SOBRE EL PROBLEMA DE WATSON CON COTAS DEPENDIENTES DE $\Re z$

POR

DIEGO RAMÍREZ DURO

Al Profesor D. José María Orts

El *Problema de Watson* plantea la cuestión de determinar condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer la sucesión de cotas $\{m_n\}$ para que una función, $f(z)$, analítica en un cierto recinto y que satisfaga en el mismo las desigualdades

$$|f(z)| \leq r^{-n} m_n, \quad (r = |z|),$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$, sea idénticamente nula.

En este trabajo consideramos una función, $f(z)$, analítica en un semiplano y que satisface en el mismo desigualdades de la forma

$$|f(z)| \leq m_n(r, x), \quad (r = |z|, \ x = \mathrm{Re}\ z),$$

para $n(\text{real}) \geq 0$. Imponiendo ciertas condiciones a las funciones $m_n(r, x)$, damos una condición necesaria que debe satisfacer la familia $\{m_n(r, x) | n \geq 0\}$ para que se implique la anulación de $f(z)$. Asimismo determinamos la solución del *Problema de Watson* cuando

$$m_n(r, x) = r^{-n}\mu_n(x),$$

siendo $\mu_n(x)$ un tipo muy general de funciones de x.

TEOREMA 1. *Sea $m_n(u, v)$ una función real y positiva de $u \geq v \geq 0$, para cada $n \geq 0$, y tal que:*

(a) *$m_n(u, v)$ es función no creciente de $u \geq v$ para cada $v \geq 0$ y $n \geq 0$,*

(b) *$m_n(u, v)$ es función no creciente de $v \leq u$ para cada $u \geq 0$ y $n \geq 0$,*

(c) $m_n(u, ve^{-\frac{\alpha v}{n}}) \leq Ae^{\beta v} m_n(u, v)$ *y* $m_n(u, 0) \leq Ae^{\beta v} m_n(u, v)$, *para cada* $n \geq 0$, *un cierto* $\alpha > 0$ *y un* $A > 0$.

Si

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \mathrm{T}(r)}{r^2}\, dr < +\infty \tag{1}$$

siendo

$$\mathrm{T}(r) = \sup_{0 \leq n \leq \alpha e r} \frac{1}{m_n(r, cn)}$$

y $c = 1/\alpha e$, *existe una función*, $f(z)$, *analítica en* $\mathfrak{Re}\, z > 0$, *que satisface las desigualdades*

$$|f(z)| \leq m_n(r, x), \quad (r = |z|.\ x = \mathfrak{Re}\, z), \tag{2}$$

para $n \geq 0$.

Demostración. En efecto, si se verifica (1) existe, (Mandelbrojt, [1] : 30), una función, $g(z)$, analítica en $\mathfrak{Re}\, z > 0$ y tal que

$$|g(z)| < (\mathrm{T}(r))^{-1} \leq m_n(r, cn)$$

para todo z del semiplano $\mathfrak{Re}\, z > 0$ y $n \geq 0$.

Por otra parte, la función

$$\varphi_n(x) = xe^{-\frac{\alpha x}{n}}, \quad (x \geq 0),$$

tiene un máximo en $x = n/\alpha$; por consiguiente,

$$xe^{-\frac{\alpha x}{n}} \leq \frac{n}{\alpha e} = cn,$$

de donde

$$n \geq \frac{x}{c}\, e^{-\frac{\alpha x}{n}}$$

y, teniendo en cuenta (b) y (c),

$$m_n(r, cn) \leq m_n(r, xe^{-\frac{\alpha x}{n}}) \leq Ae^{\beta x}\, m_n(r, x).$$

Entonces, la función

$$f(z) = A^{-1}\, e^{-\beta z}\, g(z)$$

es no idénticamente nula y satisface las desigualdades (2).

OBSERVACIÓN 1. *Si* $m_n(r, x) = r^{-n} \mu_n(x)$, *siendo* $\mu_n(x)$, *para cada* $n \geq 0$, *una función no decreciente de* x *y tal que*

$$\mu_n(x/q) \leq q^{\gamma n} \mu_n(x)$$

para todo $q \geq 1$ *y una cierta constante* γ, $m_n(r, x)$ *satisface las condiciones* (a), (b) y (c). En efecto, (a) y (b) son inmediatas y, para que se verifique (c), basta tomar $A = 1$ y $\beta = \alpha\gamma$.

TEOREMA 2. *Sea* $f(z)$ *una función analítica en* $\mathfrak{Re}\, z > a \geq 0$ *y tal que se verifiquen las desigualdades*

$$|f(z)| \leq r^{-n} \mu_n(x), \quad (r = |z|, x = \mathfrak{Re}\, z > cn), \tag{3}$$

para $n \geq 0$, *siendo* $\mu_n(x)$ *una función real y no creciente de* x *para todo* $n \geq 0$, *y* $c \geq 1$. *Si*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \mathrm{T}(r)}{r^2} dr = + \infty \tag{4}$$

siendo

$$\mathrm{T}(r) = \operatorname*{Sup}_{n \geq 0} \frac{r^n}{\mu_n(cn)}$$

es $f(z) \equiv 0$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, teniendo en cuenta (RAMÍREZ DURO, [3]: 45) vemos que las integrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \mathrm{T}(r)}{r^2} dr$$

con

$$\mathrm{T}(r) = \operatorname*{Sup}_{n \geq 0} \frac{r^n}{\mu_n(cn)}$$

y

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \mathrm{T}_1(r)}{r^2} dr$$

con

$$\mathrm{T}_1(r) = \operatorname{Sup} \left\{ \frac{r^\nu}{\mu_n(cn)} \,\middle|\, [n] = \nu \geq 0 \right\}$$

divergen simultáneamente. Por consiguiente,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \mathrm{T}_1(r)}{r^2} dr = + \infty.$$

Si ponemos

$$\mu_\nu{}^*(x) = \operatorname*{Inf}_n \{\mu_n(x) | [n] = \nu\},$$

resulta de (3)

$$|f(z)| \leq r^{-\nu} \mu_\nu{}^*(c(\nu + 1)),$$

para $\Re z > c(\nu + 1)$ y $\nu = 0, 1, 2, \ldots.$

Si hacemos ahora

$$T_2(r) = \operatorname{Sup} \frac{r^\nu}{\mu_\nu{}^*(c(\nu + 1))},$$

por ser $\mu_\nu(x)$ no creciente en x y

$$\mu_n(cn) \geq \mu_n(c(\nu + 1)) \geq \mu_\nu{}^*(c(\nu + 1)),$$

es

$$T_2(r) \geq T_1(r)$$

y

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T_2(r)}{r^2} dr = + \infty$$

De aquí se sigue, teniendo en cuenta (Rodríguez-Salinas, [2]: 207) que $f(z) \equiv 0$.

Corolario 1. *Sea $f(z)$ una función analítica en $\Re z > a \geq 0$, tal que se verifiquen las desigualdades* (3) *y $\{\mu_n(x) | n \geq 0\}$ una familia de funciones reales, no decrecientes, de $x \geq 0$ y tales que*

$$\mu_n(x/q) \leq q^{\gamma n} \mu_n(x)$$

para todo $q \geq 1$, $n \geq 0$, y una cierta constante γ. Entonces, una condición necesaria y suficiente que debe verificar $\{\mu_n(x) | n \geq 0\}$ para que sea $f(z) \equiv 0$ es (4).

Corolario 2. *Sea $f(z)$ una función analtica en $\Re z > a \geq 0$ y tal que, siendo $0 \leq p_n \leq pn$ y $0 < p < 1$, se verifiquen las desigualdades*

$$|f(z)| \leq \frac{m_n}{r^n \cos^{p_n} \theta}, \quad (z = re^{i\theta}) \tag{5}$$

para todo $n \geq 0$. Entonces, una condición necesaria y suficiente que debe satisfacer la familia de funciones reales no negativas

$$\mu_\nu(x) = \frac{m_n}{x^{p_n}}, \quad (\nu = n - p_n, n \geq 0),$$

para que resulte $f(z) \equiv 0$ *es*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \mathrm{T}(r)}{r^2}\, dr = +\infty$$

siendo

$$\mathrm{T}(r) = \operatorname*{Sup}_{n \geq 0} \frac{(n - p_n)^{p_n}\, r^{n-p_n}}{m_n}.$$

En efecto, observemos que las desigualdades (5) podemos ponerlas en la forma

$$|f(z)| \leq \frac{\mu_\nu(x)}{r^\nu},\ (\nu \geq 0),$$

donde

$$\mu_\nu(x) = \frac{m_n}{x^{p_n}}$$

es no creciente en x, y basta tomar $\gamma = p/(1 - p)$ para que

$$\mu_\nu(x/q) \leq q^{\gamma\nu} \mu_\nu(x),$$

con lo que se cumplen las condiciones impuestas en los teoremas 1 y 2. Además, si llamamos

$$\mathrm{T}^*(r) = \operatorname*{Sup}_{n \geq 0} \cdot \frac{n^{p_n}\, r^{n-p_n}}{m_n},$$

$\mathrm{T}(r)$ y $\mathrm{T}^*(r)$ convergen o divergen simultáneamente, ya que

$$\left[\frac{(n - p_n)^{p_n}\, r^{n-p_n}}{m_n} : \frac{n^{p_n}\, r^{n-p_n}}{m_n}\right]^{\frac{1}{n - p_n}} = \left(1 - \frac{p_n}{n}\right)^{\frac{p_n}{n - p_n}}$$

y, llamando

$$c = (1 - p)^{\frac{p}{1-p}} \leq \left(1 - \frac{p_n}{n}\right)^{\frac{p_n}{n - p_n}} \leq 1,$$

vemos que

$$\mathrm{T}^*(cr) \leq \mathrm{T}(r) \leq \mathrm{T}^*(r).$$

Este COROLARIO 2 mejora el TEOREMA 7 de [3] ya que allí, aún obteniendo la misma solución, imponíamos la restricción

$$p_n = pn + \varrho_n$$

con

$$p < 1 \text{ y } \varrho_n = 0\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] MANDELBROJT, S., *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications.* París, Gauthier-Villars, 1952.

[2] RODRÍGUEZ-SALINAS, B., *Los problemas de unicidad en la teoría de series asintóticas. Expresión de funciones semi-analíticas mediante los algoritmos de Borel y Stieltjes.* Rev. R. Acad. Ciencias Ex., Fi. y Nat. de Madrid, Tomo L, cuaderno 2.º: 192-227, 1956.

[3] RAMÍREZ DURO, D., *Series asintónicas débiles.* Rev. Acad. Ciencias Ex., Fi.-Quím. y Nat. de Zaragoza, Serie 2.ª, tomo XV, fasc. 2.º: 19-62, 1959.

SEMINARIO MATEMATICO
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA