ACOTACIÓN DE LA DIFERENCIA DE INTEGRALES EN UN SISTEMA DIFERENCIAL

JUAN AUGÉ

A mi querido maestro Prof. ORTS, *con ocasión de su jubilación, en prueba de agradecimiento y afecto.*

I. PRELIMINARES. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X)$$

en el que las letras mayúsculas indican, como en lo sucesivo, vectores n-dimensionales, con la topología usual de la norma

$$|X| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

y en el que suponemos F función continua en un abierto conexo $\mathfrak{R}$ del espacio (t, X). Consideremos las soluciones $X(t)$ del sistema diferencial anterior que pasan por un punto fijo $(t_0, X_0) \in \mathfrak{R}$ y suponemos para simplificar la escritura $t_0 = 0$, es decir el problema de valores iniciales

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X) \quad . \quad X(0) = X_0 \tag{1.1}$$

El teorema de existencia de PEANO, asegura al menos una solución del problema anterior; pero, como demuestran ejemplos conocidos, pueden existir infinitas soluciones de aquél problema, y si la dimensión de X es superior a 1, no puede en general hablarse de integrales superior e inferior (¹). Sin embargo, aun en el caso general de suponer solamente la continuidad de F, puede obtenerse una acotación del módulo de la diferencia de dos soluciones del problema (1.1); ésta es la cuestión estudiada en el presente trabajo.

(¹) KAMKE, (2) problema (E).

En el n.º 2 se estudia tal problema en la hipótesis de que F satisfaga a la condición (2.2) con lo que se obtiene fácilmente tal fórmula de acotación (2.3), y en el n.º 3 se hace tal acotación sin recurrir a ninguna nueva hipótesis, además de la de continuidad, sobre la función F (teorema II). Además, como consecuencia de tales acotaciones, se obtienen criterios de unicidad (teoremas I y III respectivamente), de los que el primero puede situarse dentro del orden de ideas de BRAUER (''). Pero aun en algunos casos en que no se satisfagan las condiciones exigidas en tales criterios de unicidad, la acotación (2.2) y el teorema II, podrán considerarse, en cierto sentido, como condiciones de unicidad « aproximada ».

2. ACOTACIÓN DE LA DIFERENCIA DE INTEGRALES EN CASOS ESPECIALES. Sean X^1, X^2, dos soluciones del problema (1.1) ; suponiendo solamente la continuidad de la función vectorial $F(t, X)$ puede obtenerse una acotación elemental del módulo de la diferencia de aquellas integrales

$$p(t) = |X^1 - X^2|$$

Consideremos un cilindro $\mathcal{C} \subset \mathfrak{R}$, definido por

$$0 \leq t \leq a \qquad |X - X_0| \leq b$$

y sea

$$m = \underset{(t,X)\varepsilon\mathcal{C}}{máx} |F(t, X)|, \qquad h = mín\ (a, \frac{b}{m})$$

La diferencia de las dos integrales X^1, X^2, deberá satisfacer a

$$\frac{d\,p(t)}{dt} \leq \left| \frac{dX^1}{dt} - \frac{dX^2}{dt} \right| = |F(t, X^1) - F(t, X^2)| \leq 2\,m$$

de donde por integración entre 0 y t

$$p(t) \leq 2\,m\,t \leq 2mh \tag{2.1}$$

Esta acotación puede mejorarse fácilmente si se suponen algunas hipótesis adicionales sobre la función F. Es sabido, por ejemplo, que si se impone la condición de LIPSCHITZ, se obtiene la unicidad de la solución, es decir la acotación inmejorable $p(t) \equiv 0$. Supongamos ahora que se satisface la condición menos restrictiva (que no asegura la unicidad) :

$$|F(t, X^1) - F(t, X^2)| \leq k|X^1 - X^2|^\alpha \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{2.2}$$

('') BRAUER (1).

Con esta condición la diferencia de dos soluciones estará obligada a satisfacer a

$$\frac{dp}{dt} \leq kp^{\alpha}$$

de donde, si $p(t) \neq 0$ en algún intervalo $0 < t < \tau \leq h$

$$p^{-\alpha}\frac{dp}{dt} \leq k$$

e integrando entre 0 y t

$$p(t) \leq \Big[(1-\alpha)kt\Big]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \Big[(1-\alpha)kh\Big]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.3}$$

condición que se reduce a la (2.1) cuando $\alpha \to 0$, $k = 2m$.

En cambio, si en (2.2) $\alpha \to 1$ y k permanece acotado, es decir se satisface la condición de LIPSCHITZ, (2.2) con $\alpha = 1$, el último miembro de (2.3) tiende a

$$\lim_{\alpha=1}\Big[(1-\alpha)\ kt\Big]^{\frac{1}{1-\alpha}} = \lim_{\beta=+0}\ (\beta kt)^{\frac{1}{\beta}} = 0$$

con lo cual $p(t) \equiv 0$ y puede asegurarse la unicidad.

Si la condición (2.2) se satisface para cualquier α de cierto intervalo $\alpha_0 < \alpha < 1$, pero se considera k variable con α, $\lim\limits_{\alpha=1} k(\alpha) = +\infty$, podrá también asegurarse la unicidad siempre que

$$\lim_{\alpha=1}\Big[(1-\alpha)\ hk(\alpha)\Big]^{\frac{1}{1-\alpha}} = \lim_{\beta=+0}\Big[\beta hk(1-\beta)\Big]^{\frac{1}{\beta}} = 0$$

luego $k(\alpha)$ ha de ser de un orden de infinitud inferior al de

$$k(1-\beta) = o\left([\beta h]^{-\frac{1}{\beta}}\right)_{\beta=+0}$$

Con ligero cambio de notaciones obtenemos pues:

TEOREMA I. *La solución del problema* (1.1) *es única siempre que se satisfaga una condición del tipo*

$$|F(t, X^1) - F(t, X^2)| \leq \frac{|X^1 - X^2|^{1-\beta}}{\mu(\beta)}, \quad \begin{matrix} 0<\beta<\beta_0 \\ 0 \leq t \leq h \end{matrix} \tag{2.4}$$

donde $\mu(\beta)$ *es una función positiva en el intervalo* $0 < \beta < \beta_0$ *y sujeta a la condición*

$$\lim_{\beta=+0}\left[\frac{h\beta}{\mu(\beta)}\right]^{\frac{1}{\beta}} = 0 \tag{2.5}$$

Si $\mu(\beta)$ está acotada inferiormente se obtiene la clásica condición de LIPSCHITZ ; pero aunque sea

$$\lim_{\beta=+0} \mu(\beta) = 0$$

puede también afirmarse la unicidad, y se obtiene una condición suficiente menos restrictiva que aquélla.

En particular, bastará elegir $\mu(\beta)$ de forma que $\mu^{\frac{1}{\beta}}$ sea un infinitéssimo en $\beta = 0$, de orden inferior al de $h^{\frac{1}{\beta}}\, \beta^{\frac{1}{\beta}}$, es decir, que sea por ejemplo

$$\mu = (h + c^2)\, \beta$$

puesto que entonces (2.5) queda satisfecha por ser

$$\lim_{\beta=+0} \left[\frac{h\beta}{(h + c^2)\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}} = 0$$

La condición (2.4) correspondiente a esta elección de μ se escribe

$$|F(t, X^1) - F(t, X^2)| \leq \frac{|X^1 - X^2|^{1-\beta}}{(h + c^2)\,\beta}, \; 0 < \beta < \beta^0 \qquad (2.6)$$

En particular esta condición quedará satisfecha siempre que se satisfaga la condición obtenida sustituyendo el segundo miembro de (2.6) por el mínimo de la función de β que en él aparece, es decir el mínimo de la función

$$g(\beta) = \frac{|X^1 - X^2|^{1-\beta}}{(h + c^2)\,\beta}$$

que corresponde a

$$\frac{1}{\beta} = - \log |X^1 - X^2|$$

siempre que se mantenga $|X^1 - X^2| < 1$ (lo que puede conseguirse siempre disminuyendo si es preciso el valor de h), y la condición que se obtiene, suficiente para la unicidad, es entonces

$$|F(t, X^1) - F(t, X^2)| \leq \frac{1}{(h + c^2)} |X^1 - X^2|^{1 + \frac{1}{\log |X^1 - X^2|}} \log \frac{1}{|X^1 - X^2|} \qquad (2.7)$$

Otras condiciones suficientes de unicidad parecidas a las (2.5), (2.6) y (2.7) podrían obtenerse por métodos parecidos partiendo de condiciones en la función $F(t, X)$ del tipo de la (2.2) u otras semejantes, pero en realidad, tales condiciones de unicidad pueden obtenerse por razonamientos directos, formulados por diversos autores (véanse los más importantes y la bibliografía en WALTER (5).

