

ALGUNOS PROBLEMAS DE INVENTARIO CON DEMANDA ALEATORIA RELATIVOS A BIENES SUSTITUTIVOS

por

S. Ríos

Al Prof. Orts, con todo efecto

0. INTRODUCCIÓN.

Suponemos dos ítems A , B en inventario y para un período de regulación t prefijado se supone conocida la ley de probabilidad de demanda correspondiente a un período de tiempo t : $f_t(x, y)$, que designaremos brevemente por $f(x, y)$.

Suponemos: 1.º) que los costes de superávit y déficit de A , B son respectivamente (C_{1A}, C_{2A}) , (C_{1B}, C_{2B}) ; 2.º) estos costes se suponen lineales en cantidad y en tiempo; 3.º) no consideramos el coste de hacer pedidos; 4.º) el tiempo de servir un pedido es prácticamente nulo; 5.º) las decisiones de hacer pedido se toman simultáneamente para A y B a intervalos de t unidades de tiempo prefijado; 6.º) se supone materiales continuos; 7.º) (las salidas son a) instantáneas, b) continuas (a tasa constante).

En el § 5 se considera el caso de ítems sustitutivos y se ve la influencia que tiene en la solución la dependencia de las variables aleatorias que representan la demanda.

1. CASO DE SALIDA INSTANTÁNEA.

Fijado el período de regulación t , las incógnitas son los niveles de inventario que debemos alcanzar S_A , S_B al comienzo del período de regulación.

Para el cálculo del coste esperado para un período de tiempo t , consideramos los siguientes cuatro casos posibles que se pueden presentar respecto de la demanda de x , y en relación con los niveles de inventario S_A , S_B , a determinar:

$$\begin{array}{llll} 1.^\circ & x \leq S_A; & 2.^\circ & x > S_A; & 3.^\circ & x \leq S_A; & 4.^\circ & x > S_A \\ & y \leq S_B & & y \leq S_B & & y > S_B & & y > S_B \end{array}$$

El coste esperado será, pues (*):

$$\begin{aligned}
 C(S_A, S_B) = & \int_0^{S_A} \int_0^{S_B} [C_{1A}(S_A - x) + C_{1B}(S_B - y)] f(x, y) dx dy + \\
 & + \int_{\bar{S}_A}^{\infty} \int_0^{S_B} [C_{2A}(x - S_A) + C_{1B}(S_B - y)] f(x, y) dx dy + \\
 & + \int_0^{S_A} \int_{\bar{S}_B}^{\infty} [C_{1A}(S_A - x) + C_{2B}(y - S_B)] f(x, y) dx dy + \\
 & + \int_{\bar{S}_A}^{\infty} \int_{\bar{S}_B}^{\infty} [C_{2A}(x - S_A) + C_{2B}(y - S_B)] f(x, y) dx dy
 \end{aligned}$$

El problema es determinar los valores de S_A, S_B que hacen mínimo el coste esperado.

Derivando respecto a S_A tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial S_A} = & \int_0^{S_A} \int_0^{S_B} C_{1A} f(x, y) dx dy + \int_0^{S_B} C_{1B}(S_B - y) f(S_A, y) dy - \\
 & - \int_{\bar{S}_A}^{\infty} \int_0^{S_B} C_{2A} f(x, y) dx dy - \int_0^{S_B} C_{1B}(S_B - y) f(S_A, y) dy + \\
 & + \int_0^{S_A} \int_{\bar{S}_B}^{\infty} C_{1A} f(x, y) dx dy + \int_{\bar{S}_B}^{\infty} C_{2B}(y - S_B) f(S_A, y) dy - \\
 & - \int_{\bar{S}_A}^{\infty} \int_{\bar{S}_B}^{\infty} C_{2A} f(x, y) dx dy - \int_{\bar{S}_B}^{\infty} C_{2B}(y - S_B) f(S_A, y) dy
 \end{aligned}$$

Simplificando e igualando a cero resulta la ecuación:

$$C_{1A} F_A(S_A) - C_{2A}(1 - F_A(S_A)) = 0$$

la cual puede obtenerse más directamente(**) si se observa que al depender los primeros sumandos de la expresión sólo de los costes

(*) No se incluye el factor t en las expresiones porque es fijo y aparece como un factor común.

