NUEVA DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS DE STEINER EN UN GENERAL S^{n+1}

por

E. VIDAL ABASCAL

Al profesor Dr. JOSÉ M.ª ORTS, *su antiguo discípulo en la Universidad de Santiago, con respeto, admiración y agradecimiento.*

El profesor C. B. ALLENDOERFER [2], ha generalizado a espacios de curvatura constante las fórmulas de STEINER, para el área (A_ϱ) y el volumen (Vol_ϱ) correspondientes a la hipersuperficie V_ϱ^n geodésicamente paralela a otra V^n cerrada y limitada en S^{n+1}, de área y volumen A y Vol., respectivamente. En su trabajo hace constar que sigue un método análogo al dado por nosotros para obtener dichas fórmulas en el caso de $n = 1$, [3](*). Las fórmulas obtenidas son:

$$(1) \qquad A_\varrho = \sum_{i=0}^{n} M_i \left(K^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen}[\varrho K^{1/2}]\right)^{n-i} \left(\cos[\varrho K]^{1/2}\right)^{i}$$

$$(2) \qquad \mathrm{Vol}\,\varrho = \mathrm{Vol} + \sum_{i=0}^{n} M_i \int_0^{\varrho} \left(K^{-1/2} \operatorname{sen}[x^0 K^{1/2}]\right)^{n-i} \left(\cos[x^0 K^{1/2}]\right)^{i} dx^0$$

para $$K > 0: \quad 0 \leq \varrho \leq \frac{\pi}{2} K^{1/2};$$

y las correspondientes para $K < 0 : \varrho \geq 0$.

A continuación damos una nueva deducción siguiendo el método utilizado por BLASCHKE [1] para el caso de un espacio euclidiano E^3, y como caso particular generalizamos a un espacio euclidiano E^{n+1} la fórmula de MINKOWSKI dada para E^3.

(*) Dice literalmente (pág. 129) : The methods used in deriving these results are similar to those of Vidal Abascal [6] who developed the special case of $n = 1$ in a recent paper.

1. El área de una superficie V^n, teniendo en cuenta que

$$\lim_{B\to 0}\frac{\int_B d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n}{\int_B dF} = \frac{(\sqrt{K})^n}{tg[R_1\sqrt{K}]\,tg[R_2\sqrt{K}]\ldots tg[R_n\sqrt{K}]}$$

puede escribirse, en la forma

$$A = \int \frac{tg[R_1\sqrt{K}]\,tg[R_2\sqrt{K}]\ldots tg[R_n\sqrt{K}]}{(\sqrt{K})^n}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n \tag{3}$$

siendo $R_i\,(i = 1, \ldots, n)$ los radios de los círculos de distancia osculadores y $d\varphi_i$ la variación del vector tangente en el sentido de Levi-Civita a lo largo de la sección principal correspondiente.

Pero $d\varphi_i = \cos[R_i\sqrt{K}]d\alpha_i$ (siendo α_i el arco sobre el círculo de distancia correspondiente) por lo tanto, sustituyendo en (3)

$$A = \int \frac{\operatorname{sen}[R_1\sqrt{K}]\operatorname{sen}[R_2\sqrt{K}]\ldots\operatorname{sen}[R_n\sqrt{K}]}{(\sqrt{K})^n}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

Para la superficie paralela V^n_ϱ, se obtiene que los radios geodésicos para las secciones principales serán

$$\frac{tg[(R+\varrho)\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}$$

puesto que

$$\frac{1}{\varkappa g_i} = \frac{tg[R_i\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}$$

De donde

$$A\varrho = \int \prod_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}[(R_i+\varrho)\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}\, d\alpha_i =$$

$$= \int \prod_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}[R_i\sqrt{K}]\cos[\varrho\sqrt{K}] + \cos[R_i\sqrt{K}]\operatorname{sen}[\varrho\sqrt{K}]}{(\sqrt{K})}\, d\alpha_i$$

ordenando por las potencias de $\operatorname{sen}[\varrho K^{1/2}]$ se encuentra (1) siendo

$$M_i = \int \frac{\Sigma\operatorname{sen}[R_{j_1}K^{1/2}]\operatorname{sen}[R_{j_2}K^{1/2}]\ldots\operatorname{sen}[R_{j_i}K^{1/2}]\cos[R_{l_1}K^{1/2}]\cos[R_{l_2}K^{1/2}]\ldots\cos[R_{l_{n-2}}K^{1/2}]d\alpha_1\ldots d\alpha_n}{K^{i/2}}$$

$$= \int \frac{1}{K^{i/2}}\,\Sigma\, tg[R_{j_1}K^{1/2}]\,tg[R_{j_2}K^{1/2}]\ldots tg\,[R_{ji}K^{1/2}]\, d\varphi_1\ldots d\varphi_n$$

$$= \int \Sigma \frac{K^{\frac{n-i}{2}}}{tg[R_{l_1}K^{1/2}]\ldots tg[R_{l_{n-1}}K^{1/2}]}\, dF$$

Finalmente para $Vol\varrho$, se encuentra (2) sin más que tener en cuenta

$$\mathrm{Vol}\varrho = \mathrm{Vol} + \int_0^{\varrho} A_{x_0} dx^0.$$

2. CASO PARTICULAR DE LA FÓRMULA DE STEINER PARA LOS ESPACIOS EUCLIDEOS. GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA DE MINKOWSKI

Las fórmulas de STEINER para los espacios euclideos, siendo A_ϱ = Area de la hipersuperficie paralela a E^n a la distancia ϱ. V_ϱ = volumen, M_i = curvaturas medias, serán :

$$A_\varrho = \sum_{i=0}^{n} M_i \, \varrho^{n-1}$$

(4)

$$\mathrm{Vol}_\varrho = \mathrm{Vol} + \sum_{i=0}^{n} (n - i + 1)^{-1} M_i \, \varrho^{n-i+1}$$

$$= \mathrm{Vol} + M_n \varrho + \tfrac{1}{2} M_{n-1} + \tfrac{1}{3} \varrho^2 M_{n-2} \varrho^3 + \ldots M_{n-s} \varrho^{s-1} + \ldots + \tfrac{1}{u+1} M_0 \varrho^{n-1}$$

Teniendo en cuenta que el volumen en E^{n+1} puede escribirse en función de la llamada *función de apoyo*. Considerando un origen como centro de coordenadas polares el elemento de volumen puede escribirse

$$\mathrm{Vol} = \frac{1}{n+1} \int p \dot{F}$$

siendo p la distancia desde el origen al espacio E^n tangente a la hipersuperficie en un punto del elemento $\dot{F}$.

Si se considera la hipersuperficie paralela a la distancia h, se tiene; ($\dot{\varphi}$ elemento de área de la hiperesfera H^n ; $\dot{F} = r_1 \ldots r_n \dot{\varphi}$; $r_i = \dfrac{1}{k_i}$ radio principal de curvatura)

$$\mathrm{Vol}\varrho = \frac{1}{n+1} \int (p + h) \; (r_1 + h) \ldots (r_n + h) \dot{\varphi}$$

(5)

$$= \frac{1}{n+1} \Bigg[\int p r_1 \ldots r_n \dot{\varphi} + h \Big(\int p \Sigma r_{i1} r_{i2} \ldots r i_{n-1} \dot{\varphi} + \int r_1 \ldots r_n \dot{\varphi} \Big) + h^2 \Big(\int p \Sigma r_{i1} \ldots r i_{n-2} \dot{\varphi} +$$

$$\int \Sigma r i_1 \ldots r i_{n-1} \dot{\varphi} \Big) + \ldots + h^{s+1} \Big(\int p \Sigma r i_1 \ldots r i_{n-s-1} \dot{\varphi} + \int \Sigma r i_1 \ldots r i_{n-1} \dot{\varphi} \Big) + \ldots + h^{n+1} \int \dot{\varphi} \Bigg]$$

igualando los coeficientes de las potencias iguales de ϱ y h en (4) y (5), se deduce:

$$(n+1-s)\,M_{n-s} = \int p\ \Sigma \frac{1}{r_{i_1} r_{i_2} \ldots r_{i_{s+1}}}\, dF$$

para $s = 1$ se encuentra la fórmula

$$(6) \qquad M_n = \text{Area} = \frac{1}{n+1}\left(\int p\ \Sigma\, r_{i_1} \ldots r_{i_{n-1}}\, \dot{\varphi} + \int r_1 \ldots r_n\, \dot{\varphi}\right)$$

pero

$$\int r_1 \ldots r_n\, \dot{\varphi} = \text{Area};$$

$$\int p\ \Sigma\, r_{i_1} \ldots r_{i_{n-1}}\, \dot{\varphi} + \int p\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n}\right) r_1 r_2 \ldots r_n\, \dot{\varphi} =$$

$$\int p\left(k_1 + \ldots + k_n\right) \dot{F}$$

de (6), por lo tanto, se deduce la fórmula:

$$\text{Area} = \frac{1}{n}\int p\left(k_1 + \ldots + k_n\right) \dot{F}$$

que generalizada a E_n la de MINKOWSKI dada para E^3.

Seminario Matemático y Observatorio de la Universidad
SANTIAGO DE COMPOSTELA

BIBLIOGRAFÍA

[1] W. BLASCHKE. *Vorlesungen über Integralgeometrie*, I- II, Leipzig, Berlín, Taubner, 1936-37.

[2] C. B. ALLENDOERFER. *Steiner's formulae on a general S_{n-1}*. Bull. of the A. Math. S., Vol. 54. págs. 127-135, 1948.

[3] E. VIDAL ABASCAL. *A Generalization of Steiner's formulae*. Bull. of. the Am. Math. Society, Vol. 53, págs. 841-44, 1947.

[4] E. VIDAL ABASCAL. *Geometria integral sobre las superficies curvas*. Cons. Sup. de Inv. Cient. Public. del Observatorio de Santiago n.º VII, 1950.