CLASIFICACION DE PUNTOS DE UNA VARIEDAD RESPECTO DE UN HAZ

por

JOSÉ JAVIER ETAYO

1. *INTRODUCCIÓN*

Hemos establecido en una nota [2] las bases geométricas que nos han llevado a la definición general de haz de subvariedades máximas de una variedad algebraica. El estudio que ahora desarrollamos aquí recoge los resultados en ella anunciados, fundamentando la teoría allí solamente esbozada.

Esta teoría corresponde a la generalización de la elaborada por ZARISKI en una sugestiva memoria [4] en la que define los por él llamados *haces* (*pencils*) y que nosotros llamaremos en adelante *haces de Zariski*, en un intento de sistematizar nuestra terminología, reservando la palabra *haz* para el concepto más general que aquí definimos.

El concepto de haz de Zariski, ya muy conocido, podría resumirse así: Dada una variedad V, cuyo cuerpo de funciones es Σ, y siendo Δ un subcuerpo de Σ de grado de trascendencia 1, cada divisor $\mathbf{v}$ de Δ se extiende en Σ a un número finito de divisores $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$, elegidos de primera especie sobre V; los centros de estos divisores, cada uno con su multiplicidad respecto de $\mathbf{v}$, forman una subvariedad de dimensión máxima de V; el conjunto de todas ellas, al variar $\mathbf{v}$, constituye el haz. ZARISKI justifica esta definición cuando, al particularizarla al caso en que Δ es ampliación trascendente pura del cuerpo base k, obtiene el *haz lineal* de la geometría clásica:

$$f_1(x_1, \ldots, x_m) + \lambda f_2(x_1, \ldots, x_m) = 0.$$

Pues bien, si consideramos ahora un subcuerpo $\overline{\Sigma}$ de Σ, sobre el cual sea éste algebraico, y un modelo $\overline{V}$ de $\overline{\Sigma}$, cada uno de los divisores $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ de Σ, que habíamos obtenido como extensiones de $\mathbf{v}$, se restringe en un divisor de $\overline{\Sigma}$ con la multiplicidad correspondiente, $\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_t$; si los modelos están elegidos de modo que V sea entero sobre $\overline{V}$, podemos asegurar que los divisores $\overline{\mathbf{w}}_i$ son de primera especie en $\overline{V}$. Así, a cada divisor $\mathbf{v}$ de Δ corresponde una subvariedad de dimensión máxima de $\overline{V}$ y el conjunto de todas ellas diremos que forma un *haz* en el sentido en que aquí lo estudiamos.

Si, como en el caso de ZARISKI, Δ es ampliación puramente trascendente de k, el haz obtenido en $\overline{V}$ es un *haz algebraico* de los definidos en la geometría clásica, esto es, el conjunto de subvariedades representadas por una ecuación

$$F(x_1, \ldots, x_m, \lambda) = 0,$$

para cada valor del parámetro λ.

Este resultado, que hemos expuesto en una comunicación aún inédita (1), conduce de modo natural al concepto de sistema algebraico

$$F(x_1, \ldots, x_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = 0$$

de subvariedades. Mediante él se puede llegar a un concepto relativo de equivalencia algebraica de divisores, llamando algebraicamente equivalentes a aquéllos que pertenecen a un mismo sistema algebraico de divisores.

El trabajo presente no alcanza a cubrir toda esta teoría que actualmente tenemos en preparación. En él construimos el concepto de haz y caracterizamos los puntos ordinarios, puntos base, puntos singulares y envolvente de un haz. Particularizando al caso de los haces algebraicos se obtienen los resultados bien conocidos de la geometría clásica.

El profesor ABELLANAS nos ha sugerido algunas de las ideas fundamentales que nos han llevado a elaborar la teoría completa.

2. *DEFINICIONES Y CONSTRUCCIONES DE LOS HACES.*

El cuerpo k de constantes se supone algebraicamente cerrado y de característica cero.

Sea $\overline{V}$ una variedad normal de dimensión r, definida por un anillo de polinomios

$$\overline{\mathfrak{o}} = k[x_1, \ldots, x_m]$$

finitamente engendrado sobre k e íntegramente cerrado en su cuerpo de cocientes $\overline{\Sigma}$.

---

(1) *Definición de sistema algebraico de subvariedades máximas de una variedad*, enviada al Congreso Luso-Español para el Progreso de las Ciencias, a celebrar en Oporto el mes de junio de 1962.

Sea Σ una extensión algebraica finita y normal de $\bar{\Sigma}$ y λ un elemento primitivo de esta extensión, que elegiremos entero sobre $\bar{\mathfrak{o}}$: $\Sigma = \bar{\Sigma}(\lambda)$. Construimos los anillos $\mathfrak{o}' = \bar{\mathfrak{o}}[\lambda]$ y $\mathfrak{o}$, cierre íntegro de $\bar{\mathfrak{o}}$ en Σ. Las variedades correspondientes, V' y V, serán birracionalmente equivalentes y de dimensión r, y V, además, es variedad normal. Es inmediato el siguiente

LEMA 1. *El cierre íntegro de* $\mathfrak{o}'$ *es también* $\mathfrak{o}$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, por ser $\mathfrak{o}$ cierre íntegro de $\bar{\mathfrak{o}}$ en Σ, $\mathfrak{o}$ es íntegramente cerrado en Σ y por ser $\mathfrak{o}' \supset \bar{\mathfrak{o}}$, el cierre íntegro $\mathfrak{o}'^*$ de $\mathfrak{o}'$ contendrá a $\mathfrak{o}$; pero, entonces, $\mathfrak{o}'^*$ es entero sobre $\mathfrak{o}'$ que, a su vez, es entero sobre $\bar{\mathfrak{o}}$, luego [5] $\mathfrak{o}'^*$ es entero sobre $\bar{\mathfrak{o}}$ y estará contenido en su cierre íntegro $\mathfrak{o}$.

La definición de haz que ZARISKI establece en [4] es la siguiente:

Sea $\Delta \subset \Sigma$ un cuerpo de grado de trascendencia 1 sobre k y $\mathbf{v}$ un divisor primo de Δ. Sean $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ los divisores primos de Σ, en número finito, que son de primera especie en $\mathfrak{o}$ y cuya restricción a Δ es $\mathbf{v}$: $R_{\mathbf{w}_i} \cap \Delta = R_{\mathbf{v}}$, $i = 1, \ldots, s$; $d \in \Delta$ un parámetro de uniformización para $\mathbf{v}$ y $\alpha_i = \mathbf{w}_i(d)$. Entonces, el divisor

$$\mathbf{a}_{\mathbf{v}} = \mathbf{w}_1^{\alpha_1} \ldots \mathbf{w}_s^{\alpha_s}$$

de Σ, de primera especie en $\mathfrak{o}$, diremos que es el divisor de Σ correspondiente a $\mathbf{v}$, respecto de V. Si ahora hacemos recorrer a $\mathbf{v}$ todos los divisores de Δ, se obtendrá el conjunto de divisores $\{\mathbf{a}_{\mathbf{v}}\}$ de Σ.

Sea W_i el centro del divisor primo $\mathbf{w}_i$ en V, al cual corresponderá el ideal primo mínimo $\mathfrak{P}_i$ de $\mathfrak{o}$. El centro de $\mathbf{a}_{\mathbf{v}}$ en V será una subvariedad de dimensión máxima, $r - 1$:

$$A_{\mathbf{v}} = W_1^{\alpha_1} \ldots W_s^{\alpha_s}$$

de V (2), correspondiente al ideal

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{v}} = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1} \ldots \mathfrak{P}_s^{\alpha_s}$$

de $\mathfrak{o}$. El conjunto $\mathfrak{A} = \{A_{\mathbf{v}}\}$ de subvariedades correspondiente al conjunto $\{\mathbf{a}_{\mathbf{v}}\}$ de divisores antes definido, constituye un *haz de Zariski* de subvariedades de V.

Sea ahora $\bar{\mathbf{w}}$ la restricción a $\bar{\Sigma}$ de un divisor $\mathbf{w}$ de Σ de primera especie en $\mathfrak{o}$:

(2) Adoptamos la notación multiplicativa en vez de la aditiva $\alpha_1 W_1 + \ldots + \alpha_s W_s$ de [4] por continuar la analogía con los ideales y los divisores. Nuestra notación equivale, pues, a decir que $A_{\mathbf{v}}$ se compone de las subvariedades W_i cada una con multiplicidad α_i, respectivamente.

PROPOSICIÓN 1. *El divisor* $\mathbf{w}$ *es de primera especie en* $\mathfrak{o}'$ *y el* $\overline{\mathbf{w}}$ *de primera especie en* $\overline{\mathfrak{o}}$. *Recíprocamente, si* $\overline{\mathbf{w}}$ *es un divisor de* $\overline{\Sigma}$, *de primera especie en* $\overline{\mathfrak{o}}$, $\mathbf{w}$ *es de primera especie en* $\mathfrak{o}$ *y en* $\mathfrak{o}'$.

DEMOSTRACIÓN. La reduciremos a la relación entre los divisores correspondientes de Σ y $\overline{\Sigma}$ que sean de primera especie en $\mathfrak{o}$ y $\overline{\mathfrak{o}}$, respectivamente. La propiedad análoga para $\mathfrak{o}'$ se sigue de modo trivialmente análogo, por el hecho de ser también $\mathfrak{o}'$ entero sobre $\overline{\mathfrak{o}}$.

En primer lugar, siendo $\mathfrak{o}$ entero sobre $\overline{\mathfrak{o}}$ y éste, como $\mathfrak{o}$, íntegramente cerrado, todo ideal primo mínimo $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{o}$ yace sobre un ideal primo mínimo $\overline{\mathfrak{P}} \neq (0)$ de $\overline{\mathfrak{o}}$; y recíprocamente, por no poseer ambos anillos divisores de cero, a cada ideal primo mínimo $\overline{\mathfrak{P}}$ de $\overline{\mathfrak{o}}$ corresponde en $\mathfrak{o}$ un ideal primo mínimo $\mathfrak{P}$ al menos, y a lo más un número finito, que yace sobre $\overline{\mathfrak{P}}$. En efecto, si $\overline{\mathfrak{P}}$ es mínimo en $\overline{\mathfrak{o}}$, por depender $\mathfrak{o}$ íntegramente de $\overline{\mathfrak{o}}$, existirá [5] un ideal primo $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{o}$ tal que $\mathfrak{P} \cap \overline{\mathfrak{o}} = \overline{\mathfrak{P}}$. Si $\mathfrak{P}$ no fuese mínimo, habría un ideal $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{o}$, $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{P}_0 \neq (0)$; entonces, [1]

$$\mathfrak{P}_0 \cap \overline{\mathfrak{o}} = \overline{\mathfrak{P}}_0 \neq (0)$$

luego $\overline{\mathfrak{P}}_0 \subseteq \overline{\mathfrak{P}}$. Pero como dos ideales $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{P}_0$ no pueden yacer sobre el mismo ideal de $\overline{\mathfrak{o}}$ [5], resultará que $\overline{\mathfrak{P}}_0$ es un ideal propio de $\overline{\mathfrak{o}}$, propiamente contenido en $\overline{\mathfrak{P}}$, contra la hipótesis de ser éste mínimo. De un modo análogo se demostraría la inversa.

Sea ahora $\overline{\mathfrak{P}}$ un ideal primo mínimo de $\overline{\mathfrak{o}}$ y $\overline{\mathbf{w}}$ el divisor primo cuyo centro en $\overline{\mathfrak{o}}$ es $\overline{\mathfrak{P}}$; entonces, por ser $\overline{\mathbf{w}}$ de primera especie en $\overline{\mathfrak{o}}$,

$$R_{\overline{\mathbf{w}}} = \overline{\mathfrak{o}}_{\overline{\mathfrak{P}}}, \quad \mathfrak{p}_{\overline{\mathbf{w}}} = \overline{\mathfrak{P}}\, R_{\overline{\mathbf{w}}}; \quad \mathfrak{p}_{\overline{\mathbf{w}}} \cap \overline{\mathfrak{o}} = \overline{\mathfrak{P}}$$

Llamemos $\overline{\mathfrak{J}} = R_{\overline{\mathbf{w}}}$, $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{p}_{\overline{\mathbf{w}}}$, al anillo e ideal, respectivamente, de la valoración $\overline{\mathbf{w}}$. Sea $\mathfrak{J}$ el cierre íntegro de $\overline{\mathfrak{J}}$ y $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_p$ los ideales primos máximos de $\mathfrak{J}$; sabemos [1] que los $\mathfrak{m}_i$ yacen sobre $\overline{\mathfrak{m}}$ y el anillo semilocal $(\mathfrak{J};\ \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_p)$ diremos que es el cierre íntegro de $\overline{\mathfrak{J}}$ en Σ. Llamando

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{J}_{\mathfrak{m}_i}, \quad \mathfrak{n}_i = \mathfrak{m}_i\, \mathfrak{R}_i,$$

los anillos locales $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{n}_1), \ldots, (\mathfrak{R}_p, \mathfrak{n}_p)$ se dice que son los anillos locales de $\mathfrak{J}$ que yacen sobre el anillo local $(\overline{\mathfrak{J}}, \overline{\mathfrak{m}})$, los cuales, por ser $\Sigma|\overline{\Sigma}$ extensión normal, son $\overline{\Sigma}$—conjugados.

Estos anillos locales son exactamente los de las valoraciones $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p$ ampliadas de $\overline{\mathbf{w}}$ a Σ, es decir, $\mathfrak{R}_i = R_{\mathbf{w}_i}$, $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{p}_{\mathbf{w}_i}$. Los ideales $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{n}_i \cap \mathfrak{o}$, distintos por ser $\Sigma|\overline{\Sigma}$ normal, serán los centros de esas valoraciones en $\mathfrak{o}$ y, según vamos a ver, ideales de $\mathfrak{o}$ que yacen sobre el ideal $\overline{\mathfrak{P}}$ de $\overline{\mathfrak{o}}$. En efecto:

$$\mathfrak{P}_i \cap \overline{\mathfrak{o}} = (\mathfrak{n}_i \cap \mathfrak{o}) \cap \overline{\mathfrak{o}} = (\mathfrak{m}_i\, \mathfrak{K}_i \cap \mathfrak{o}) \cap \overline{\mathfrak{o}}$$

$$= (\mathfrak{m}_i\, \mathfrak{J}_{\mathfrak{m}_i} \cap \mathfrak{o}) \cap \overline{\mathfrak{o}} = [(\mathfrak{m}_i\, \mathfrak{J}_{\mathfrak{m}_i} \cap \mathfrak{J}) \cap \mathfrak{o}] \cap \overline{\mathfrak{o}} = (\mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{o}) \cap \overline{\mathfrak{o}} = \overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{o}} = \overline{\mathfrak{P}}.$$

Entonces, por ser $\overline{\mathfrak{P}}$ un ideal primo mínimo de $\overline{\mathfrak{o}}$, los ideales $\mathfrak{P}_i$ de $\mathfrak{o}$ que yacen sobre él serán ideales primos mínimos de este anillo, luego las valoraciones $\mathbf{w}_i$ de Σ, ampliadas de la $\overline{\mathbf{w}}$, serán de primera especie en $\mathfrak{o}$ ya que tienen en él como centros los $\mathfrak{P}_i$.

