrar el teorema enunciado

En virtud de [2], II, Teorema 1, no implica restricción de generalidad suponer que Σ es del tipo $\Delta(\sigma)$ siendo σ un elemento de Δ_s.

Sea W una $(\Sigma \cap N)$-componente irreducible de V, Q un punto genérico de W respecto de $\Sigma \cap N$, y designemos por $(\Sigma \cap N)(Q)$ el cuerpo de las $(\Sigma \cap N)$-funciones racionales sobre W. Manifiestamente se tiene la relación

$$(1) \qquad [(\Sigma \cap N)(Q, \sigma) : (\Sigma \cap N)(Q)] \leq [(\Sigma \cap N)(\sigma) : (\Sigma \cap N)]$$

[4] [4], § 43.

Por otra parte, consideremos los polinomios mónicos irreducibles φ y ψ de los anillos $(\Sigma \cap N)\ (Q)[X]$ y $(\Sigma \cap N)\ [X]$, respectivamente, que poseen el cero σ. Como ψ es divisible por φ, los ceros de φ lo son de ψ y en consecuencia son elementos de Δ_s; luego los coeficientes de φ pertenecen al cuerpo $(\Sigma \cap N)\ (Q) \cap \Delta_s$ y por tanto a $N\ (Q) \cap \Delta_s$, es decir, a $N(Q) \cap N_s$. Ahora bien, Q es punto genérico de V respecto de Δ, [5]), y por consiguiente punto genérico, respecto de N, de una componente indivisible de V, luego en virtud de un conocido criterio de indivisibilidad [6]), se verifica $N(Q) \cap N_s = N$. Por consiguiente los coeficientes de φ pertenecen a N, y por tanto φ es divisible por el polinomio definidor de la extensión simple $N(\sigma)$ de N, lo cual implica la relación

$$[N(\sigma) : N] \leq [(\Sigma \cap N)\ (Q, \sigma) : (\Sigma \cap N)\ (Q)] \tag{2}$$

La compatibilidad de las relaciones (1) y (2) con la

$$[(\Sigma \cap N)\ (\sigma) : (\Sigma \cap N)] = [N(\sigma) : N]$$

que se deduce de la proposición 3, exige

$$[(\Sigma \cap N)\ (Q,\ \sigma) : (\Sigma \cap N)\ (Q)] = [(\Sigma \cap N)\ (\sigma) : (\Sigma \cap N)]$$

la cual, en virtud de [5], Chap. I, Prop. 6, equivale a la disjunción lineal de $(\Sigma \cap N)\ (\sigma) = \Sigma$ y $(\Sigma \cap \Sigma)\ (Q)$ sobre $\Sigma \cap N$. Por consiguiente, según [2], Lema 3, las $(\Sigma \cap N)$-especializaciones de Q son sus Σ-especializaciones, es decir, W es una Σ-componente irreducible de V, y la proposición está demostrada.

BIBLIOGRAFIA

[1] LANG. S.: *Introduction to algebraic geometry. New York*, 1958.

[2] MALLOL, R.: *Sobre el comportamiento de una variedad algebraica en las extensiones del cuerpo de referencia*. Collect. Math. 10, 2, 1958.

[3] SAMUEL, P.: *Méthodes d'algèbre abstraite en géometrie algébrique*. Ergebn. Math. Berlín 1955.

[4] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Algebra*. Berlín 1955.

[5] WEIL, A.: *Foundations of algebraic geometry*. New York, 1946.

---

[5]) Véase, por ejemplo, [2], II, Teorema 2.

[6]) [3], I, 7, 2, c), o bien [2], II, Teorema 3.