SOBRE LA EXISTENCIA DE OVALOS CON DOS PUNTOS EQUICORDALES

POR

J. SANCHO DE SAN ROMÁN

INTRODUCCIÓN.

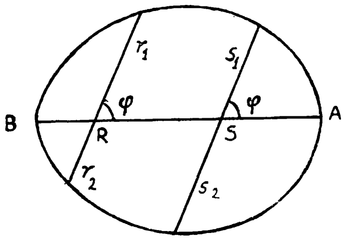
Un punto O del plano de un óvalo, se dice punto equicordal del mismo, cuando todas las cuerdas del óvalo que pasan por O, tienen longitud constante. Es evidente que O debe ser interior.

La cuestión de si existen óvalos con dos puntos equicordales no está resuelta todavía, según nuestra información. El último intento de que tenemos noticia (1), contiene errores que anulan su valor.

Esta cuestión es antigua, pues fue presentada y tratada ya en 1918 por Blaschke, Rothe y Weitzenböck (Archiv der Math., t. 27, 1918).

Los trabajos más notables que se conocen sobre el asunto, se limitan a obtener propiedades que tendrían dichos óvalos, si existiesen.

Así, W. Süss (2) establece:



« Dado un óvalo con dos puntos interiores R y S tales que (v. figura):

$$\overline{r_1(\varphi)}^{\varrho} + \overline{r_2(\varphi)}^{\varrho} = a^{\varrho} \qquad (a, b, \varrho, \sigma \text{ const.})$$
$$\overline{s_1(\varphi)}^{\sigma} + \overline{s_2(\varphi)}^{\sigma} = b^{\sigma} \qquad \varrho \geq 1 \;\; \sigma \geq 1$$

se tiene:

1.º el óvalo es simétrico respecto de RS.

2.º queda determinado por R, S, RA y RB.

---

(1) LINIS V. «*Ovals with equichordals points*», Amer. Math. Monthly, t. 64, p. 420-422, 1957.

(2) TOHOKU MATH. J.; t. 25, p. 86-98, 1925.

3.º si es $a = b$ y $\varrho = \sigma$, el óvalo es simétrico respecto de la mediatriz de RS, y $r_1(\varphi)$ es función estrictamente monótona decreciente para $0 \leq \varphi \leq \pi$. »

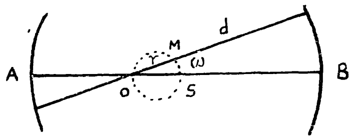
Se advierte que las hipótesis de Süss son más generales que las del óvalo con dos puntos equicordales, el cual corresponde al caso 3.º) anterior cuando $\varrho = \sigma = 1$.

Mucho después de Süss, G. A. Dirac (3), demuestra de nuevo los resultados de aquél, para el caso particular que nos ocupa. Además, prueba que : « una e-curva (óvalo con dos puntos equicordales) tiene tangente única en cada punto ». E indica que para $RS/AB \geq 0, 2$, no puede existir e-curva.

Nosotros investigamos solamente la posibilidad de existencia de e-curvas, y no intentamos deducir ninguna propiedad nueva en el supuesto de su existencia. No obstante, admitimos que este camino indirecto puede quizá conducir a la resolución del problema.

Capítulo I.

Suponiendo existente una e-curva, sea 0 uno de los puntos equicordales y S el centro del óvalo (v. figura). Consideremos el lugar geométrico de los puntos medios M de las cuerdas que pasan por O; es inmediato que este l.g. será una curva cerrada, simétrica de eje AB, y normal a este eje en O y S. Si es: $r = r(\omega)$ su ecuación polar de polo O y eje polar OB, la función $r(\omega)$ debe cumplir las condiciones:



$$r(\omega) = r(-\omega), \; r(\omega + \pi) = -r(\omega) \qquad [1].$$

Considerando ejes cartesianos de origen S y eje de abcisas AB, las ecuaciones paramétricas del óvalo con parámetro ω, serán :

$$\left. \begin{aligned} x &= (r + d) \cos \omega - a \\ y &= (r + d) \operatorname{sen} \omega \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi,$$

donde : $d = AB/2$, $a = OS$.

Pero en virtud de lo ya sabido, el óvalo es simétrico respecto

(3) « Ovals with equicordals points » J. London Math, Soc., t. 27, p. 429-437, 1952.

del eje SY, perpendicular a AB en S. Esto obliga a que la función $r(\omega)$, además de las condiciones [1], cumpla:

$$\begin{aligned} \text{si}: \ [r(\omega_1) + d] \operatorname{sen} \omega_1 &= [r(\omega_2) + d] \operatorname{sen} \omega_2 \\ \text{entonces}: \ [r(\omega_1) + d] \cos \omega_1 - a &= -[r(\omega_2) + d] \cos \omega_2 + a \end{aligned} \qquad [2].$$

Además, $r(\omega)$ debe ser estrictamente monótona decreciente para $O \leq \omega \leq \pi$.

Si admitimos que el óvalo es desarrollable en serie en el punto B (luego en el A), lo cual equivale a admitir lo mismo para la función $r(\omega)$ en el punto $\omega = O$, entonces, la condición de simetría respecto SY, de los arcos infinitesimales del óvalo en A y B, se puede expresar así:

$$\left(\frac{d^i x}{dy^i}\right)_B + \left(\frac{d^i x}{dy^i}\right)_A = 0 \qquad [3].$$

De [3] pueden deducirse sucesivamente los valores que deben tener las derivadas de $r(\omega)$ para $\omega = 0$. Al efecto, basta expresar $d^i x / dy^i$ en función de las derivadas $d^h x / d\omega^h$ y $d^h y / d\omega^h$, y sustituir valores para $\omega = 0$ y $\omega = \pi$.

Calculando se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^h x}{d\omega^h}\right)_O &= \underline{r^h} - \binom{h}{2} \underline{r^{h-2}} + \binom{h}{4} \underline{r^{h-4}} - \ldots\ldots + (a+d) \cos \frac{\pi h}{2} \\ \left(\frac{d^h y}{d\omega^h}\right)_O &= \binom{h}{1} \underline{r^{h-1}} - \binom{h}{3} \underline{r^{h-3}} + \ldots\ldots\ldots + (a+d) \operatorname{sen} \frac{\pi h}{2} \end{aligned} \qquad [4]$$

donde $\underline{r^h}$ indica $d^h r / d\omega^h$ para $\omega = 0$.

Teniendo en cuenta que $r(\omega)$ es función par de ω, y que por tanto, $\underline{r^{2k+1}} = 0$, se deduce que:

$$\left.\begin{aligned} \text{para } h \text{ impar}: \ \underline{x_o^h} &= 0 \\ h \text{ par} \quad : \ \underline{y_o^h} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Es fácil ver que las expresiones de $(d^h x / d\omega^h)_\pi$ y $(d^h y / d\omega^h)_\pi$ son las mismas que las anteriores de $\omega = 0$, sin más que cambiar $+d$ por $-d$.

Para $i = 2$, la condición [3] nos da:

$$r'' = -a \frac{d^2 - a^2}{d^2 + a^2}$$

Para $i = 4$ se obtiene, poniendo: $a + d = m$, $a - d = n$;

$$r^{IV}\left(\frac{1}{m^4}+\frac{1}{n^4}\right) - 12r''^2\left(\frac{1}{m^5}+\frac{1}{n^5}\right) + 10r''\left(\frac{1}{m^4}+\frac{1}{n^4}\right) - 3\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{n^3}\right) = 0$$

donde sustituyendo r'' por su valor precedente, se despeja r^{IV} en función de a y d.

Y así sucesivamente, se puede despejar r^{2h}_{-} en función de las anteriores, o sea en función de a y d, ya que en la expresión [3]. para $i = 2h$, aparece r^{2h}_{-} linealmente.

De esta manera, se obtiene una serie:

$$r(\omega) = a + r''\frac{\omega^2}{2!} + r^{IV}\frac{\omega^4}{4!} + \ldots \qquad [5]$$

cuyo radio de convergencia interesa estudiar.

Para ello, hay que hallar la expresión general de r^{2h}_{-} en función de a y d, en forma que se puedan deducir consecuencias positivas para la convergencia.

Volviendo a [3], la expresión general de la derivada que allí aparece, es:

$$\left(\frac{d^{2h}x}{dy^{2h}}\right)_B = \frac{x_o^{2h} y_o'^{h-1} + \ldots\ldots}{y_o'^{3h-1}}$$

cuyo numerador es «isobárico» en índices y exponentes, de peso $3h - 1$. Además, cada término tiene el mismo número h de factores. Cada uno de estos factores es lineal en las derivadas r^{2i}_{-} o en $m = a + d$ (v. [4]), luego resulta homogéneo de grado h en r^{2i}_{-}, m.

La expresión [3] resulta así homogénea de grado $(-2h + 1)$ en r^{2i}_{-}, m, n; y multiplicando por: $m^{3h-1}n^{3h-1}$, queda homogénea de grado $4h - 1$. Finalmente, sustituyendo las r^{2i}_{-} $(i < h)$, m y n, en función de a y d, queda:

$$r^{2h}_{-}\left[a^{2h} + \binom{2h}{2} a^{2h-2} d^2 + \ldots + d^{2h}\right](a^2 - d^2)^{h-1} = a\,\Phi\,(a^2, d^2)$$

donde Φ es función homogénea en a^2, d^2, de grado $2h - 1$.

Escribiendo: $a^2/d^2 = x$, queda:

$$r^{2h}_{-} = a\,\frac{A_1 x^{2h-1} + A_2 x^{2h-2} + \ldots + A_{2h-1} x + A_{2h}}{x^{2h-1} + B_1 x^{2h-2} + \ldots + B_1 x + 1}$$

Con esto, no hacemos más que iniciar un camino, que parece ser el más adecuado para estudiar la convergencia de la serie [5].

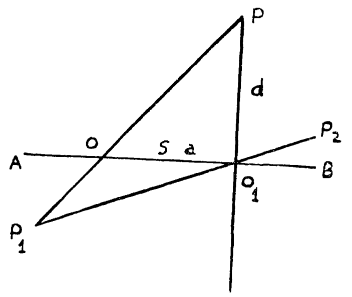
Es interesante notar, que para $h = 1, 2, 3$, se obtiene: $A_2 = -1$, $A_4 = 1$, $A_6 = -1$. No hemos conseguido demostrar la generalidad de esta ley : $A_{2h} = (-1)^h$, si es que es cierta, y solamente la hemos comprobado en los tres casos citados. Si fuese cierta, el límite de la función [5] $r(\omega)$ para $a =$ const. y $d \to \infty$, sería a.cos ω, o sea, el lugar geométrico (M) tendería a una circunferencia de diámetro OS, y este hecho sería buena base de ataque al estudio de la convergencia de [5].

Capitulo II

En el problema de existencia planteado, el camino anterior tiene el inconveniente de que debe presuponer que el óvalo es desarrollable en serie en un entorno del punto A.

Un camino sin hipótesis adicionales a la cuestión, es el siguiente.

Supuesta la existencia de una e—curva, fijada por los puntos A, O, O_1 y B, es evidente que el punto P (v. figura) situado en la perpendicular a AB por O_1 y tal que $O_1 P =$ d, pertenece a la e—curva (y análogamente, otros tres por simetría).



Partiendo de P, obtenemos una sucesión de puntos: $P_1 P_2 \ldots$ del óvalo, como indica la figura. Es fácil probar, que los puntos de índice par $P P_2 P_4 \ldots$ tienen por límite un punto β de la recta AB. Precisando más : las abcisas (respecto de S) $x\, x_2\, x_4 \ldots$, forman una sucesión monótona creciente, que es acotada, y tiene por tanto un límite β. En cuanto un término x_{2h} de tal sucesión, sea mayor que d, el punto β no puede coincidir con B, y la e—curva es imposible.

Haciendo fijo el valor de $d = 0, 5$, en el trabajo citado de G. A. Dirac se indica que hay imposibilidad para $a \gtrless 0{,}1$. Nosotros hemos comprobado la imposibilidad para: a $\gtrless 0, 05$, pues obtenemos: $x_{18} = 0{,}50009$ con error menor que 0,00002.

Es inmediato ver que si hay imposibilidad para $a = k$, también la hay para $a > k$, por lo que hemos utilizado el signo $\gtrless$.

La técnica utilizada por nosotros para el cálculo sucesivo de las abcisas, ha sido la siguiente:

Indicamos con x_i y_i los valores absolutos de las coordenadas de

P_i. Además, llamamos ω_{2h} al ángulo $P_{2h}00_1$ y ω_{2h+1} al ángulo $P_{2h+1}\, 0_1\, 0$. De este modo se tiene:

$$\frac{y_i}{x_i + a} = tg\ \omega_i, \quad \begin{array}{l} x_{i+1} = \cos \omega_i - x_i \\ y_{i+1} = \operatorname{sen} \omega_i - y_i \end{array}$$

que permite calcular x_{i+1}, y_{i+1} cuando se conocen x_i, y_i.

El límite β, es igual a la suma de la serie:

$$a + (-\cos \omega + \cos \omega_1) + \dots + (-\cos \omega_{2i} + \cos \omega_{2i+1}) + \dots$$

Si se pudiese demostrar que el valor de esta serie es estrictamente decreciente con a, lo cual parece intuitivamente cierto, quedaría probada la no existencia de e—curvas. Esperamos que este enfoque del problema sea útil para quien lo resuelva definitivamente.

Zaragoza, Mayo de 1962.