Lo mismo se demostraría la recíproca. Según ella, la restricción a $\overline{\Sigma}$ de un divisor $\mathbf{w}$ de Σ, de primera especie en $\mathfrak{o}$, tendrá como centro $\overline{\mathfrak{P}}$ en $\overline{\mathfrak{o}}$ el ideal $\mathfrak{P} \cap \overline{\mathfrak{o}}$, donde $\mathfrak{P}$ es el centro de $\mathbf{w}$ en $\mathfrak{o}$. Pero $\overline{\mathfrak{P}}$ existe siempre, según hemos visto, y es mínimo en $\overline{\mathfrak{o}}$, luego toda valoración de Σ de primera especie en $\mathfrak{o}$ tiene restricción no trivial sobre $\overline{\Sigma}$ que es de primera especie en $\overline{\mathfrak{o}}$.

Esta Proposición nos permite construir un haz sobre $\overline{V}$ de la siguiente forma :

Sea $\mathbf{a}_{\mathbf{v}} = \mathbf{w}_1^{\alpha_1} \ldots \mathbf{w}_s^{\alpha_s}$ el divisor de Σ, de primera especie en $\mathfrak{o}$, que hemos definido a partir de cada divisor primo $\mathbf{v}$ de Δ. Sea $\overline{\mathbf{w}}_i$ la restricción a $\overline{\Sigma}$ de cada divisor primo $\mathbf{w}_i$ contenido en $\mathbf{a}_{\mathbf{v}}$; esta restricción hemos visto que existe siempre y es de primera especie en $\overline{\mathfrak{o}}$. Llamemos $\overline{\mathfrak{P}}_i = \mathfrak{p}_{\overline{\mathbf{w}}_i} \cap \overline{\mathfrak{o}}$, que será un ideal primo mínimo, a su centro en este anillo, y $\overline{W}_i$ a la subvariedad $(r - 1)$—dimensional de $\overline{V}$ correspondiente a este ideal. Si algunos divisores primos $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_h$ de $\mathbf{a}_{\mathbf{v}}$ se restringen en un mismo divisor primo $\overline{\mathbf{w}}$ de $\overline{\Sigma}$, por ser $\Sigma|\overline{\Sigma}$ normal se cumplirá [5] que todos ellos tienen el mismo índice de ramificación e respecto de $\overline{\mathbf{w}}$; entonces, considerando el menor de los números $\frac{\alpha_i}{e}$, $i = 1, \ldots, h$, diremos que a $\mathbf{w}_1^{\alpha_1} \ldots \mathbf{w}_h^{\alpha_h}$ le corresponde el divisor $\overline{\mathbf{w}}^{\beta}$ de $\overline{\Sigma}$, $\beta = \text{mín.} \left\{\frac{\alpha_i}{e}\right\}$. Operando así con todas las componentes primas de $\mathbf{a}_{\mathbf{v}}$, se obtendrá en $\overline{\Sigma}$ un divisor

$$\overline{\mathbf{a}}_{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}}_1^{\beta_1} \ldots \overline{\mathbf{w}}_t^{\beta_t} ,$$

de primera especie en $\overline{\mathfrak{o}}$ y del cual diremos que es el divisor de $\overline{\Sigma}$ correspondiente al divisor $\mathbf{v}$ de Δ. A este divisor corresponde en $\overline{\mathfrak{o}}$ como centro un ideal

$$\overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{v}} = \overline{\mathfrak{P}}_1^{\beta_1} \ldots \overline{\mathfrak{P}}_t^{\beta_t},$$

ideal de $\overline{\mathfrak{o}}$ sobre el que yace $\mathfrak{a}_{\mathbf{v}}$, y, por tanto, una subvariedad de dimensión $r - 1$:

$$\overline{A}_{\mathbf{v}} = \overline{W}_1^{\beta_1} \ldots \overline{W}_t^{\beta_t}.$$

Pues bien, haciendo como antes recorrer a $\mathbf{v}$ todos los divisores primos de Δ, se obtendrá un conjunto de divisores $\{\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{v}\}$ de $\bar{\Sigma}$, cuyos centros en $\bar{V}$ definen un conjunto $\bar{\mathfrak{A}} = \{\bar{A}_\mathbf{v}\}$ de subvariedades máximas de $\bar{V}$ de las que diremos que forman un *haz* en $\bar{V}$.

De la Proposición 1 se deduce también que el haz $\bar{\mathfrak{A}}$ podríamos haberlo formado a partir del anillo $\mathfrak{o}'$, siguiendo un camino idéntico al que hemos utilizado a partir de $\mathfrak{o}$. Por ser además Σ cuerpo de cocientes también de $\mathfrak{o}'$, resulta que su subcuerpo Δ define en V' un haz de Zariski :

$$\mathfrak{A}' = \{A'_\mathbf{v}\}, \qquad A'_\mathbf{v} = W'^{\alpha_1}_1 \ldots W'^{\alpha_s}_s,$$

donde cada W'_i se corresponde con el ideal $\mathfrak{P}'_i$ de $\mathfrak{o}'$, centro en este anillo del divisor $\mathbf{w}_i$ de Σ. En efecto, $\mathfrak{P}'_i$ es (Prop. 1) un ideal primo mínimo de $\mathfrak{o}'$, luego W'_i es una subvariedad de dimensión máxima de V'. Así, igual que antes, al conjunto $\{\mathbf{a}_\mathbf{v}\}$ de divisores de Σ, que serán, según acabamos de ver, de primera especie en $\mathfrak{o}'$, corresponde en este anillo un conjunto de ideales

$$\{\mathfrak{a}'_\mathbf{v}\}, \qquad \mathfrak{a}'_\mathbf{v} = \mathfrak{P}'^{\alpha_1}_1 \ldots \mathfrak{P}'^{\alpha_s}_s$$

cuyas subvariedades correspondientes definen el haz de Zariski $\mathfrak{A}' = \{A'_\mathbf{v}\}$.

El subcuerpo Δ define, pues, en V y en V' haces de Zariski y en $\bar{V}$ un haz $\bar{\mathfrak{A}}$, restricción a esta variedad de cualquiera de los haces de Zariski $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$.

Lema 2. *Si $\Delta \subset \bar{\Sigma}$, el haz definido por Δ en $\bar{V}$ a través de Σ coincide con el haz de Zariski definido en $\bar{V}$ por Δ, como subcuerpo de $\bar{\Sigma}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{A}$ el haz de Zariski que Δ define en V y $\bar{\mathfrak{A}}$ el haz definido en $\bar{V}$ por el mismo subcuerpo ; llamemos finalmente $\tilde{\mathfrak{A}}$ al haz de Zariski que Δ, como subcuerpo de $\bar{\Sigma}$, define en $\bar{V}$. Hay que demostrar que $\bar{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{A}}$. Sea $\mathbf{v}$ un divisor de Δ, $\mathbf{w}$ una ampliación a Σ en el sentido antes estudiado y $\bar{\mathbf{w}}$ la restricción de $\mathbf{w}$ a $\bar{\Sigma}$. En primer lugar, por ser

$$R_\mathbf{v} = R_\mathbf{w} \cap \Delta = (R_\mathbf{w} \cap \bar{\Sigma}) \cap \Delta = R_{\bar{\mathbf{w}}} \cap \Delta$$