(**) Hemos incluido la forma desarrollada arriba porque en casos más complicados que estudiamos posteriormente es necesario apoyarse en esta descomposición.

de A y los segundos sólo de los de B , la relación que se obtiene al derivar respecto a S_A es la misma que si la función de densidad $f(x, y)$ es de variables independientes.

Se tiene, en efecto, para el primer sumando :

$$\begin{aligned} & \int_0^{S_A} \int_0^{S_B} [C_{1A} (S_A - x) + C_{1B} (S_B - y)] f(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^{S_A} C_{1A} (S_A - x) f_1(x) dx \int_0^{S_B} f_2(y) dy + \int_0^{S_B} C_{1B} (S_B - y) f_2(y) dy \int_0^{S_A} f_1(x) dx \end{aligned}$$

La ecuación análoga para B será :

$$C_{1B} F_B(S_B) - C_{2B} [1 - F_B(S_B)] = 0$$

Obtenemos así la solución :

$$F_A(S_A) = \frac{C_{2A}}{C_{1A} + C_{2A}} ; F_B(S_B) = \frac{C_{2B}}{C_{1B} + C_{2B}}$$

Si se quisieran considerar además costes de hacer pedidos, podría considerarse diversos períodos de tiempo y resolver el correspondiente problema y luego elegir el mínimo entre estos.

2. CASO DE SALIDA CONTINUA.

Considerando los mismos cuatro casos del § 1, la expresión del coste es :

$$\begin{aligned} C(S_A, S_B) &= \int_0^{S_A} \int_0^{S_B} [C_{1A}(S_A - \frac{x}{2}) + C_{1B}(S_B - \frac{y}{2})] f(x, y) dx dy + \\ &+ \int_{S_A}^{\infty} \int_0^{S_B} \left\{ (S_A^2 C_{1A} + (x - S_A)^2 C_{2A}) \frac{1}{2x} + C_{1B}(S_B - \frac{y}{2}) \right\} f(x, y) dx dy \\ &+ \int_0^{S_A} \int_{S_B}^{\infty} \left\{ C_{1A}(S_A - \frac{x}{2}) + [C_B S_B^2 + (y - S_B)^2 C_{2B}] \frac{1}{2y} \right\} f(x, y) dx dy + \\ &+ \int_{S_A}^{\infty} \int_{S_B}^{\infty} \left\{ [S_A^2 C_{1A} + (x - S_A)^2 C_{2A}] \frac{1}{2x} + [S_B^2 C_{1B} + (y - S_B)^2 C_{2B}] \frac{1}{2y} \right\} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

El problema es obtener los valores de S_A, S_B que hacen mínimo el coste esperado.

Derivando respecto a S_A , S_B e igualando a cero se tienen las ecuaciones que, resueltas, nos dan los valores óptimos para S_A y S_B . Más sencillo es, de acuerdo con la observación del párrafo anterior, separar las expresiones de los costes de A y B en la forma :

$$C(S_A, S_B) = \int_0^{S_A} C_{1A} (S_A - \frac{x}{2}) f_A(x) dx + \int_{S_A}^{\infty} [S_A^2 C_{1A} + (x - S_A)^2 C_{2A}] \frac{1}{2x} f_A(x) dx + \\ + \int_0^{S_B} C_{1B} (S_B - \frac{y}{2}) f_B(y) dy + \int_{S_B}^{\infty} [S_B^2 C_{1B} + (y - S_B)^2 C_{2B}] \frac{1}{2y} f_B(y) dy$$

Derivando respecto a S_A e igualando a cero, se obtiene :

$$C_{1A} F_A(S_A) - C_{2A} [1 - F_A(S_A)] + (C_{1A} + C_{2A}) \int_{S_A}^{\infty} S_A \frac{1}{x} f_1(x) dx = 0$$

e introduciendo la función $G_A(S_A) = \int_{S_A}^{\infty} S_A \frac{1}{x} f_1(x) dx$ y la

$$L_A = F_A(S_A) + G_A(S_A)$$

se obtiene la ecuación $(C_{1A} + C_{2A}) L_A(S_A) = C_{2A}$ y análogamente derivando respecto a S_B , resulta :

$$(C_{1B} + C_{2B}) L_B(S_B) = C_{2B}$$

De aquí resulta la solución :

$$L_A(S_A) = \frac{C_{2A}}{C_{1A} + C_{2A}}; \quad L_B(S_B) = \frac{C_{2B}}{C_{1B} + C_{2B}}$$

3. CASO DE SALIDA INSTANTÁNEA CON RESTRICCIONES SOBRE EL INVENTARIO TOTAL.

Si en el caso del §1 agregamos una condición relativa a que el inventario medio se mantenga constante, es decir,

$$\sum_{A,B} \int_0^{S_A} (S_A - x) u_A f_A(x) dx = I$$

en que I es la cantidad que admitimos como total en inventario y u_A un factor de transformación de unidades de A de unidades generales. La función de Lagrange es $\mathcal{L} = C(S_A, S_B) + \lambda (I - \sum_{A,B})$

y derivando respecto a S_A tenemos :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_A} = C_{1A} t_A(S_A) - C_{2A}(1 - F_A(S_A)) - \lambda u_A F_A(S_A) = 0$$

o sea : $(C_{1A} + C_{2A} - \lambda u_A) F_A(S_A) - C_{2A} = 0$

y análogamente

$$(C_{1B} + C_{2B} - \lambda u_B) F_B(S_B) - C_{2B} = 0$$

de donde : $F_A(S_A) = \frac{C_{2A}}{C_{1A} + C_{2A} - \lambda u_A}$; $F_B(S_B) = \frac{C_{2B}}{C_{1B} + C_{2B} - \lambda u_B}$

4. CASO DE SALIDA CONTINUA CON RESTRICCIÓN RELATIVA AL INVENTARIO TOTAL.

Si en las mismas condiciones del §2 agregamos la ecuación de restricción :

$$\sum_{A,B} \left[\int_0^{S_A} u_A \left(S_A - \frac{x}{2} \right) f_A(x) dx + \int_{S_A}^{\infty} u_A S_A^2 \frac{1}{2x} f_A(x) dx \right] = I$$

obtenemos la función de Lagrange : $\mathcal{L} = C + \lambda (I - \Sigma_{A,B})$ y derivando resulta :

$$(C_{1A} + C_{2A} - \lambda u_A) [F_A(S_A) + G(S_A)] - C_{2A} = 0$$

luego

$$L_A(S_A) = \frac{C_{2A}}{C_{1A} - \lambda u_A + C_{2A}} ; L_B(S_B) = \frac{C_{2B}}{C_{1B} - \lambda u_B + C_{1B}}$$

Todos los resultados anteriores se generalizan inmediatamente al caso de n items y también al caso de items discretos, sustituyendo las integrales por sumas.

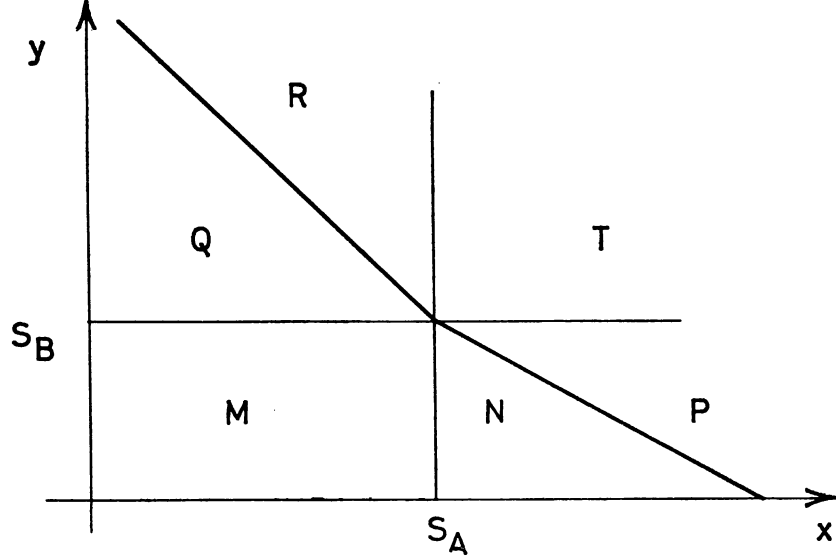
5. CASO DE ITEMS SUSTITUTIVOS.

En el caso del §2, cuando los items son sustitutivos, podemos suponer que si la demanda de A excede S_A , una proporción α ($0 \leq \alpha \leq 1$) de la demanda no satisfecha se transfiere al ítem B. Es decir fijados S_A, S_B , si la demanda fuera (x, y) tal que $x > S_A$, $y < S_B$, supondremos que las cantidades vendidas son

$$S_A, y' = y + \alpha (x - S_A).$$

Puede ocurrir que $y' < S_B$ o que $y' > S_B$ en cuyo caso supondremos que el déficit de A es: $y + \alpha(x - S_A) - S_B$. Y análogamente en el caso $x < S_A$, $y > S_B$.

La expresión del coste esperado será:



$$\begin{aligned}
 C(S_A, S_B) = & \int_0^{S_A} \int_0^{S_B} [C_{1A}(S_A - x) + C_{1B}(S_B - y)] f(x, y) dx dy + \\
 & + \int_{S_A}^{\infty} \int_0^{S_B} C_{2A}(x - S_A)(1 - \alpha) f(x, y) dx dy + \int_{S_A}^{S_A + \frac{S_B}{\alpha}} \int_0^{S_B - \alpha(x - S_A)} C_{1B}[S_B - y - \alpha(x - S_A)] f dx dy + \\
 & + \int_0^{S_B} \int_{\frac{S_B - y}{\alpha} + S_A}^{\infty} C_{2A}[y + \alpha(x - S_A) - S_B] f(x, y) dx dy + \int_0^{S_A} \int_{S_B}^{\infty} [C_{2B}(y - S_B)(1 - \beta)] f dx dy + \\
 & + \int_{S_B}^{S_B + \frac{S_A}{\beta}} \int_0^{S_A - \beta(y - S_B)} C_{1A}[S_A - x - \beta(y - S_B)] f dx dy + \int_0^{S_A} \int_{S_B + \frac{1}{\beta}(S_A - x)}^{\infty} C_{2B}[x + \beta(y - S_B) - S_A] f dx dy + \\
 & + \int_{S_A}^{\infty} \int_{S_0}^{\infty} [C_{2A}(x - S_A) + C_{2A}(y - S_B)] f(x, y) dx dy
 \end{aligned}$$

Derivando respecto a S_A y S_B y simplificando las ecuaciones obtenidas resultan las ecuaciones :

$$C_{2A} = \iint_{M \cup Q} (C_{1A} + C_{2A}) f \, dx \, dy + \alpha \iint_N (C_{1B} + C_{2A}) f \, dx \, dy$$

$$C_{2B} = \iint_{M \cup N} (C_{1B} + C_{2B}) f \, dx \, dy + \beta \iint_Q (C_{1A} + C_{2B}) f \, dx \, dy$$

El aspecto de estas ecuaciones es más complicado que en los casos anteriores, pero su resolución numérica efectiva no es más complicada.

En el caso particular $\alpha = 0$, $\beta = 0$, se obtienen nuevamente las ecuaciones del § 1 y si $\alpha = 1$, $\beta = 1$ resulta sumando las anteriores la ecuación :

$$C_{2A} + C_{2B} = \iint_{M \cup Q \cup N} (C_{2A} + C_{2B} + C_{1A} + C_{1B}) f \, dx \, dy + (C_{1A} - C_{1B}) \left[\iint_N - \iint_Q \right] f \, dx \, dy$$

Debo agradecer a mi colaborador Sr. Yáñez algunos desarrollos y simplificaciones de este trabajo.