3. ESTUDIO DEL CASO GENERAL. Dado el sistema diferencial (1.1), consideramos un recinto cónico $\mathcal{K}$ definido por las condiciones

$$0 \leq t \leq h \qquad |X - X_0| \leq mt \qquad |F(t, X)| \leq m \tag{$\mathcal{K}$}$$

Construyamos en este dominio $\mathcal{K}$ la función

$$g(t, d) = \max_{X^i \varepsilon C} |F(t, X^1) - F(t, X^2)|$$

en donde designamos por $C = C(t, d)$ el compacto definido por

$$|X^i - X_0| \leq mt, \; i = 1,2\,; \quad |X^1 - X^2| \leq d \tag{$C(t, d)$}$$

La función $g(t, d)$ posee las siguientes propiedades:

a) está definida en el triángulo $\mathcal{T}$

$$0 \leq t \leq h \qquad 0 \leq d \leq 2\,mt \tag{$\mathcal{T}$}$$

b) es no negativa y acotada $0 \leq g(t, d) \leq 2m$ con $g(t, 0) = 0$ para $0 \leq t \leq h$.

c) monótona respecto d, pues al aumentar esta variable, se toma máximo en un nuevo recinto que contiene al anterior.

d) continua respecto al par de variables t, d en $\mathcal{T}$. En efecto

$$|g(t, d) - g(\bar{t}, \bar{d})| \leq |g(t, d) - g(\bar{t}, d)| + |\, g(\bar{t}, d) - g(\bar{t}, \bar{d})|$$

y cada uno de los sumandos del segundo miembro puede hacerse menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ con tal de restringir el incremento de las variables, y la acotación del segundo sumando puede hacerse uniformemente respecto de $\bar{t}$. Basta para verlo, observar que

$$|F(t, X^1) - F(t, X^2)| \tag{3.1}$$

es función uniformemente continua de t, X^1, X^2, en el compacto

$$0 \leq t \leq h, \qquad |X^i - X^0| \leq mt, \; i = 1, 2,$$

y por tanto

$$|F(t, X^1) - F(t, X^2)| < |F(\bar{t}, X^1) - F(\bar{t}, X^2)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

para $|t - \bar{t}| < \eta$, η conveniente. Elegidos X^1, X^2, para que se obtenga el máximo en $C(t, d)$ del primer miembro, será

$$g(t, d) < |F(\bar{t}, X^1) - F(\bar{t}\; X^2)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

donde a X^1, X^2 corresponde cierto valor de $|X^1 - X^2| \leq d$; por tanto con mayor razón si tomamos máximo en el 2.º miembro

$$g(t, d) < g(\bar{t}, d) + \frac{\varepsilon}{2}$$

y análogamente cambiando entre sí t, $\bar{t}$, luego

$$|g(t, d) - g(\bar{t}, d)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Análogamente, por la continuidad uniforme de la función (3.1), será

$$|F(\bar{t}, X^1) - F(\bar{t}, X^2)| \leq |F(\bar{t}, \bar{X}^1) - F(\bar{t}, \bar{X}^2)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

con tal que $|X^1 - \bar{X}^1| \leq \delta$, $|X^2 - \bar{X}^2| \leq \delta$, δ conveniente. Tomemos como antes en el primer miembro las X^1, X^2, que dan el máximo y obtendremos

$$g(\bar{t}, d) \leq |F(\bar{t}, \bar{X}^1) - F(\bar{t}, \bar{X}^2)| + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.2}$$

Elijamos ahora

$$\bar{X}^1 = X^1 + \frac{X^2 - X^1}{|X^2 - X^1|}\,\delta \qquad \bar{X}^2 = X^2 + \frac{X^1 - X^2}{|X^2 - X^1|}\,\delta$$

con lo que se cumple $|\bar{X}^1 - X^1| = |\bar{X}^2 - X^2| = \delta$ y como consecuencia también se satisface la última desigualdad, y además

$$|\bar{X}^1 - \bar{X}^2| = \left|(X^1 - X^2)\left(1 - \frac{2\delta}{|X^2 - X^1|}\right)\right| \leq d - 2\delta$$

y tomando máximo en el segundo miembro de (3.2) para $|\bar{X}^1 - \bar{X}^2| \leq d - 2\delta$ resulta

$$g(\bar{t}, d) < g(\bar{t}, d - 2\delta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

y en virtud de la monotonía, en definitiva

$$|g(\bar{t}, d) - g(\bar{t}, d - 2\delta)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{c.q.d.}(')$$

(') En general, puede afirmarse : Si una función es continua en un compacto K, la función obtenida tomando el máximo de la anterior en un conjunto cerrado C variable, $C \subset K$, es a su vez función continua de la posición del conjunto C, es decir, su valor cambia en menos de ε, con tal que la desviación de los dos conjuntos cerrados sobre los que se toma máximo sea suficientemente pequeña : $\max_{x \in C} \min_{y \in C'} D(x, y) < \delta$.

Sean ahora dos integrales $X^1(t)$, $X^2(t)$, del problema (1.1), y consideremos la función escalar

$$p(t) = |X^1(t) - X^2(t)|$$

que verificará las acotaciones:

$$\frac{dp}{dt} \leq \left| \frac{dX^1}{dt} - \frac{dX^2}{dt} \right| = |F(t, X^1) - F(t, X^2)| \leq g(t, |X^1 - X^2|)$$

es decir, $p(t)$ satisface a la desigualdad diferencial

$$\frac{dp}{dt} \leq g(t, p(t)) \tag{3.3}$$

Consideremos simultáneamente la ecuación diferencial

$$\frac{dq}{dt} = g(t, q) \tag{3.4}$$

La existencia de soluciones de esta ecuación está asegurada en todo el intervalo $0 \leq t \leq h$, en virtud de las propiedades b), d), y de resultados conocidos (KAMKE (6)). Se puede entonces obtener una acotación de $p(t)$ mediante el teorema que sigue, que es una consecuencia de los resultados obtenidos por VISWANATHAM y OPIAL (2).

TEOREMA II. *Si X^1, X^2, son dos integrales de* (1.1), *y $q(t)$ es la integral superior de* (3.4) *con* $q(0) = 0$, *se verifica*

$$|X^1(t) - X^2(t)| \leq q(t) \tag{3.5}$$

Demostración: Extendamos la función $g(t,q)$ a toda la banda $0 \leq t \leq h$, definiendo la función

$$\bar{g}(t,q) = \begin{cases} g(t,q) & \text{si } 0 \leq q \leq 2mt \\ 0 & \text{si } q \leq 0 \\ g(t,2mt) & \text{si } q \geq 2\,mt \end{cases}$$

con lo que $\bar{g}(t, q)$ es acotada y uniformemente continua, y su restricción a $\mathscr{C}$ coincide con $g(t, q)$.

Sea ahora $q(t, \varepsilon)$ la integral superior de

$$q' = \bar{g}(t, q) \qquad q(0, \varepsilon) = \varepsilon \tag{3.6}$$

con lo que

$$q(t, \varepsilon) = \varepsilon + \int_0^t \bar{g}(t, q(t, \varepsilon))\, dt \tag{3.7}$$

A su vez de la desigualdad (3.3)

$$p(t) \leq \int_0^t g(t, p(t))\, dt \tag{3.8}$$

Por sustracción de (3.7), (3.8)

$$p(t) - q(t, \varepsilon) \leq - \varepsilon + \int_0^t [g(t, p(t)) - \bar{g}(t, q(t, \varepsilon))]\, dt \tag{3.9}$$

y en particular para $t = 0$

$$- q(0, \varepsilon) \leq - \varepsilon < 0$$

Veamos que en general es

$$p(t) - q(t, \varepsilon) < 0 \tag{3.10}$$

Porque en caso contrario existiría $t_0 > 0$ tal que

$$p(t_0) - q(t_0, \varepsilon) = 0 \tag{3.11}$$

y en cambio se verificaría (3.10) para $0 \leq t < t_0$. Luego, en virtud de la monotonía de g, en este mismo intervalo es

$$g(t, p(t)) \leq \bar{g}(t, q(t, \varepsilon))$$

y escribiendo (3.9) para $t = t_0$

$$p(t_0) - q(t_0, \varepsilon) \leq - \varepsilon + \int_0^{t_0} [g(t, p(t)) - \bar{g}(t, q(t, \varepsilon))]\, dt \leq - \varepsilon$$

lo que está en contradicción con (3.11). Luego se verifica (3.10) para $0 \leq t \leq h$. El razonamiento prueba además que el primer miembro de (3.10) es una función monótona no creciente.

Haciendo tender ahora $\varepsilon \to 0$, se verifica (¹)

$$q(t, \varepsilon) \to q(t, 0) \qquad 0 \leq t < h$$

y tomando límites en (3.10) $p(t) \leq q(t, 0)$ es decir, (3.5) c.q.d.

Como corolario del anterior teorema II, obtenemos el siguiente criterio de unicidad:

TEOREMA III. *Dado el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X) \tag{3.12}$$

(¹) Véase MONTEL (3) pág. 207, y también KAMKE (2) para la generalización a sistemas en la medida de lo posible.

en el que $F(t, X)$ *es función continua de* (t, X) *en el compacto*

$$|t| \leq h, \quad |X - X_0| \leq mt$$

en el que se verifica $|F(t, X)| \leq m$

Si la ecuación diferencial

$$\frac{dq}{dt} = g(t, q) \tag{3.13}$$

donde $g(t, q) = \max\limits_{\substack{|X^1 - X_0| \leq mt \\ |X^1 - X^1| \leq q}} |F(t, X^1) - F(t, X^2)|$

admite la sola función idénticamente nula como única integral que pasa por el origen, entonces la solución del sistema diferencial (3.12) *que satisface a las condiciones iniciales* $X(0) = X_0$ *es única en todo el intervalo* $0 \leq t \leq h$.

Basta aplicar el teorema II, teniendo en cuenta que ahora, por hipótesis, la integral superior de (3.13) es la $q \equiv 0$, y de la desigualdad (3.5) se obtiene $X^1(t) \equiv X^2(t)$ c.q.d.

El teorema III nos muestra cómo las condiciones suficientes de unicidad tienen un carácter local, es decir, si se expresan por alguna acotación de la diferencia

$$|F(t, X^1) - F(t, X^2)|$$

bastará que tal acotación se satisfaga para valores de X^1, X^2, suficientemente próximos, es decir en algún dominio $|X^1 - X^2| < \delta$ para algún $\delta > 0$. Por ejemplo, la condición de LIPSCHITZ se satisface siempre para $|X^1 - X^2| \geq \delta$ puesto que entonces

$$\frac{|F(t, X^1) - F(t, X^2)|}{|X^1 - X^2|} \leq k = \frac{2m}{\delta}$$

Lo mismo puede decirse del criterio de OSGOOD ('), y en general de los restantes criterios de unicidad. Pero el teorema III impone condiciones, no ya en un entorno $|X^1 - X^2| < \delta$, sino tan solo en los puntos en que $|X^1 - X^2| = 0$. Sería interesante el comprobar con algún ejemplo, si tal criterio de unicidad es efectivamente menos restrictivo que los restantes.

(') Véase WALTER (5) nota 1) al pie de pág. 192.

BIBLIOGRAFÍA

(1.) BRAUER, F. *Some results on uniqueness and successive approximations.* Canadian Journal of Mathematics XI-4 (1959), pág. 527.

(2.) KAMKE, E. *Zur theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen II.* Acta Mathematica 58 (1932), pág. 57-85.

(3.) MONTEL, P. *Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle.* Bulletin des Sciences Mathématiques 50 (1926), páginas 205-217.

(4.) OPIAL, Z. *Sur un système d'inégalités intégrales.* Annales Polonici Mathematici, III, 2 (1957) pág. 200-209.

(5.) WALTER, W. *Eindeutigkeitsätze für gewöhnliche, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen.* Mathematische Zeitschrift 74 (1960) pág. 191-208.

(6.) KAMKE, E. *Zur Theorie der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$. Acta Mathematica 52 (1928) pág. 327-339.