será $\bar{\mathbf{w}}$ una ampliación de $\mathbf{v}$ a $\bar{\Sigma}$, con las condiciones requeridas. Si d es un parámetro de uniformización de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}(d) = \alpha$, $\bar{\mathbf{w}}(d) = \beta$, $\mathbf{w}$ formará parte de $\mathbf{a}_\mathbf{v}$ con exponente α y $\bar{\mathbf{w}}$ forma parte de $\tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{v}$ con exponente β. Sea e el índice de ramificación de $\mathbf{w}$ sobre $\overline{\mathbf{w}}$; entonces $\mathfrak{P}^e$ será el ideal de $\mathfrak{o}$ que yace sobre $\overline{\mathfrak{P}}$, con las notaciones empleadas hasta ahora. Luego, si $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r \in \overline{\Sigma}$ son coordenadas de uniformización de $\overline{\mathbf{w}}$ e $y_1, \ldots, y_r \in \Sigma$ lo son de $\mathbf{w}$, serán, por ejemplo,

$$\overline{x}_i = y_1{}^e z, \qquad z \in R_{\mathbf{w}}.$$

Por otra parte, de las condiciones impuestas se sigue:

$$d = \overline{x}_i^{\beta}\, \overline{z}, \qquad \overline{z} \in R_{\overline{\mathbf{w}}} \subset R_{\mathbf{w}},$$

luego

$$d = y_1^{e\beta}\, \overline{z}.z, \qquad \overline{z}.z \in R_{\mathbf{w}};$$

así que $\alpha = \mathbf{w}(d) = e\beta$. Pero entonces resulta que $\overline{\mathbf{w}}$ formará parte del elemento $\overline{\mathbf{a}}_{\mathbf{v}}$, correspondiente al haz $\overline{\mathfrak{A}}$, con exponente $\frac{\alpha}{e} = \beta$, es decir, el mismo que en el haz de Zariski $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Como esto es válido para todos los divisores, se ve inmediatamente que $\overline{\mathbf{a}}_{\mathbf{v}} = \widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{v}}$, luego $\overline{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mathfrak{A}}$.

TEOREMA 1. *El haz $\overline{\mathfrak{A}}$ definido en $\overline{V}$ por Δ no depende del supercuerpo Σ de $\overline{\Sigma}$ elegido para hacer la construcción.*

DEMOSTRACIÓN. Si Σ^* es otra ampliación normal de $\overline{\Sigma}$, podemos suponer, sin restringir la demostración, que $\Sigma^* \supset \Sigma$, pues en caso contrario elegiríamos un supercuerpo Σ^{**} que contuviese a Σ y a Σ^* y realizaríamos con él la demostración, tanto para Σ como para Σ^*.

Sea, pues, $\Sigma^* \supset \Sigma$ una ampliación normal de $\overline{\Sigma}$; el subcuerpo $\Delta \subset \Sigma$ define un haz de Zariski $\mathfrak{A}$ en V y otro haz de Zariski $\mathfrak{A}^*$ en V^*, modelo de Σ^* correspondiente al anillo $\mathfrak{o}^*$, cierre íntegro de $\overline{\mathfrak{o}}$ en Σ^*. Por análoga demostración a la del Lema 1, $\mathfrak{o}^*$ es también cierre íntegro de $\mathfrak{o}$ en Σ^*. Llamamos $\overline{\mathfrak{A}}$ y $\overline{\mathfrak{A}}^*$ a los haces obtenidos en $\overline{V}$ mediante los haces de Zariski $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}^*$, respectivamente. A cada divisor $\mathbf{v}$ de Δ corresponden extensiones a Σ^*, de primera especie en $\mathfrak{o}^*$, y llamemos $\mathbf{w}^*$ a una de ellas y $\mathbf{w}$ y $\overline{\mathbf{w}}$ a sus restricciones en Σ y $\overline{\Sigma}$; evidentemente, $\overline{\mathbf{w}}$ será también la restricción a $\overline{\Sigma}$ de $\mathbf{w}$. Resulta, pues, que $\overline{\mathbf{w}}$ forma parte tanto del elemento $\overline{\mathbf{a}}_{\mathbf{v}}$ de $\overline{\mathfrak{A}}$ como del $\overline{\mathbf{a}}_{\mathbf{v}}^*$ de $\overline{\mathfrak{A}}^*$; hemos de ver que con el mismo exponente. Por el Lema anterior, si $\mathbf{w}^*$ tiene exponente α en $\mathbf{a}_{\mathbf{v}}^*$ y si $\mathbf{w}$ tiene exponente β en $\mathbf{a}_{\mathbf{v}}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ será el índice de ramificación de $\mathbf{w}^*$ sobre $\mathbf{w}$. Pero, por la construcción de nuestros haces, $\overline{\mathbf{w}}$ tendrá en $\overline{\mathbf{a}}_{\mathbf{v}}$ como exponente $\frac{\beta}{e}$, siendo e el índice de ramificación de $\mathbf{w}$ en $\overline{\mathbf{w}}$, y en $\overline{\mathbf{a}}_{\mathbf{v}}^*$, exponente $\frac{\alpha}{e^*}$, siendo e^* el índice de ramificación de $\mathbf{w}^*$ sobre $\overline{\mathbf{w}}$. Entonces, llamando

$$\mathbf{w}^*(\Sigma^*) = \Gamma^*, \qquad \mathbf{w}(\Sigma) = \Gamma, \qquad \overline{\mathbf{w}}(\overline{\Sigma}) = \overline{\Gamma},$$
$$\overline{\Gamma} \subset \Gamma \subset \Gamma^*,$$

a los grupos de valores de las respectivas valoraciones, se tendrá

$$\frac{\alpha}{\beta} = (\Gamma^* : \Gamma), \; e = (\Gamma : \overline{\Gamma}), \; e^* = (\Gamma^* : \overline{\Gamma}) \; ;$$

y como se verifica siempre

$$(\Gamma^* : \overline{\Gamma}) = (\Gamma^* : \Gamma) \, . \, (\Gamma : \overline{\Gamma}),$$

resultará $\frac{\alpha}{\beta} \, . \, e = e^*$, luego $\frac{\alpha}{e^*} = \frac{\beta}{e}$, es decir, los exponentes de $\overline{\mathbf{w}}$ en $\overline{\mathbf{a}}_{\mathrm{v}}$ y en $\overline{\mathbf{a}}_{\mathrm{v}}{}^*$ coinciden; y, verificándose lo mismo para los restantes divisores, será $\overline{\mathbf{a}}_{\mathrm{v}} = \overline{\mathbf{a}}_{\mathrm{v}}{}^*$ y, por tanto, $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}^*$.

COROLARIO. *El cuerpo* Δ *define unívocamente el haz* $\overline{\mathfrak{A}}$ *construido sobre* $\overline{V}$.

Estos resultados justifican, por tanto, las siguientes

DEFINICIONES. Todo cuerpo Δ, de grado de trascendencia 1 sobre k y finitamente engendrado sobre él, cuyos elementos sean algebraicos sobre el cuerpo $\overline{\Sigma} = k(\overline{V})$, define, según el proceso aquí estudiado, un *haz* $\overline{\mathfrak{A}}$ de subvariedades de dimensión máxima de $\overline{V}$. Si $\Delta \subset \overline{\Sigma}$, diremos que el haz definido en $\overline{V}$ es un *haz de Zariski*. Si $\Delta = k(\theta)$, θ algebraico sobre $\overline{\Sigma}$, el haz $\overline{\mathfrak{A}}$ definido por Δ se llamará *haz algebraico*, y si fuese $\theta \in \overline{\Sigma}$, será un *haz lineal* (3).

3. *RELACIÓN DE LOS PUNTOS DE* $\overline{V}$ *CON EL HAZ* $\overline{\mathfrak{A}}$.

