# NOTA SOBRE LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE DIRICHLET CONOCIENDO LA FUNCIÓN DE GREEN

por

RAFAEL AGUILÓ FUSTER

*A mi querido Maestro el Prof. D. José M.ª Orts Aracil, en testimonio de agradecimiento y afecto.*

Sean en el espacio euclídeo de tres dimensiones tres ejes cartesianos rectangulares $Ox$, $Oy$, $Oz$, y un volumen $V$ limitado por una superficie cerrada $\Sigma$, de la cual haremos la siguiente hipótesis : Que en cada punto de ella, excepción hecha de un número finito de curvas (de medida superficial nula) y de puntos de ella, hay una normal determinada continua.

Sea $G(x, y, z ; a, b, c)$, la función de Green relativa a este contorno, tiene las siguientes propiedades :

1.ª $G(x, y, z ; a, b, c,) = G(a, b, c; x, y, z)$.

2.ª Es función armónica de $x, y, z$, (y de $a, b, c$) excepto para $x = a$, $y = b$, $z = c$.

3.ª $G(x, y, z; a, b, c) = 0$ si $(x, y, z) \epsilon \Sigma$ y $(a, b, c) \notin \Sigma$.

4.ª $G(x,y,z; a,b,c) = 1/r + g(x,y,z; a,b,c)$ $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ y $g(x,y,z; a,b,c)$ función armónica de $x,y,z$ excepto sólo si los puntos $(x,y,z)$ y $(a,b,c)$ coinciden en un punto de $\Sigma$.

El problema de Dirichlet consiste en determinar la función armónica en el interior de $V$, que al tender, interiormente a $V$, hacia un punto $(x,y,z) \epsilon \Sigma$ el límite sea $U(x,y,z)$, siendo $U$ una función arbitraria continua sobre $\Sigma$.

Mediante la función de Green se resuelve este problema, y la solución es :

$$U(a,b,c) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U(x,y,z) \frac{dG}{dn} d\sigma \tag{1}$$

( $\frac{d}{dn}$ indica la derivada según la dirección de la normal a $\Sigma$ interior a $V$). La demostración clásica que dan los tratados de Análisis, suponen que $\frac{dU}{dn}$ existe sobre $\Sigma$ (salvo en un conjunto de medida superficial nula) y es sumable (*). ( $\frac{dG}{dn}$ existe y es continua en virtud de la condición 3.ª).

En particular, si $U(x,y,z) \equiv 1$, es $\frac{dU}{dn} \equiv 0$, y por consiguiente es válida la demostración citada, es decir :

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{dG}{dn}\,d\sigma = 1 \qquad (a,b,c)\in V \qquad (a,b,c)\notin\Sigma \tag{2}$$

El motivo de la presente Nota es demostrar la validez de (1) prescindiendo de que exista o sea sumable $\frac{dU}{dn}$ (**).

La demostración se descompondrá en dos partes : a) Que (1) es función armónica de $a,b,c$ en el interior de $V$. b) Que si

$$(a,\, b,\, c) \rightarrow (x_0,\, y_0,\, z_0) \in \Sigma$$

interiormente a $V$ es lim $U(a,b,c) = U(x_0, y_0, z_0)$.

*Demostración de* a).

(1) se puede escribir

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} U\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\,d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} U\,\frac{dg}{dn}\,d\sigma \tag{3}$$

donde la primera integral es un potencial de doble capa, y la segunda es evidentemente una función armónica en el interior de $V$ (derivando bajo el signo integral respecto a $a$, $b$, $c$, resulta inmediatamente). Por tanto (1) es armónica de $a,b,c$ en el interior de $V$. q.e.d.

(*) La demostración puede verse, p. e. en GOURSAT « *Cours d'Analiyse Mathématique* » II tomo, 5.ª edición, párrafo 534 pág. 270.

(**) En el caso de dos variables independientes está demostrado en GOURSAT, loc. cit. párrafo 518, pág. 217 basándose en la representación conforme, no generalizable a tres variables.

*Demostración de* b).

La integral

$$\iint_{\Sigma} [U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)] \frac{dG}{dn} d\sigma \tag{4}$$

es uniformemente convergente en el dominio del punto $M_0$ $(x_0,y_0,z_0)$.

Observemos ante todo que si en la función de Green el punto $(a,b,c)$ es un punto fijo de $\Sigma$, ella es, como función de $x,y,z$, idénticamente nula. En efecto: *Si* $(x,y,z) \notin \Sigma$ es consecuencia inmediata de las propiedades 1.ª y 3.ª, para $(x,y,z) \in \Sigma$ y distinto de $(a,b,c)$, resulta de la 2.ª, y de la 4.ª se deduce que en este caso es $g(x,y,z; a,b,c) = - 1/r$ por tanto también es válida para $(x,y,z) = (a,b,c) \in \Sigma$.

De aquí se deduce que las integrales que aparecen en (1) y (2), tienen sentido y son nulas cuando $(a,b,c) \in \Sigma$.

Para demostrar que (4) es uniformemente convergente en el dominio del punto $M_0$, consideremos una porción $\Sigma'$ de $\Sigma$ conteniendo $M_0$, suficientemente pequeña para que sobre ella se verifique $|U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0)| < \epsilon$, y una esfera de centro $M_0$ y radio $\varrho$ conteniendo $\Sigma'$ en su interior, tendremos para $|(a,b,c) - (x_0,y_0,z_0)| < \varrho$

$$\left| \iint_{\Sigma' 1 \delta} [U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0)] \frac{dG}{dn} d\sigma \right| \leq \epsilon \iint_{\Sigma'} \left| \frac{dG}{dn} \right| d\sigma \tag{5}$$

la integral que aparece en el segundo miembro está evidentemente acotada, y de aquí resulta la convergencia uniforme.

Mediante el razonamiento clásico resulta que la expresión (4) es continua de $a,b,c$ en $M_0$ y nula en este punto (*).

Ahora bien, si $P(a,b,c)$ interior a $V$ tiende a $M_0(x_0,y_0,z_0)$, y de la demostrada continuidad de (4), tendremos

$$\lim \iint_{\Sigma} U(x,y,z) \frac{dG}{dn} d\sigma = \lim \iint_{\Sigma} U(x_0, y_0, z_0) \frac{dG}{dn} d\sigma \tag{6}$$

y, en virtud de (1) y (2)

$$\lim U(a, b, c) = U(x_0, y_0, z_0) \tag{7}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Las mismas consideraciones pueden hacerse para el problema de Dirichlet exterior. La función de Green exterior debe verificar

(*) Cfr. GOURSAT, loc. cit. párrafo 504, pág. 174 y sgs.

las propiedades indicadas para la interior, más la de ser nula para $P(a,b,c)$ en el infinito. En (1) tomando como $G$ la función de Green exterior, y $\frac{dG}{dn}$ la derivada según la dirección de la normal exterior, resuelve el problema exterior y es nula en el infinito, ya que lo es $\frac{dG}{dn}$ (por ser derivada de una constante).

La demostración es la misma que para el problema interior.

Seminario Matemático de Barcelona