Sea $n = [\Sigma : \overline{\Sigma}]$ el grado algebraico de la extensión $\Sigma | \overline{\Sigma}$. El polinomio mínimo $f(X)$ del elemento primitivo λ de Σ sobre $\overline{\Sigma}$ será un polinomio de dependencia íntegra,

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n,$$

y, por ser $\overline{\mathfrak{o}}$ íntegramente cerrado, sus coeficientes $a_i \in \overline{\mathfrak{o}}$ [5]. Además, trivialmente, $\{1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1}\}$ es una base de $\mathfrak{o}'$ sobre $\overline{\mathfrak{o}}$ ya que, en efecto,

$$\overline{\mathfrak{o}} + \overline{\mathfrak{o}}\,\lambda + \ldots + \overline{\mathfrak{o}}\,\lambda^{n-1} \subset \overline{\mathfrak{o}}\,[\lambda] = \mathfrak{o}' \; ;$$

(3) ZARISKI muestra en [4] que el haz lineal así definido coincide, en las hipótesis establecidas aquí, con el haz lineal clásico de subvariedades; entonces, los haces de Zariski son una generalización de estos haces lineales en el sentido que exponíamos en [2]. Precisamente siguiendo esta idea geométrica es como definíamos nuestros haces, que allí llamábamos *familias unidimensionales*, generalizando la idea clásica de haz algebraico. En la comunicación a que hacemos referencia en la nota al pie de página (1), mostramos cómo el que aquí llamamos *haz algebraico* reproduce también en $\overline{V}$ este concepto clásico.

y, recíprocamente, si $\mu \in \mathfrak{o}'$, será

$$\mu = m_0 + m_1 \lambda + \ldots + m_g \lambda^g, \qquad m_i \in \bar{\mathfrak{o}},$$

y donde se supone $g \geq n$, puesto que, si $g < n$, sería evidentemente $\mu \in \bar{\mathfrak{o}} + \ldots + \bar{\mathfrak{o}} \lambda^{n-1}$; entonces, de $f(\lambda) = 0$, resulta

$$\lambda^n = -(a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n), \qquad a_i \in \bar{\mathfrak{o}};$$

$$\lambda^{n+1} = -(a_1 \lambda^n + \ldots + a_n \lambda)$$

$$= -[-a_1 (a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n) + a_2 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n \lambda]$$

$$= a_1 a_n + (a_1 a_{n-1} + a_n) \lambda + \ldots + (a_1^2 + a_2) \lambda^{n-1} \in \bar{\mathfrak{o}} + \ldots + \bar{\mathfrak{o}} \lambda^{n-1}$$

y así sucesivamente; es decir, para cualquier $g \geq n$ se tiene

$$\lambda^g \in \bar{\mathfrak{o}} + \bar{\mathfrak{o}} \lambda + \ldots + \bar{\mathfrak{o}} \lambda^{n-1};$$

por consiguiente.

$$\mu \in \bar{\mathfrak{o}} + \bar{\mathfrak{o}} \lambda + \ldots + \bar{\mathfrak{o}} \lambda^{n-1} = \mathfrak{o}'$$

Sea $\bar{P}$ un punto simple de $\bar{V}$ definido por el ideal primo máximo $\bar{\mathfrak{p}}$ de $\bar{\mathfrak{o}}$. Por ser $\mathfrak{o}'$ y $\mathfrak{o}$ íntegramente dependientes de $\bar{\mathfrak{o}}$, existe un número finito de ideales primos, en ambos anillos, que yacen sobre $\bar{\mathfrak{p}}$. Sean $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_h$ y $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_q$, respectivamente, estos ideales primos de $\mathfrak{o}'$ y $\mathfrak{o}$ tales que

$$\mathfrak{p}'_i \cap \bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{p}}, \; i = 1, \ldots, h; \quad \mathfrak{p}_j \cap \bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{p}}, j = 1, \ldots, q.$$

Tanto los $\mathfrak{p}'_i$ como los $\mathfrak{p}_j$ son ideales primos máximos de $\mathfrak{o}'$ y $\mathfrak{o}$, respectivamente [5], y representarán puntos P'_i de V' y P_j de V. Finalmente [1], los $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_q$ forman un conjunto completo de ideales conjugados respecto de $\bar{\Sigma}$ al ser $\mathfrak{o}$ el cierre íntegro de $\bar{\mathfrak{o}}$ en el cuerpo Σ de la extensión de Galois $\Sigma|\bar{\Sigma}$. Evidentemente, los ideales $\mathfrak{p}_j$ son las extensiones a $\mathfrak{o}$ de los ideales $\mathfrak{p}'_i$ de $\mathfrak{o}'$: $\mathfrak{p}_j \cap \mathfrak{o}' = \mathfrak{p}'_i$, para algunos i, j. Se verifica, pues, de todas estas consideraciones, $h \leq q \leq n = [\Sigma : \bar{\Sigma}]$.

Por ser $\{1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1}\}$ una base de $\mathfrak{o}'$ sobre $\bar{\mathfrak{o}}$ y por una demostración análoga a la del teorema de Kummer [5], construiremos el ideal $\mathfrak{p}'_i$, que yace sobre el ideal $\bar{\mathfrak{p}}$ de $\bar{\mathfrak{o}}$, mediante el siguiente proceso: El homomorfismo natural

$$\bar{\mathfrak{o}} \to \bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}^0$$

induce un homomorfismo entre los anillos de polinomios $\bar{\mathfrak{o}}[X] \to \mathfrak{o}^0 [X]$ que equivale a tomar módulos respecto de $\bar{\mathfrak{p}}$ en los coeficientes de cada polinomio de $\bar{\mathfrak{o}}[X]$. Entonces, el polinomio $f(X)$ de definición íntegra de λ se representa mediante este segundo homomorfismo en el polinomio $f^0\ (X)$:

$$f(X) \to f^0(X) = X^n + a_1^0 X^{n-1} + \ldots + a_n^0 \in \mathfrak{o}^0 [X], \qquad a_i \equiv a_i^0 \ (\bar{\mathfrak{p}}).$$

Pero, por ser $\bar{\mathfrak{p}}$ máximo, se tiene el isomorfismo

$$\mathfrak{o}^0 = \bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{p}} \approx k,$$

y habiendo supuesto a k algebraicamente cerrado, $f^0(X)$ tendrá una descomposición en factores irreducibles sobre $\mathfrak{o}^0$ de la forma :

$$f^0(X) = \prod_{i=1}^{h} (X - l_i^0)^{\varrho_i}, \qquad \sum_{i=1}^{h} \rho_i = n.$$

Sea $X - l_i$, $l_i \equiv l_i^0\ (\bar{\mathfrak{p}})$, un elemento de $\bar{\mathfrak{o}}\,[X]$ que se representa sobre el $X - l_i^0$ de $\mathfrak{o}^0\,[X]$ en el homomorfismo establecido antes. Formando entonces los ideales

$$\mathfrak{p}'_i = \mathfrak{o}'\,\bar{\mathfrak{p}} + \mathfrak{o}'\,(\lambda - l_i), \qquad \mathfrak{q}'_i = \mathfrak{o}'\,\bar{\mathfrak{p}} + \mathfrak{o}'\,(\lambda - l_i)^{\varrho_i},$$

se prueba como en [5] que estos ideales son los de la descomposición primaria $\mathfrak{o}'\,\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}'_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}'_h$, donde los $\mathfrak{p}'_i$, $i = 1, \ldots, h$, son los ideales primos correspondientes a los $\mathfrak{q}'_i$ que yacen sobre $\bar{\mathfrak{p}}$.

Geométricamente, pues, a cada punto $\bar{P}$ de $\bar{V}$ le corresponden los h puntos $P'_1, \ldots, P'_h$ de V' definidos por los ideales $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_h$ de $\mathfrak{o}'$. Si, como hemos supuesto, $\bar{\mathfrak{o}} = k\,[x_1, \ldots, x_m]$ y

$$\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{o}}\,(x_1 - c_1, \ldots, x_m - c_m), \quad c_j \in k,$$

cada ideal $\mathfrak{p}'_i$ de $\mathfrak{o}'$ que yace sobre $\bar{\mathfrak{p}}$ será:

$$\mathfrak{p}'_i = \mathfrak{o}'\,(x_1 - c_1, \ldots, x_m - c_m, \lambda - l_i), \quad i = 1, \ldots, h,$$

es decir, el punto $\bar{P}$ de coordenadas $(c_1, \ldots, c_m)$ se extiende a los h puntos P'_i de coordenadas $(c_1, \ldots, c_m, l_i)$, $i = 1, \ldots, h$, cada uno de ellos con una multiplicidad ϱ_i, respectivamente, de modo que

$$\sum_{i=1}^{h} \varrho_i = n.$$

La interpretación geométrica de los ideales $\mathfrak{p}'_i$ y $\mathfrak{q}'_i$ es ya, pues, muy expresiva. Si, por simplificar el razonamiento, suponemos que $\bar{\mathfrak{o}} = k\,[x_1, x_2]$ es el plano, entonces $\mathfrak{o}' = k\,[x_1, x_2, \lambda]$ con $f(x_1, x_2, \lambda) = 0$, es la superficie V' dada por esta última ecuación en el espacio de tres dimensiones. Cada punto $\bar{P}$ (c_1, c_2) del plano se extiende a V' según los puntos $P'_1, \ldots, P'_h$ que se proyectan sobre $\bar{P}$ paralelamente al eje λ; el conjunto de todos ellos es $\mathfrak{o}'\bar{\mathfrak{p}}$. Cada uno de esos puntos P'_i tendrá, pues, por coordenadas (c_1, c_2, l_i), donde l_i es la coordenada correspondiente a λ. Si cortamos a V' por el plano $\lambda - l_i = 0$, paralelo al $(x_1 x_2)$, dará en V' una curva intersección $\mathfrak{o}'(\lambda - l_i)$; evidentemente, el punto P'_i es la intersección de esta curva con $\mathfrak{o}'\bar{\mathfrak{p}}$, es decir, vendrá dado por el ideal $\mathfrak{o}'\bar{\mathfrak{p}} + \mathfrak{o}'(\lambda - l_i)$. Si P'_i fuera de multiplicidad ϱ_i, el plano $\lambda - l_i = 0$ habrá que contarlo ϱ_i veces, $(\lambda - l_i)^{\varrho_i} = 0$, y dará $\mathfrak{q}'_i$ en la misma forma.

Según esto, *si el exponente ϱ_i correspondiente a la raíz l_i^0 de la descomposición factorial de $f^0(X)$ es* 1, *el punto P'_i $(c_1, \ldots, c_m, l_i)$ es un punto simple de V'.*

Pero, por ser $\mathfrak{o}$ cierre íntegro de $\mathfrak{o}'$ a cada ideal máximo $\mathfrak{p}'$ de $\mathfrak{o}'$ corresponde un número finito de ideales $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}$. Si el punto P' correspondiente a $\mathfrak{p}'$ era simple en V', le corresponde un único ideal primo $\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{o}$ y, por tanto, un sólo punto P de V. Así, pues, la extensión de un punto $\bar{P}$ de $\bar{V}$, correspondiente al ideal primo $\bar{\mathfrak{p}}$ de $\bar{\mathfrak{o}}$, se puede hacer mediante la extensión a los puntos $P'_1, \ldots, P'_h$ de V', correspondientes a los ideales

$$\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_h; \qquad \mathfrak{p}'_i = \mathfrak{o}'\bar{\mathfrak{p}} + \mathfrak{o}'(\lambda - l_i),$$

más una nueva extensión de estos últimos puntos P'_i a los puntos $P_1, \ldots, P_q$ de V. En todo caso, $q \leq n = [\Sigma : \bar{\Sigma}]$ ya que, por ser la extensión $\Sigma|\bar{\Sigma}$ normal, todos los ideales $\mathfrak{p}_i$ de $\mathfrak{o}$ que yacen sobre el ideal $\bar{\mathfrak{p}}$ de $\bar{\mathfrak{o}}$ son conjugados y el grupo $\mathfrak{G}$ de Galois formado por todos los $\bar{\Sigma}$ —automorfismos de Σ tiene exactamente n elementos. Así que todo ideal $\mathfrak{p}_i$ se obtiene aplicando un automorfismo $\gamma \in \mathfrak{G}$ a otro de esos ideales, $\mathfrak{p}_1$ por ejemplo:

$$\mathfrak{p}_i \cap \bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{p}_1 \cap \bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{p}}; \quad \gamma_i(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

A lo más, pues, a un punto $\bar{P}$ de $\bar{V}$ le corresponden n puntos $P_1, \ldots, P_n$ de V.

Esta situación equivale como se sabe (véase, p. ej. [1]), a considerar a V como un recubrimiento de orden n de $\bar{V}$. Si a un punto $\bar{P}$ de $\bar{V}$ le corresponden menos de n puntos, $P_1, \ldots, P_q$, $q < n$, de V, se dice que $\bar{P}$ es un *punto rama* de este recubrimiento.

DEFINICIÓN. Los puntos rama del recubrimiento $V|\bar{V}$ se llaman *puntos característicos* del haz $\bar{\mathfrak{A}}$. Al lugar de los puntos característicos de $\bar{\mathfrak{A}}$ se le llama *envolvente* de este haz.

Proposición 2. *La envolvente del haz* $\overline{\mathfrak{A}}$ *es la subvariedad de* $\overline{V}$ *definida por el ideal* $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}|\overline{\mathfrak{o}}) \subset \overline{\mathfrak{o}}$, *o ideal discriminante de* $\mathfrak{o}$ *sobre* $\overline{\mathfrak{o}}$.

La demostración es consecuencia de la definición de ideal discriminante, como se puede ver en [1].

En ese recubrimiento, llamemos, como siempre, $\mathbf{w}_i$ a las extensiones en Σ del divisor $\overline{\mathbf{w}}$ de $\overline{\Sigma}$; $\mathfrak{P}_i$ a los ideales primos mínimos de $\mathfrak{o}$ extendidos de un ideal mínimo $\overline{\mathfrak{P}}$ de $\overline{\mathfrak{o}}$; eventualmente pueden ser $\mathfrak{P}_i$ y $\overline{\mathfrak{P}}$ centros en los correspondientes anillos de las respectivas valoraciones $\mathbf{w}_i$ y $\overline{\mathbf{w}}$; y sean, finalmente, $\mathfrak{p}_i$ los ideales primos máximos, extensiones a $\mathfrak{o}$ del ideal primo máximo $\overline{\mathfrak{p}}$ de $\overline{\mathfrak{o}}$. Sean también γ_i elementos del grupo $\mathfrak{G}$ de $\overline{\Sigma}$ —automorfismos de Σ.

Proposición 3. *Empleando las anteriores notaciones, se verifican las relaciones:*

1) $\mathfrak{P}_j = \gamma(\mathfrak{P}_i) \longleftrightarrow \mathbf{w}_j = \mathbf{w}_i \circ \gamma^{-1}$, *siendo* $\mathfrak{P}_i$ *el centro en* $\mathfrak{o}$ *de* $\mathbf{w}_i$, *para todo* i.

2) *Si* $\overline{\mathfrak{p}} \supset \overline{\mathfrak{P}}$, *a cada ampliación* $\mathfrak{p}_i$ *de* $\overline{\mathfrak{p}}$ *se le puede asignar una ampliación* $\mathfrak{P}_i$ *de* $\overline{\mathfrak{P}}$ *de modo que* $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{P}_i$, *y recíprocamente. Y si* $\mathfrak{p}_j = \gamma(\mathfrak{p}_i)$, *también* $\mathfrak{P}_j = \gamma(\mathfrak{P}_i)$

3) $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} \cap \overline{\Sigma} = \overline{\mathfrak{o}}_{\overline{\mathfrak{p}}}$.

Demostración. 1) El divisor $\overline{\mathbf{w}}$ de $\overline{\Sigma}$ se extiende a Σ según los divisores conjugados $\mathbf{w}_i$, es decir, si $\mathbf{w}_1$ es uno de ellos, $R_{\mathbf{w}_1} \cap \overline{\Sigma} = R_{\overline{\mathbf{w}}}$, los restantes serán de la forma $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_1 \circ \gamma_i^{-1}$, $\gamma_i \in \mathfrak{G}$. Sean $\mathfrak{P}_1$ y $\mathfrak{P}_i$ los centros de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_i$ en $\mathfrak{o}$; se verificará: $\mathfrak{P}_i = \gamma_i(\mathfrak{P}_1)$. En efecto,

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{p}_{\mathbf{w}_1} \cap \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}_{\mathbf{w}_i} \cap \mathfrak{o};$$

si $a \in \mathfrak{P}_1$, $\mathbf{w}_1(a) > 0$; pero

$$\mathbf{w}_1(a) = (\mathbf{w}_i \circ \gamma_i)(a) = \mathbf{w}_i(\gamma_i(a)) > 0,$$

luego $\gamma_i(a) \in \mathfrak{P}_i$, o sea, $\gamma_i(\mathfrak{P}_1) \subset \mathfrak{P}_i$. De aquí, y siguiendo el camino inverso, resulta $\mathfrak{P}_i = \gamma_i(\mathfrak{P}_1)$ y de modo análogo se vería el recíproco.

2) Si $\overline{\mathfrak{p}} \supset \overline{\mathfrak{P}}$ y $\mathfrak{p}_i \cap \overline{\mathfrak{o}} = \overline{\mathfrak{p}}$, existe [5] un ideal $\mathfrak{P}_i$ que yace sobre $\overline{\mathfrak{P}}$ y tal que $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{P}_i$. Y recíprocamente. Entonces, como los ideales $\mathfrak{p}_i$ son $\overline{\Sigma}$—conjugados, si $\mathfrak{p}_j = \gamma(\mathfrak{p}_i)$ y son $\mathfrak{P}_i \subset \mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{P}_j \subset \mathfrak{p}_j$ las extensiones de $\overline{\mathfrak{P}}$ cuyas subvariedades correspondientes, W_i y W_j, pasan por los respectivos puntos P_i y P_j correspondientes a $\mathfrak{p}_i$ y $\mathfrak{p}_j$, se tendrá $\gamma(\mathfrak{P}_i) \subset \mathfrak{p}_j$; y como $\gamma(\mathfrak{P}_i)$ es una extensión de $\overline{\mathfrak{P}}$ que ha de pasar, según esto, por P_j, será $\gamma(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{P}_j$.

3) Si $\frac{a}{b} \in \mathfrak{o}_{\bar{\mathfrak{p}}}$, serán $a, b \in \bar{\mathfrak{o}} \subset \mathfrak{o}$, $b \notin \bar{\mathfrak{p}}$. Si fuese $b \in \mathfrak{p}_i$, como $b \in \bar{\mathfrak{o}}$ se tendría $b \in \mathfrak{p}_i \cap \bar{\mathfrak{o}} \supset \bar{\mathfrak{p}}$ y, siendo $\bar{\mathfrak{p}}$ máximo, $b \in \bar{\mathfrak{p}}$, contra la hipótesis; luego $\frac{a}{b} \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}$. De aquí resulta que $\mathfrak{o}_{\bar{\mathfrak{p}}} \subset \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} \cap \bar{\Sigma}$; sea ahora $p \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} \cap \bar{\Sigma}$; por ser $p \in \bar{\Sigma}$ y $\bar{\Sigma}$ cuerpo de cocientes de $\bar{\mathfrak{o}}$, podremos elegir $a, b \in \bar{\mathfrak{o}}$ tales que $p = \frac{a}{b}$; si fuese $b \in \bar{\mathfrak{p}}$, como $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_i \cap \bar{\mathfrak{o}}$ sería $b \in \mathfrak{p}_i$, luego $p = \frac{a}{b}$ verificaría: a, $b \in \bar{\mathfrak{o}} \subset \mathfrak{o}$, $b \in \mathfrak{p}_i$, contra la hipótesis de ser $p \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}$. Por consiguiente, $b \notin \bar{\mathfrak{p}}$ y de aquí, $p \in \mathfrak{o}_{\bar{\mathfrak{p}}}$. Queda así demostrado que $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} \cap \bar{\Sigma} = \mathfrak{o}_{\bar{\mathfrak{p}}}$.

Según esta proposición, si $\mathbf{v}$ es un divisor de Δ y $\mathbf{w}_i$ las extensiones a Σ, de centros $\mathfrak{P}_i$ en $\mathfrak{o}$, que definen el elemento $A_{\mathbf{v}}$ del haz de Zariski $\mathfrak{A}$, si alguno de los ideales $\mathfrak{P}_i$ está contenido en $\mathfrak{p}_i$, sus restricciones $\bar{\mathfrak{P}}_i$ y $\bar{\mathfrak{p}}$ verifican $\bar{\mathfrak{P}}_i \subset \bar{\mathfrak{p}}$; pero $\bar{\mathfrak{P}}_i$ será, entonces, componente de un elemento $\bar{A}_{\mathbf{v}}$ del haz $\bar{\mathfrak{A}}$ sobre $\bar{V}$; por tanto:

Corolario. *Por cada punto $\bar{P}$ de $\bar{V}$ pasan los elementos $\bar{A}_{\mathbf{v}}$ de $\bar{\mathfrak{A}}$ que son restricciones de los elementos de $\mathfrak{A}$ que pasan por cada uno de los puntos P_i que son extensiones de $\bar{P}$ a V.*

Definición. Diremos que un punto de $\bar{V}$ es *punto base* del haz $\bar{\mathfrak{A}}$ cuando todos los elementos de $\bar{\mathfrak{A}}$ pasen por él.

Proposición 4. *La condición necesaria y suficiente para que un punto $\bar{P}$ sea punto base de $\bar{\mathfrak{A}}$ es que al menos una de sus extensiones P_i sea punto base del haz de Zariski $\mathfrak{A}$ de V.*

Demostración. Si P_i es punto base de $\mathfrak{A}$, todos los elementos de $\mathfrak{A}$ pasan por él; las restricciones de estos elementos a $\bar{V}$, que son los elementos de $\bar{\mathfrak{A}}$, pasarán todas, según acabamos de ver, por la restricción de P_i que es $\bar{P}$, luego éste será punto base de $\bar{\mathfrak{A}}$. Recíprocamente, si $\bar{P}$ es punto base de $\bar{\mathfrak{A}}$, por él pasarán todos los elementos de $\bar{\mathfrak{A}}$; cada elemento de $\mathfrak{A}$ que yace sobre el correspondiente de $\bar{\mathfrak{A}}$ pasará por alguno de los puntos P_i, en número $\leq n$, que yacen sobre $\bar{P}$; luego por uno al menos de estos puntos P_i pasará más de un elemento de $\mathfrak{A}$; esto es suficiente [4] para que sea ya punto base de $\mathfrak{A}$.

Corolario. *Una condición necesaria para que $\bar{P}$ sea punto base de $\bar{\mathfrak{A}}$ es que $\mathfrak{o}_{\bar{\mathfrak{p}}} \cap \Delta = k$, donde $\bar{\mathfrak{p}}$ es el ideal correspondiente a $\bar{P}$ en $\bar{\mathfrak{o}}$.*

Demostración. Por la Proposición 3, 3), $\mathfrak{o}_{\bar{\mathfrak{p}}} \subset \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}$. Siendo $\bar{P}$ punto base de $\bar{\mathfrak{A}}$, lo será P_i de $\mathfrak{A}$, luego [4] $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} \cap \Delta = k$, por ser k algebraicamente cerrado, de donde se sigue el corolario.

La condición no es suficiente. En efecto, si elegimos como contraejemplo el haz algebraico, $\Delta = k(\theta)$, $\theta \notin \overline{\Sigma}$; $\overline{\Sigma} \cap \Delta = k$, luego todos los puntos de $\overline{V}$ serían puntos base del haz.

Volvamos a la descomposición factorial

$$f^0(X) = \prod_{i=1}^{h} (X - l_i^0)^{\varrho_i}, \quad \sum_{i=1}^{h} \varrho_i = n,$$

correspondiente al ideal $\overline{\mathfrak{p}} \subset \overline{\mathfrak{o}}$, que hemos desarrollado al principio de este párrafo :

DEFINICIÓN. Si para un punto $\overline{P}$ de $\overline{V}$ se verifica que en la descomposición factorial del polinomio $f^0(X)$ correspondiente al ideal $\overline{\mathfrak{p}}$ de este punto son iguales a 1 todos los exponentes ϱ_i, diremos que $\overline{P}$ es un *punto ordinario* del haz $\overline{\mathfrak{A}}$. En caso contrario se dice que es un *punto de aproximación.*

Entonces, si un punto $\overline{P}$ es ordinario, se extiende exactamente a n puntos $P'_1, \ldots, P'_n$ de V', cada uno de ellos de multiplicidad $\varrho_i = 1$, es decir, son puntos simples de V'. Ahora bien, según hemos también visto, a cada P'_i le corresponde un único ideal primo $\mathfrak{p}_i$ de $\mathfrak{o}$, o sea, un único punto simple P_i de V. Todo punto ordinario $\overline{P}$ de $\overline{V}$ se extiende, por lo tanto, a n puntos $P_1, \ldots, P_n$ de V. Luego :

PROPOSICIÓN 5. *Los puntos característicos del haz $\overline{\mathfrak{A}}$ son puntos de aproximación de este haz.*

Los puntos de aproximación que no sean característicos verificarán las dos condiciones siguientes : Su extensión a V' está formada por $q < n$ puntos $P'_1, \ldots, P'_q$, y la extensión a V por n puntos $P_1, \ldots, P_n$. Es decir, aquellos ideales $\mathfrak{p}_i'$ tales que

$$\mathfrak{q}'_i = \mathfrak{o}' \overline{\mathfrak{p}} + \mathfrak{o}' (\lambda - l_i)^{\varrho_i}, \quad \varrho_i > 1,$$

se extienden a $\mathfrak{o}$ según ϱ_i ideales primos $\mathfrak{p}_{i1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i\varrho_i}$, $\Sigma\varrho_i = n$. De aquí se sigue [3] que los ideales $\mathfrak{p}'_i$ contienen al conductor $\mathfrak{c}(\mathfrak{o}', \mathfrak{o})$ de $\mathfrak{o}'$ respecto de $\mathfrak{o}$: $\mathfrak{c}(\mathfrak{o}', \mathfrak{o}) \equiv 0 \ (\mathfrak{p}'_i)$, y, por tanto, los puntos P'_i pertenecen a la subvariedad de V' definida por ese conductor. Esto justifica la siguiente

DEFINICIÓN. A los puntos $\overline{P}$ de $\overline{V}$ tales que $\overline{\mathfrak{p}} \supset \mathfrak{c}(\mathfrak{o}', \mathfrak{o}) \cap \overline{\mathfrak{o}}$ les llamaremos *puntos singulares* del haz $\overline{\mathfrak{A}}$.

COROLARIO. *Los puntos singulares del haz $\overline{\mathfrak{A}}$ son puntos de aproximación de ese haz.*

Por cada punto P_i de V correspondiente a un punto ordinario $\overline{P}$ de $\overline{\mathfrak{A}}$, que no sea punto base, pasa uno y solo un elemento [4] del haz de Zariski $\mathfrak{A}$. La restricción de este elemento a $\overline{V}$ será un elemento del haz $\overline{\mathfrak{A}}$ que pasará por $\overline{P}$. Siendo n los puntos P_i ampliados del $\overline{P}$, se tendrá :

Proposición 6. *Por cada punto ordinario del haz $\overline{\mathfrak{A}}$, que no sea punto base, pasa uno al menos, y a lo más n, elementos de $\overline{\mathfrak{A}}$.*

Teorema 2. *Si $\overline{P}$ es un punto de aproximación de $\overline{\mathfrak{A}}$ se verifica*

$$\mathfrak{o}'(f(\lambda), f'(\lambda)) \cap \overline{\mathfrak{o}} \subset \overline{\mathfrak{p}},$$

siendo $f(X)$ el polinomio mínimo de definición de λ y $\overline{\mathfrak{p}}$ el ideal de $\overline{\mathfrak{o}}$ correspondiente a $\overline{P}$.

Demostración. Por la hipótesis hecha sobre $\overline{P}$, se tendrá

$$f^0(X) = \Pi\,(X - l_i^0)^{\varrho_i}, \quad \varrho_i > 1,$$

para, al menos, una ϱ_i. Luego

$$f^0(X) \in \mathfrak{o}^0[X](X - l_i^0),$$

y también $(f^0(X))'$ pertenecerá a ese ideal. Entonces,

$$f(X),\ f'(X) \in \mathfrak{o}[X]\,(X - l_i),$$

o sea,

$$(f(\lambda),\ f'(\lambda)) \in \mathfrak{o}'\,(\lambda - l_i) \subset \mathfrak{p}'_i.$$

De aquí, por yacer $\mathfrak{p}'_i$ sobre $\overline{\mathfrak{p}}$, resulta

$$(f(\lambda),\ f'(\lambda)) \cap \overline{\mathfrak{o}} \subset \overline{\mathfrak{p}}.$$

Corolario. *Si $\Delta = k(\lambda)$, el haz $\overline{\mathfrak{A}}$ es un haz algebraico definido por la ecuación*

$$f(x_1, \ldots, x_m, \lambda) = 0,$$

y todos sus puntos de aproximación verifican las ecuaciones

$$f(x_1, \ldots, x_m, \lambda) = 0$$
$$f'_\lambda(x_1, \ldots, x_m, \lambda) = 0.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ABHYANKAR, S. : *Ramification theoretic methods in algebraic geometry*. Ann. Math. Stud., 43. Princeton, 1959.

[2] ETAYO, J. J. : *Haces y familias unidimensionales sobre una variedad algebraica*. Act. II Reun. Mat. Españ., «Publ. Sem. Mat. Zaragoza», *3*. 1962.

[3] ZARISKI, O. : *Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties*. Am. J. Math., 61, 1939.

[4] — — — : *Pencils on an algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini*. Trans. Am. Math. Soc., 50, 1941.

[5] ZARISKI, O., SAMUEL, P. : *Commutative Algebra. I, II*. Van Nostrand, 1958, 1960.

SEMINARIO MATEMÁTICO
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA