

# L'UNIVERSO DI DE SITTER E L'ASTROFISICA

per

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a ROMA)

## 1 — LA COSMOLOGIA RELATIVISTA

È noto che la cosmologia relativista viene costruita a partire dalla relatività generale e dalle equazioni gravitazionali di Einstein [1]. Se si suppone che lo spazio fisico tridimensionale sia omogeneo, isotropo ed indipendente dal tempo, si può introdurre un «tempo cosmico»  $(t)$ , e la metrica assume la forma di Robertson

$$(1,1) \quad d s^2 = c^2 d t^2 - R^2(t) d \sigma^2$$

dove  $R(t)$  è una funzione numerica positiva, che prende il nome di «fattore di scala»,  $d \sigma^2 > 0$  è la metrica di una  $V_3$  riemanniana a curvatura costante

$$(1,2) \quad d \sigma^2 = (d \varrho^2 + \varrho^2 d \theta^2 + \varrho^2 \sin^2 \theta d \varphi^2) / (1 + \varepsilon \varrho^2 / 4)^2$$

ed  $\varepsilon$  può assumere uno dei tre valori  $(-1, 0, +1)$ . Se  $\varepsilon = 0$ , lo spazio è euclideo, *piatto* ed infinito; per  $\varepsilon = +1$ , esso risulta sferico *chiuso* e finito, mentre per  $\varepsilon = -1$  sarà iperbolico, *aperto* ed infinito.

Come è stato dimostrato indipendentemente nel 1936, da Robertson e Walker, la metrica (1) può essere costruita senza ricorrere a tutti gli assiomi specifici della relatività generale, e basandosi su altri assiomi estranei a tale teoria.

Dalla metrica di Robertson, senza ricorrere ad altre ipotesi, e prima ancora di determinare  $\varepsilon$  ed  $R(t)$ , si possono definire alcune notevoli relazioni che stanno alla base del legame tra cosmologia teorica ed osservazione astronomica.

Si può infatti dimostrare che la legge velocità-distanza, valida nei modelli di Universo di metrica (1), è la seguente

$$(1,3) \quad \mathbf{V} = H(t) \mathbf{x} \quad \text{con} \quad H(t) = \dot{R}/R$$

cioé la costante di Hubble  $H(t)$  é indipendente da  $x$ , ma dipende dal tempo.

Se poi indichiamo con  $\lambda$  la lunghezza dell'onda emessa da una sorgente in un sistema di riferimento, in cui la sorgente é in quiete, e  $\Delta\lambda$  lo spostamento osservato dall'osservatore 0, il «red-shift» (spostamento verso il rosso) é dato da  $z = \Delta\lambda/\lambda$ , e si ottiene la semplice relazione

$$(1,4) \quad \boxed{\frac{\nu_1}{\nu_2} = 1 + z = \frac{R(t_2)}{R(t_1)}}$$

cioé la frequenza osservata ( $\nu_2$ ) e quella emessa ( $\nu_1$ ) stanno nel rapporto inverso dei fattori di scala dell'Universo al momento della osservazione ed a quello nel momento della emissione.

Se la sorgente che si osserva é vicina, allora  $t_2$  differisce poco da  $t_1$  e quindi si ha  $t_1 = t_2 - dt$ . Ne segue che

$$(1,5) \quad 1 + z = \frac{R(t_2)}{R(t_2 - dt)} \simeq 1 + dt \frac{\dot{R}(t_2)}{R(t_2)}$$

Poiché, per piccoli valori di  $z$ , la formula classica dell'effetto Doppler ( $z = V/c$ ) rappresenta una buona approssimazione, si ha, tenuto conto della (3)

$$(1,6) \quad V = cz = c dt H(t_2) = H(t_2) dx$$

e cioè la legge lineare di Hubble.

Per  $z$  grande, non si può utilizzare questa approssimazione, perché nella relatività ristretta vale la nuova formula

$$(1,7) \quad \boxed{1 + z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}}$$

che si riduce, in prima approssimazione alla formula classica.

Dalla (7) si deduce il valore della velocità di fuga espressa in funzione del red-shift

$$(1,8) \quad V = \frac{(1 + z)^2 - 1}{(1 + z)^2 + 1} c \leq c$$

Ne segue che per un quasar, con il red-shift  $z = 2$ , si avrà una velocità di fuga  $V = 8c/10 = 0,8c$ , mentre se  $z$  tende all'infinito, si ha  $V = c$ .

In effetti, la (7) non è più valida alle grandi distanze, nelle quali interviene la curvatura dell'Universo, e quindi nulla possiamo dire sulla velocità di fuga. Come ben osserva lo Sciama [2], se si conosce di un oggetto solo il red-shift, non si sa molto su di esso, se è sconosciuta la funzione  $R(t)$  del nostro Universo. Tutto ciò che si può dire è che quando la radiazione fu emessa, l'Universo era più contratto di quanto non lo sia adesso, di un fattore  $(1+z)$ , in modo che la densità era maggiore di quella attuale, di un fattore  $(1+z)^3$ . Per  $z = 2$ , questo fattore è 27, il che è molto.

Per determinare la funzione  $R(t)$ , occorre supporre che lo spazio-tempo sia riempito di un fluido perfetto descritto dal tensore

$$(1,9) \quad T_{ik} = (\mu + p/c^2) u_i u_k + p \delta_{ik}$$

ed allora le equazioni gravitazionali, con il termine cosmologico

$$(1,10) \quad R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda g_{ik} = \chi T_{ik}$$

se si tiene conto della metrica (1), ci danno le equazioni di Friedmann

$$(1,11) \quad \begin{cases} \chi \mu = 3(\varepsilon + \dot{R}^2)/c^2 R^2 - \Lambda \\ \chi p/c^2 = \Lambda - (2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + \varepsilon)/c^2 R^2 \end{cases}$$

dalle quali, nel caso in cui la pressione è nulla ( $p = 0$ ) si ricava la seguente equazione differenziale

$$(1,12) \quad R \dot{R}^2 = R_1 - \varepsilon R + c^2 \Lambda R^3/3$$

dove  $R_1$  è una costante, ed a partire da tale equazione si ottengono i vari modelli di Universo della cosmologia relativista.

Se si potesse determinare per via sperimentale la legge effettiva della espansione cosmica, si potrebbe risalire alla  $R(t)$  del nostro Universo. Ma poiché noi vediamo una galassia non solo lontana nello spazio, ma anche nel tempo, la valutazione della distanza richiede a sua volta la conoscenza della funzione  $R(t)$ , e quindi si cade in un circolo vizioso, dal quale è difficile uscire. Come ha ben messo in

evidenza J. Merleau-Ponty [3], non si può raggiungere una determinazione completa della soluzione della (12) né attraverso la teoria, né attraverso l'esperienza, finché ci si limita alle ipotesi di Robertson. Si ha in conseguenza una fondamentale indeterminazione della cosmologia relativista.

## 2 — TEORIA DEI GRUPPI E COSMOLOGIA

Per superare questa difficoltà della cosmologia relativista, il Milne nel 1932 e successivamente Bondi e Gold nel 1948, si proposero di giungere ad un modello di Universo ben determinato, partendo da ipotesi di carattere generale.

Il Milne costruiva la sua «relatività cinematica» [4], supponendo la validità di un «principio cosmologico», e facendo la ipotesi di una espansione cosmica con velocità di fuga radiale e proporzionale alla distanza ( $V = x/t$ ). La teoria di Milne però, pur introducendo alcune importanti idee in cosmologia, come la doppia scala dei tempi e la distinzione tra spazio «pubblico» e spazi «privati», non risulta soddisfacente sia dal punto di vista matematico che fisico.

Nella «cosmologia stazionaria» di Bondi e Gold [5] si postula invece un «principio cosmologico perfetto», e si deve allora ammettere che, perché l'Universo conservi lo stesso aspetto, nonostante l'espansione, ci sia una «creazione continua» di nuova materia dal nulla. Ma anche questa teoria risulta in contrasto con i più recenti risultati sperimentali, come per esempio la esistenza di una radiazione di fondo, che sarebbe l'eco del Big-Bang.

Anche le cosmologie a priori hanno fallito loro scopo, e questo perché si proponevano di giungere ad un modello di universo *definitivo*, cosa che precluderebbe ogni ulteriore sviluppo della fisica.

Non meno deludente è il risultato delle pazienti ricerche fatte per costruire una «teoria unitaria» della materia e della elettricità. Non è stato in alcun modo possibile costruire una teoria unitaria del campo che possedesse una effettiva portata fisica, e tali ricerche si sono polverizzate in tutta una serie di teorie, nessuna delle quali è pienamente soddisfacente.

Possiamo quindi concludere che il problema cosmologico e quello unitario, che sono stati affrontati indipendentemente l'uno dall'altro, non hanno portato a dei risultati convincenti. Occorre quindi seguire una via del tutto nuova, che ristabilendo il legame tra questi due problemi, ci conduca a teorie non più indeterminate ed arbitrarie.

Questa nuova via ci é stata indicata nel 1952 dal Fantappié, il quale con la sua «teoria degli Universi fisici» [6] ha messo in rilievo quale profondo legame esista tra il concetto di *Universo*, concepito come un sistema «ordinato», e quindi retto da leggi fisiche uniche, e la teoria dei gruppi. Il Fantappié presentava la sua teoria come lo studio degli Universi «possibili», ognuno dei quali é individuato da un gruppo di Lie  $G^r$  ad  $r$  parametri, e quindi a prima vista potrebbe sembrare che essa non sfugga alla indeterminazione delle precedenti ricerche sulla cosmologia e sulle teorie unitarie.

Ma in effetti non é così. Infatti, se ci limitiamo a considerare i gruppi  $R_n$  delle rotazioni dello spazio ad  $n$  dimensioni ( $n = 5, 6, \dots$ ), otteniamo tutta una serie di «modelli di Universo» rappresentati dalle ipersfere a  $4, 5, \dots, n - 1$  dimensioni, ognuno dei quali contiene i precedenti ed é contenuto nei successivi. Tali modelli possono quindi essere interpretati come *successive approssimazioni* della fisica, e ad ogni numero intero ( $n$ ) corrisponde un modello di Universo ben determinato. Si ottiene così una classificazione dei modelli analoga a quella degli elementi chimici (*Tavola di Mendeleev*), nella quale ad ogni numero intero (*numero atomico*) corrisponde un atomo.

Per  $n = 5$  si ottiene allora la «relatività proiettiva» [7], basata sul gruppo di Fantappié a 10 parametri, che rappresenta i movimenti in sé di una ipersfera a quattro dimensioni, di  $S_5$ . Essa ci fornisce un primo legame tra materia ed elettricità, perché le equazioni elettromagnetiche e quelle idrodinamiche ci appaiono riunite in una teoria unica. Si ottiene così una semplice sistemazione teorica della magnetoidrodinamica e della fisica del plasma, le quali vengono strettamente connesse all'Universo di De Sitter ed alla problematica cosmologica.

Ma a differenza delle cosmologie a priori di Milne e di Bondi-Gold, questo modello non é quello definitivo, perché esso é perfezionabile nella «relatività conforme», che si ottiene per  $n = 6$ , ed il cui gruppo a 15 parametri é isomorfo a quello delle rotazioni di  $S_6$ , e così via. In tal modo noi possiamo approssimarci alla realtà fisica, mediante una serie di successivi modelli di Universo.

### 3 — LA LEGGE DI ESPANSIONE COSMICA

Come ho fatto vedere in una mia memoria del 1960 [8], a partire dal gruppo di Fantappié si può ricavare la legge di espansione cosmica. Infatti, quando si passa da un osservatore 0 ad un secondo osservatore

$0'$ , distante nel tempo di  $T_0$ , la velocità  $V$  di un corpo, posto nel punto  $P(x, y, z, t)$ , rispetto ad  $0$ , varia nel seguente modo

$$(3,1) \quad \boxed{\vec{V}' \sqrt{1 - \gamma^2} = \vec{V} (1 + \gamma t/t_0) - \gamma \vec{x}/t_0}$$

dove  $\gamma = T_0/t_0 = c T_0/r$ .

Per ottenere da tale formula la legge di *espansione* cosmica, poniamoci nel caso in cui  $T_0 = t_0$ , cioè  $\gamma = +1$ , ed avremo

$$(3,2) \quad \vec{V} = H(t) \vec{x} \quad \text{con} \quad H(t) = 1/(t_0 + t)$$

Tale formula vale per  $-t_0 \leq t \leq 0$ , e ci dice che per  $t = -t_0$ , la  $H(t)$  diventa infinita, mentre si riduce al valore  $H = 1/t_0 = c/r$  per  $t = 0$ . Ne segue che passando da  $t = -t_0$  (*singolarità iniziale*) al valore  $t = 0$  (istante presente) si avrà una espansione che tende a rallentare, perché la  $H(t)$  passa da infinito ad  $1/t_0$ .

Se invece nella (1) poniamo  $T_0 = -t_0$  cioè  $\gamma = -1$ , si ottiene una legge di *contrazione*, cioè

$$(3,3) \quad \vec{V} = -H(t) \vec{x} \quad \text{con} \quad H(t) = 1/(t_0 - t)$$

Tale formula vale per  $0 \leq t \leq +t_0$ , e ci dice che per  $t = +t_0$  la  $H(t)$  diventa di nuovo infinita. Se ne deduce che passando da  $t = 0$  (presente) a  $t = +t_0$ , l'Universo subisce un collasso e si ridurrà ad un punto (*singolarità finale*). È importante notare che tale collasso (apparente) non è di natura gravitazionale, perché non intervengono le equazioni gravitazionali.

Se poi ci riferiamo ad una galassia  $G$ , e scegliamo l'asse delle  $x$  sulla retta  $OG$  che congiunge l'osservatore  $0$  con la galassia, possiamo osservare che se la galassia è lontana nello spazio di  $x$ , essa sarà lontana nel tempo di  $t = -x/c$  ed allora la (2) si può scrivere così

$$(3,4) \quad \boxed{V = \frac{\alpha c}{1 - \alpha} = \frac{c x}{r - x}}$$

Ne segue che in base a questa legge di espansione cosmica, la velocità di fuga raggiunge il valore  $V = c$  per  $x = r/2$ , mentre per  $x > r/2$  la velocità di fuga (apparente) è iper- $c$ , e diventa infinita per  $x = r$ . Appare così un «orizzonte spaziale» per  $x = r$ ,

È facile dimostrare che pur potendo superare la velocità della luce, la linea oraria della galassia  $G$ , rimane di genere tempo, cioè la sua tangente nel punto  $G$  rimane nel cono luce uscente da quel punto. Sappiamo infatti [8] che perché la tangente alla linea oraria sia di genere tempo, occorre che la velocità di fuga sia compresa tra i due valori

$$(3,5) \quad -c \leq V \leq +c \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}$$

e tale formula, al limite relativistico ( $r \rightarrow \infty$ ) si riduce alla  $-c \leq V \leq +c$  valida nella relatività ristretta. Questa disuguaglianza è soddisfatta dalla velocità (4), perché si ha

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} \leq \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \quad \text{cioé} \quad \alpha + \alpha^2 \leq 1 + \alpha^2$$

e quindi  $\alpha \leq 1$ . Ne segue che *per*  $x \leq r$ , *la linea oraria della galassia è di genere tempo*, anche se la sua velocità di fuga diventa iper- $c$ .

Per finire ricordiamo che nella relatività proiettiva vale la seguente legge di variazione della massa

$$(3,6) \quad m = \frac{m_0 (1 + \alpha^2 - \gamma^2)}{\sqrt{(1 + \alpha^2 - \gamma^2) (1 - \beta^2) + (\vec{\alpha} \times \vec{\beta} - \gamma)^2}}$$

Ora, la legge di espansione (2), si scrive così, in forma adimensionale

$$(3,7) \quad \vec{\beta} = \vec{\alpha} / (1 + \gamma)$$

con  $\alpha = x/r$ ,  $\beta = V/c$  e  $\gamma = t/t_0$ . Sostituendo tale valore nella (6), avremo

$$m = \frac{m_0 (1 + \alpha^2 - \gamma^2) (1 + \gamma)}{\sqrt{(1 + \alpha^2 - \gamma^2) (1 + \gamma^2 + 2\gamma - \alpha^2) + (\alpha - \gamma - \gamma^2)^2}}$$

Eseguito i calcoli, l'espressione sotto radice vale  $(1 + \gamma)^2$ , e quindi essa si riduce alla,

$$(3,8) \quad m = m_0 (1 + \alpha^2 - \gamma^2)$$

Se poi ci riferiamo ad una galassia lontana nello spazio di  $x$ , e nel tempo di  $t = -x/c$ , si avrà  $\alpha = -\gamma$ , e la precedente si riduce alla  $m = m_0$ . Ne segue che nella relatività proiettiva, l'aumento di massa dovuto alla velocità di fuga, compensa esattamente la diminuzione di massa dovuta alla distanza spazio-temporale, come nella teoria di Milne.

Dalla (8) si deduce poi, che per uno spostamento nel tempo di  $T_0$ , si ha  $\alpha = 0$ , e quindi

$$(3,9) \quad m = m_0 (1 - \gamma^2)$$

Ne segue che passando da  $t = -t_0$  a  $t = +t_0$ , si ha prima un aumento di massa (*creazione continua*), per  $t = 0$  (istante presente) si ha  $m = m_0$ , e poi si ha una diminuzione di massa (*annichilazione continua*). Negli istanti iniziale e finale, si ha  $m = 0$ .

#### 4 — L'EFFETTO DOPPLER PROIETTIVO

Come abbiamo visto al n.º 1, la formula relativistica (1,7) dell'effetto Doppler richiede che per  $V = c$ , si abbia  $z$  infinito. Però tale formula non è più valida nella relatività proiettiva, nella quale sono possibili velocità iper- $c$ . Questo è stato confermato dal fatto che, nel 1971 I. Shapiro ed altri [9], usando dei metodi interferometrici, hanno messo in evidenza che due frammenti del quasar 3C-279 si allontanano tra loro a velocità  $10c$ .

Occorre quindi ricavare, a partire dal gruppo di Fantappiè, una nuova formula dell'effetto Doppler, valida per le grandi distanze, e che sia compatibile con la legge (3,7) di fuga. A tale scopo procediamo come nella relatività ristretta, ed osserviamo che un'onda luminosa piana monocromatica è caratterizzata da una funzione «fase», così definita

$$(4,1) \quad \Phi = \vec{k} \times \vec{r} - \omega t + \theta$$

dove si è indicato con  $\vec{k} = \omega \vec{n}/c$  il *vettore d'onda*, con  $\omega$  la *frequenza*, con  $\vec{n}$  il versore della direzione di propagazione e con  $\theta$  la *fase* dell'onda.

Se introduciamo il vettore d'onda  $k_A$  ( $A = 1,2..5$ ) di  $S_5$ , nel seguente modo

$$(4,2) \quad k_\alpha = n_\alpha \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\theta^2}{r^2}}; k_4 = i \frac{\omega}{c}; k_5 = \frac{\theta}{r}$$

con  $\alpha = 1, 2, 3$ , la (1) si può scrivere così

$$(4,3) \quad \boxed{\phi = k_A \bar{x}_A}$$

e si avrà, per le (2)

$$(4,4) \quad k_A k_A = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\theta^2}{r^2} = 0$$

Se allora poniamo

$$(4,5) \quad \varphi = A_0 \sin(k_A \bar{x}_A) = A_0 \sin \phi$$

avremo, derivando

$$\bar{\partial}_A \varphi = A_0 k_A \cos \phi; \quad \bar{\partial}^2_A \varphi = -A_0 k_A k_A \sin \phi$$

e quindi per la (4) segue che

$$(4,6) \quad \square * \varphi = \bar{\partial}_A \bar{\partial}_A \varphi = 0$$

Per trovare la legge con cui si trasformano la frequenza e la fase dell'onda, utilizzeremo le trasformazioni del gruppo di Fantappié, con i tre parametri  $(T, T_0, V)$ , che abbiamo stabilito nel 1960 [8]:

$$(4,7) \quad \begin{cases} AB \bar{x}'_1 = A \bar{x}_1 - i[\beta + (\alpha - \beta\gamma)\gamma] \bar{x}_4 + B T \bar{x}_5 \\ AB \bar{x}'_4 = i A \beta \bar{x}_1 + [1 + \alpha(\alpha - \beta\gamma)] \bar{x}_4 + i B T_0 \bar{x}_5 \\ AB \bar{x}'_5 = (\beta\gamma - \alpha) A \bar{x}_1 - i(\gamma - \alpha\beta) \bar{x}_4 + B \bar{x}_5 \end{cases}$$

dove abbiamo posto per brevità

$$(4,8) \quad A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2; \quad B^2 = 1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2$$

Riferiamoci poi al caso in cui nel primo riferimento  $\theta = 0$ , mentre il vettore  $k$  è diretto lungo l'asse delle  $x$ . Esso avrà allora la sola componente  $k_1 = (\omega \cos \psi)/c$ , dove abbiamo indicato con  $\psi$  l'angolo (misurato nel primo sistema) tra la direzione di emissione dell'onda e la direzione del moto della sorgente.

Osservando che il vettore  $k_A$  di  $S_5$ , le cui componenti sono date dalle (2), si trasforma come le coordinate proiettive omogenee  $\bar{x}_A$ ,

ne deduciamo subito le leggi di trasformazione delle componenti  $k_4$  e  $k_5$

$$(4,9) \quad \boxed{\begin{aligned} \omega' &= \omega [1 + A \beta \cos \psi + \alpha (\alpha - \beta \gamma)]/AB \\ \theta' &= \omega t_0 [(\beta \gamma - \alpha) A \cos \psi + (\gamma - \alpha \beta)]/AB \end{aligned}}$$

che ci danno le formule dell'effetto Doppler, valide nella relatività proiettiva.

#### 5 — IL «RED-SHIFT» PROIETTIVO

Le formule precedenti (4,9) si semplificano notevolmente, se ci riferiamo al caso più semplice di una sorgente luminosa  $S$  che si trova alla distanza  $x$  dall'osservatore, e che è lontana nel tempo di  $x/c$ .

Se la sua velocità è radiale di fuga, si ha  $\psi = 0$ , e scegliendo il riferimento con l'asse delle  $x$  diretto secondo la congiungente  $OS$  l'osservatore con la sorgente, allora la velocità  $V$  è positiva ( $V > 0$ ), la velocità  $c$  della luce è negativa ( $c < 0$ ), la  $x$  è positiva ( $x > 0$ ), il tempo è negativo ( $t < 0$ ), e si avrà in conseguenza

$$(5,1) \quad \alpha = x/r > 0 ; \beta = V/c < 0 ; \gamma = ct/r > 0 ; A = 1$$

Ponendo allora  $\alpha = +\gamma$ , la prima delle (4,9) diventa

$$\omega' = \omega \frac{1 - \beta + \alpha^2 (1 + \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2 + \alpha^2 (1 + \beta)}} = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \left(1 + \alpha^2 \frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)}$$

e semplificando otteniamo la seguente formula dell'effetto Doppler, valida nel caso in cui  $\theta = 0$  e  $\psi = 0$

$$(5,2) \quad \boxed{\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta} + \alpha^2}}$$

che generalizza su scala cosmica la formula relativistica (1,7).

Dalla seconda della (4,9) si deduce invece che si ha identicamente

$$(5,3) \quad \theta' = \omega t_0 [ -\alpha (\beta + 1) + \alpha (1 + \beta) ] = 0$$

Dalla (2) seguono alcune interessanti conseguenze. Nel caso in cui la sorgente  $S$  sta in quiete ( $\beta = 0$ ), avremo

$$(5,4) \quad \omega' = \omega \sqrt{1 + \alpha^2}$$

cioè si ha un effetto Doppler dovuto alla distanza. Se invece la sorgente  $S$  si allontana alla velocità della luce ( $\beta = 1$ ) si avrà

$$(5,5) \quad \omega' = \alpha\omega$$

cioè l'effetto Doppler è proporzionale alla distanza.

Se poi introduciamo il *red-shift*  $z$ , la (3) si scrive nel seguente modo

$$(5,6) \quad \boxed{\frac{1}{1+z} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta} + \alpha^2}}$$

Tale formula diventa estremamente semplice se ci riferiamo ad una galassia, od un quasar che si allontana da noi con la velocità di fuga (3,4) cioè

$$(5,7) \quad \beta = \alpha/(1 - \alpha)$$

Sostituendo tale valore di  $\beta$  nella (6), otteniamo la semplice formula del red-shift

$$(5,8) \quad \boxed{1+z = 1/(1-\alpha)}$$

da cui si deduce che  $z$  diventa infinito per  $\alpha = 1$ , cioè quando la velocità di fuga tende all'infinito. Se si tiene conto della (7), il secondo membro della (8) vale  $1 + \beta$ , e quindi ci riduciamo alla formula classica

$$(5,9) \quad \boxed{z = \beta}$$

*Su scala cosmica quindi, il red-shift è proporzionale alla velocità di fuga.* Ne segue che se una galassia od un quasar hanno il red-shift  $z$

dalle (7) e (9) possiamo calcolare sia la sua velocità di fuga che la sua distanza

$$(5.10) \quad V = c z ; x = r z / (1 + z)$$

Per esempio, per una quasar con  $z = 2$ , la sua velocità di fuga e la sua distanza da noi sono date da

$$(5.11) \quad V = 2 c ; x = 2 r / 3$$

Ne segue che per  $z = 1$ , si ha  $V = c$ , mentre per  $z > 1$ , la velocità di fuga (apparente) risulta iper- $c$ , in accordo con la legge di fuga (7), che è compatibile con le velocità iper- $c$ . La comparsa delle velocità iper- $c$  nella relatività proiettiva, deriva dal fatto che il cronotopo di Castelnuovo, nel quale noi localizziamo gli eventi fisici, è una immagine piana (e quindi deformata) del cronotopo di De Sitter a curvatura costante, sede effettiva degli eventi fisici.

#### 6 — QUASAR, TACHIONI, VELOCITÀ IPER-C

Come è noto, nella relatività ristretta, la velocità  $c$  della luce ci si presenta come una velocità limite, insuperabile, perché allora la massa di un corpo diventerebbe infinita. Se però passiamo alla fisica quantistica, nella quale l'energia cambia in modo discontinuo, e le particelle possono essere create o annichilate, si pone il problema della esistenza di particelle a velocità iper- $c$ , e cioè superiore a quella della luce.

Il problema è stato esaminato dal Feinberg nel 1967 [10], il quale ha mostrato che queste particelle (che egli chiama «tachioni»), possono esistere, purché si supponga che vengano create a coppie, già a velocità iper- $c$ . Solo così non sorge il problema di far loro superare la «barriera della luce», cioè di portarle a velocità iper- $c$ .

Ora, sin dal 1960 ho messo in evidenza che nella relatività proiettiva la velocità della luce non si presenta più come una velocità limite, insuperabile [8], in quanto per  $V = c$  la nuova formula (3,6) della massa, ci dà una massa che si mantiene finita

$$(6,1) \quad m = m_0 (1 + \alpha^2 - \gamma^2) / (\vec{\alpha} \times \vec{\beta} - \gamma)$$

Tornando ai tachioni, la loro velocità sarebbe sempre compresa tra  $c$  ed infinito, e la loro energia e quantità di moto sono date da

$$(6,2) \quad E = \frac{\mu_0 c}{\sqrt{\beta^2 - 1}}; \quad p = \frac{\mu_0 v}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \quad \text{con } m_0 = i \mu_0$$

Ne segue che i tachioni hanno una energia che diminuisce al crescere della loro velocità, cioè essi, quando vengono accelerati, perdono energia. Viceversa, se il tachione acquista energia, rallenta la sua velocità, la quale si avvicina alla velocità  $c$ , che per esso è una velocità limite inferiore. In particolare, se un tachione possiede una velocità infinita, la sua energia si annulla, mentre come risulta dalla (2), la sua quantità di moto si mantiene finita.

Recentemente il problema dei tachioni e delle loro proprietà fisiche, è stato ripreso dal punto di vista gruppale, e cioè ampliando il gruppo di Lorentz in modo da comprendere anche le velocità iper- $c$  [11]. È possibile allora avere un riferimento proprio anche per i tachioni, e la teoria dei tachioni può essere posta su basi logiche più rigorose.

Vediamo adesso come si presenta nella relatività proiettiva il problema dei tachioni, perché in tale teoria non è più possibile definire i tachioni, in base alla loro velocità iper- $c$ . Infatti abbiamo visto che adesso la velocità della luce non è più una velocità limite, ed un corpo lontano può avere velocità iper- $c$ , senza che la sua massa diventi infinita.

Nella relatività ristretta, i *tachioni*, dovendo avere velocità iper- $c$ , avranno delle linee orarie di genere spazio, i *luxoni* (particelle a velocità  $c$ ) hanno linee orarie di genere luce, ed infine i *bradioni* (particelle a velocità sub- $c$ ) hanno linee orarie di genere tempo.

Tale distinzione si mantiene inalterata passando alla relatività proiettiva, e quindi possiamo dire che *una particella è un tachione, se la sua linea oraria (nel cronotopo di Castelnuovo) è di genere spazio.*

Come abbiamo dimostrato al n.º 3, una galassia che ubbidisce alla legge di fuga (3,4) ha sempre una linea oraria di genere tempo, e quindi pur potendo superare la velocità della luce, è sempre formata da bradioni.

Invece, nello studio della meccanica proiettiva del punto libero

[12], abbiamo visto che un punto libero può avere come linee orarie delle rette, oppure delle linee orarie di equazioni

$$(6,3) \quad \boxed{x^2 - v_1^2 t^2 + r^2 = 0} \quad \text{con } v_1 \geq c$$

È facile dimostrare che tali linee sono di genere spazio, e quindi rappresentano dei tachioni. Sia infatti  $P(x_1, t_1)$  un punto della (3), cioè tale che

$$x_1^2 - v_1^2 t_1^2 + r^2 = 0$$

La tangente alla (3), nel punto  $P$  è data da

$$(6,4) \quad x x_1 - v_1^2 t t_1 + r^2 = 0$$

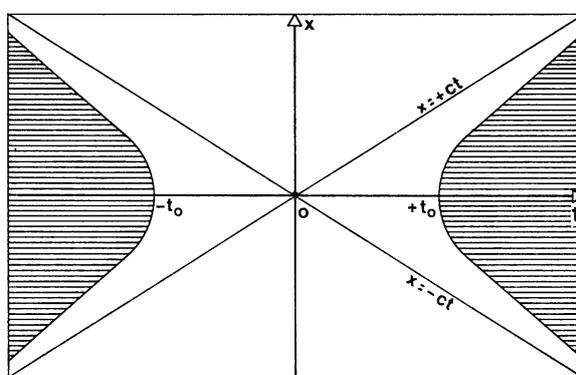
Tale tangente, per essere di genere spazio, non deve incontrare l'assoluto, di equazione

$$(6,5) \quad x^2 - c^2 t^2 + r^2 = 0$$

cioè il sistema (4), (5) deve avere il discriminante minore di zero. Fatti i calcoli si trova che

$$(6,6) \quad \Delta = (r v_1 x_1 t_1)^2 (c^2 - v_1^2)$$

e quindi, per  $v^2 = c$  si ha  $\Delta = 0$  e la linea oraria, che è di genere luce, coincide con l'assoluto (vedi figura). Per  $v_1 < c$ , si ha  $\Delta > 0$ , e la linea oraria è di genere tempo, ma sta fuori dello spazio fisico



Il cronotopo di Castelnuovo

(formato dai punti esterni all'assoluto). Infine, per  $v_1 > c$ , si ha  $\Delta < 0$ , e la linea oraria è di genere spazio, cioè rappresenta il moto di una coppia di tachioni. È interessante osservare che per  $v_1$  tendente all'infinito la (3) si riduce alla retta  $t = 0$ , che coincide con l'asse delle  $x$ . Inoltre, dato un punto di coordinate  $P(x_1, t_1)$ , per esso passa la linea oraria (3) che corrisponde ai seguenti valori del parametro

$$(6,7) \quad v_1 = \pm (\sqrt{x_1^2 + r^2})/t_1$$

Poiché le linee orarie (3) sono strettamente connesse all'assoluto (5) di Cayley-Klein (che rappresenta nel cronotopo di Castelnuovo, la singolarità iniziale e quella finale), e spariscono per  $r$  tendente all'infinito, cioè quando l'assoluto va all'infinito, appare un legame tra la singolarità iniziale e finale, ed i tachioni.

#### 7 - IL MOTO IPERBOLICO GENERALIZZATO

Nella relatività ristretta, un moto si dice uniformemente accelerato, se la forza relativa  $f_i = F_i \sqrt{1 - \beta^2}$ , è costante.

Se fissiamo allora le condizioni iniziali, che per  $t = 0$  si ha  $V = 0$  ed  $x = 0$ , otteniamo le seguenti leggi del *moto iperbolico*

$$(7,1) \quad V = at / \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}; \quad x = \frac{c^2}{a} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \right)$$

che generalizzano le leggi della fisica classica. Si verifica subito che per  $t$  tendente all'infinito, si ha  $V = c$ , mentre per  $a$  tendente all'infinito si ha  $x = \pm ct$  (cono-luce).

Passando alla relatività proiettiva, un moto si dice uniformemente accelerato, se la forza relativa

$$(7,1) \quad f_i = F_i \sqrt{(1 - \beta^2) (1 + \alpha^2 - \gamma^2) + (\vec{\alpha} \times \vec{\beta} - \gamma)^2}$$

è costante. Imponendo le precedenti condizioni iniziali, e limitandoci alle due dimensioni  $(x, t)$ , otteniamo l'equazione differenziale [12]

$$(7,3) \quad d \left[ V / \sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta \gamma)^2} \right] = adt$$

con  $a = f/m_0$ . Integrando e quadrando, si ha

$$V^2 = a^2 t^2 [1 - V^2/c^2 + (x - Vt)^2/r^2]$$

da cui segue la seguente equazione di 2.<sup>o</sup> grado nella velocità  $V$

$$V^2 [1 + A^2 (1 - \gamma^2)] + 2 A^2 \alpha \gamma c V - A^2 c^2 (1 + \alpha^2) = 0$$

con  $A = at/c$ . Otteniamo così la velocità

$$(7,4) \quad \beta = \frac{A [-\alpha \gamma A \pm \sqrt{(1 + \alpha^2) + A^2 (1 + \alpha^2 - \gamma^2)}]}{1 + A^2 (1 - \gamma^2)}$$

la quale, quando l'accelerazione tende all'infinito, si riduce alla equazione delle caratteristiche

$$(7,5) \quad \beta = \frac{-\alpha \gamma \pm A}{1 - \gamma^2} \quad \text{con} \quad A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2$$

La (4) si può scrivere pure nel seguente modo

$$(7,6) \quad \boxed{V = \frac{at(1 + \alpha^2)}{-\alpha \gamma A \pm \sqrt{(1 + A^2)(1 + \alpha^2) - A^2 \gamma^2}}}$$

e generalizza la formula relativistica (1). Razionalizzando il denominatore, otteniamo la formula

$$(7,7) \quad V = \frac{at \left[ -\frac{at^2 x}{r^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right) - \left(\frac{at^2}{r}\right)^2} \right]}{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2 - \left(\frac{at^2}{r}\right)^2}$$

E'interessante osservare che per  $t = \pm t_0$  il denominatore si riduce ad 1, mentre la velocità diventa infinita per

$$(7,8) \quad 1 + a^2 t^2/c^2 - a^2 t^4/r^2 = 0$$

cioè per  $t > |t_0|$ . Per  $c$  tendente all'infinito, la (7) si riduce alla

$$(7,9) \quad V = \frac{a t [- a t^2 x/r^2 \pm \sqrt{1 + (x^2 - a^2 t^4)/r^4}]}{1 - (a t^2/r)^2}$$

e la velocità diventa infinita per  $t = \pm \sqrt{r/a}$ .

E' facile verificare che l'equazione differenziale (3) ammette una soluzione particolare del tipo

$$(7,10) \quad x^2 - c^2 t^2 = k$$

con  $k$  costante. Si avrà allora

$$x = \sqrt{k + c^2 t^2} ; V = c^2 t / \sqrt{k + c^2 t^2}$$

e sostituendo nella (3) otteniamo la seguente equazione in  $k$

$$(7,11) \quad k^2/r^2 + k - c^4/a^2 = 0$$

da cui si ricava il valore di  $k$ . Otteniamo così la soluzione particolare

$$(7,12) \quad x^2 - c^2 t^2 = (r^2/2) (-1 + \sqrt{1 + 4 c^2/a^2 t_0^2})$$

la quale rappresenta una iperbole non passante per l'origine, e che ha come asintoti le due rette  $x = \pm ct$  del cono-luce uscente dalla origine.

Per concludere, la (7) si semplifica notevolmente se ci poniamo nell'Universo di Bacry [8], cioè se poniamo  $t \rightarrow \varepsilon t$  e  $V \rightarrow \varepsilon V$ . Per  $\varepsilon$  tendente a zero, avremo

$$(7,13) \quad V = at \sqrt{1 - \alpha^2}$$

che si integra subito, e ci dà la soluzione

$$(7,14) \quad x = r \sinh (at^2/2r)$$

imponendo le solite condizioni iniziali (per  $t = 0$  si ha  $V = 0$ ,  $x = 0$ ).

È noto che nella relatività ristretta, lo studio del moto centrale, porta alla importante scoperta del fenomeno della *rotazione del perielio* dei pianeti. Lo stesso problema, trattato con le equazioni della meccanica proiettiva [12], nella quale si tiene conto della espansione cosmica e della curvatura dello spazio, dovrebbe portare a nuove traiettorie a *spirali*. Questo è stato dimostrato dal Milne, in base alla relatività cinematica [4], e sarebbe assai interessante stabilirlo con i metodi della relatività proiettiva, nella quale il momento lineare e quello angolare non si conservano più separatamente.

## 8 — MATERIA E CAMPO MAGNETICO

Una delle più interessanti conseguenze della relatività proiettiva, che ne conferma la sua coerenza logica e la sua validità fisica, è che essa ci fornisce una semplice ed elegante sistemazione teorica della magnetoidrodinamica e della fisica del plasma, e ne mette in luce il suo profondo legame con la geometria proiettiva e la problematica cosmologica [7].

Dato un fluido elettrizzato (plasma), in ogni suo punto si può definire un «indice»  $f$ , dato da

$$(8,1) \quad \boxed{r c^2 f = H_{AB} \bar{x}_A \bar{u}_B}$$

dove  $H_{AB}$  è il tensore magnetoidrodinamico, a 10 componenti. Si può allora dimostrare che il «campo idrodinamico»  $c_A$  ed il «campo magnetico»  $h_A$ , sono tra loro «duali», nel senso della geometria proiettiva, e si possono decomporre nel seguente modo

$$(8,2) \quad c_A = f \bar{u}_A + Q_A ; r h_A = c f \bar{x}_A + H_A$$

con  $Q_A \bar{u}_A = Q_A \bar{x}_A = 0$ , mentre  $H_A \bar{u}_A = H_A \bar{x}_A = 0$ . Dalla prima formula segue che, nel caso più generale, il campo idrodinamico non è parallelo alla velocità, ma appare un secondo termine ad essa ortogonale. Tale termine si può interpretare come «vettore termico» [13], e si ottiene così nel modo più semplice la termoidrodinamica relativistica.

Dalla seconda formula (1) si deduce invece che il campo magnetico è scomponibile in due parti, e cioè il campo  $H_A$  dovuto alla presenza

di correnti e cariche, ed in una parte che dipende dalla densità di materia e dalla distanza, cioè

$$(8,3) \quad \boxed{h_A = c \sqrt{2\mu} \bar{x}_A / r}$$

se ci riferiamo al caso dei fluidi incompressibili, nei quali vale la equazione di stato  $p = \mu c^2$ , e quindi  $f^2 = \mu + p/c^2 = 2\mu$ .

Se scegliamo l'asse delle  $x$  lungo la congiungente l'osservatore 0 con il punto  $P$  del fluido, e supponiamo che tale punto si trovi sul cono-luce dell'osservatore ( $\alpha = -\gamma$ , da cui  $A = 1$ ), si avrà  $\bar{x}^1 = x/A = x$ , ed indicando con  $h$  la componente radiale del campo magnetico, avremo, in base alla (3):

$$(8,4) \quad h = c \sqrt{2\mu} x / r$$

che stabilisce un nuovo legame tra campo magnetico, densità di materia e distanza. Tale campo magnetico che localmente, e per piccole densità è trascurabile rispetto ad  $H_A$ , può diventare preponderante nel caso della materia iperdensa (*pulsar e buchi neri*) o su scala cosmica (*quasar*).

È noto che sin dal 1947 il Blackett [14] aveva postulato l'esistenza di un legame tra il campo magnetico e la massa di un corpo in rotazione. Se una sfera di massa  $M$ , ruota con velocità angolare  $\omega$ , essa genera un campo magnetico dato dalla formula empirica

$$(8,5) \quad \boxed{h = \omega M \sqrt{g} / 3 R c}$$

dove  $R$  è il raggio della sfera e  $g$  è la costante di gravitazione di Newton. Tale formula è stata recentemente ritrovata dal Surdin, partendo dalla ipotesi di un campo elettromagnetico fluttuante nell'universo.

Ma mentre il campo magnetico di Blackett richiede che il corpo sia in rotazione, il campo previsto dalla relatività proiettiva, non dipende dalla velocità angolare e dalla massa, ma dalla distanza e dalla densità della materia.

Per esempio, se ci riferiamo ad una stalla di neutroni con raggio di 10km, densità di  $10^{15}$  gr/cm<sup>3</sup>, e che ruota alla velocità di 30 giri al secondo, si trova un campo di Blackett di  $10^{14}$  gauss. Il campo

previsto dalla relatività proiettiva, se ci riferiamo al pulsar della nebulosa del Granchio, che dista da noi 6000 anni-luce é invece dell'ordine di  $10^{12}$  gauss.

Recentemente é stata suggerita l'esistenza di campi magnetici intergalattici, la cui importanza sarebbe notevole per spiegare vari fenomeni che si osservano, come per esempio i campi magnetici nelle galassie e nelle radiogalassie. Si fa infatti l'ipotesi che il campo magnetico intergalattico si sia formato all'inizio della evoluzione dell'universo, in modo che al momento della formazione delle galassie, il campo magnetico era già presente, per condensazione dal gas intergalattico. Tale campo magnetico potrebbe assumere allora una importanza decisiva negli stati iniziali di un universo iperdenso in espansione [2].

Se nella (4) poniamo  $\mu = 10^{-30}$  gr/cm<sup>3</sup>, che é la densità media dell'Universo, troviamo dei campi magnetici intergalattici dell'ordine di  $10^{-9}$  gauss alla distanza di 1 milione di anni luce, fino a  $10^{-5}$  gauss alla distanza  $x = r$ . Tali valori sono in buon accordo con quelli comunemente ammessi dagli astrofisici per i campi intergalattici, in base a varie ipotesi.

Infine, é noto che la enorme energia emessa dai quasar deriva da un «irraggiamento sincrotrone» cioè viene emessa dagli elettroni ad alta energia che si avvolgono a spirale attorno alle linee di forza del campo magnetico. Per effetto della accelerazione subita, gli elettroni emettono della energia elettromagnetica, la quale ha la particolare caratteristica di essere fortemente polarizzata.

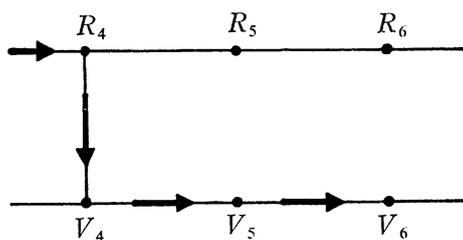
Poiché, secondo la ipotesi cosmologica, le quasar si trovano agli estremi limiti del cosmo, allora  $x \sim r$ , ed il campo magnetico risulta notevolmente amplificato per effetto della distanza, pur dipendendo anche dalla densità del quasar (altrimenti non si potrebbe spiegare la variazione della luminosità che si osserva). Questo potrebbe portare ad una più semplice spiegazione della loro energia emessa, in accordo con il fatto che più i quasar sono lontani e più li si vede brillare, cioè più intensa é l'energia che essi emettono.

E'interessante osservare che mentre i campi fisici prodotti da una sorgente puntiforme (campo gravitazionale, elettrico) vanno dal valore infinito, dove sta la sorgente al valore nullo, a distanza infinita, *l'opposto avviene per i campi di natura cosmologica* (campo delle velocità di fuga, campo magnetico cosmologico). Questi ultimi campi sono nulli nella origine (dove sta l'osservatore) e tendono all'infinito alla distanza infinita.

## 9 — MODELLI DI UNIVERSO E SPAZI DI CARTAN

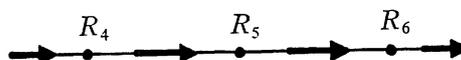
Come abbiamo visto al n.º 1, Einstein é passato da un modello di Universo basato sui gruppi (il modello di Minkowski) ad una teoria dei modelli di Universo costruita a partire dalle equazioni gravitazionali. Successivamente, per costruire una teoria unitaria della materia e della elettricit  si cerca di ampliare la geometria di Riemann. Per  la via da seguire   del tutto arbitraria, e questo spiega i numerosi tentativi fatti per costruire una siffatta teoria, tentativi che sono praticamente falliti, in mancanza di nuovi principi fisici da seguire.

A mio avviso, il motivo di tale insuccesso   da ricercare nel fatto che, prima di ampliare la relativit  generale non si   cercato di perfezionare la relativit  ristretta, e quindi, le teorie costruite ampliando la geometria di Riemann, o passando a variet  a 5 o 6 dimensioni, sono in fondo basate sulla relativit  ristretta, costruita sullo spaziotempo a 4 dimensioni. La via seguita da Einstein pu  essere rappresentata dal seguente schema, nel quale abbiamo posto su di una retta i successivi gruppi delle rotazioni  $R_n$  e su di una retta parallela le variet   $V_n$ : come si vede, si   passati da una teoria basata su  $R_4$  (gruppo di Lorentz), alle teorie che utilizzano le variet   $V_4$ ,  $V_5$ ,  $V_6$ ., abbandonando la via dei gruppi, che si era rivelata cos  feconda.



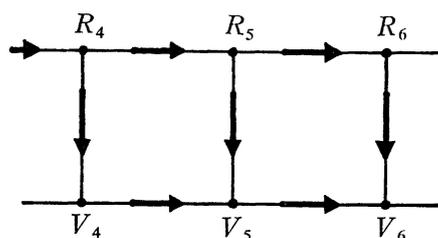
Nella «teoria degli Universi» di Fantappi , invece, si abbandona la via seguita da Einstein, e si costruiscono dei modelli di Universo, basati sui gruppi delle rotazioni  $R_4$ ,  $R_5$ ,  $R_6$ .. In conseguenza, ad ogni modello di Universo si pu  associare un numero intero ( $n$ ), e si ottiene cos  una serie ordinata di modelli, ognuno dei quali contiene i precedenti ed   contenuto nei successivi. Si stabilisce allora una profonda connessione tra il modello geometrico di Universo, il gruppo e le corrispondenti leggi fisiche. Infatti, il gruppo ha il

significato geometrico di rappresentare i «movimenti in sé» del corrispondente modello, e dal punto di vista fisico esprime analiticamente un principio di relatività.



Se vogliamo conciliare i due punti di vista, di Einstein (geometria di  $V_n$  per costruire nuove teorie unitarie) e di Fantappié (modelli di Universo basati sui gruppi), possiamo utilizzare il legame tra teoria dei gruppi e geometria differenziale, stabilito dal Cartan [15]. Da questo punto di vista più generale (vedi schema) si possono costruire tutta una serie di «relatività» basate su gruppi delle rotazioni  $R_n$ , ad ognuna delle quali si può associare una «relatività generale» utilizzando una geometria non olonoma, che ammette per gruppo di ologonia il gruppo  $R_n$ , e che in conseguenza sarà una geometria riemanniana di  $V_n$ .

Si possono per tale via eliminare le indeterminazioni delle teorie unitarie, e costruire delle teorie fisiche sempre più complesse e perfezionate.



E'interessante osservare che in questa concezione, acquistano particolare importanza le equazioni di Maxwell scritte sul gruppo  $R_n$

$$(9,1) \quad \text{Rot } G_{ik} = J_{ikl} ; \text{ Div } G_{ik} = I_k \quad (ikl = 1,2..n)$$

dove il campo  $G_{ik}$  ha  $n(n-1)/2$  componenti distinte, cioè quanti sono i parametri del gruppo  $R_n$ . Per  $n=6$  si ha il *gruppo conforme*, che contiene i movimenti uniformemente accelerati, ed allora potrà accadere che le (1), per  $n=6$  ci danno una teoria classica (cioè basata sui gruppi) del campo magnetoidrodinamico-gravitazionale.

## BIBLIOGRAFÍA

- (1) A. EINSTEIN, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeine Relativitätstheorie*, Sitz. Akademie Wissen. 1917, pp. 142-152. H. P. ROBERTSON, *Relativistic Cosmology*, Rev. Mod. Phys. 5, 62 (1933).
- (2) D. W. SCIAMA, *Modern Cosmology*, Cambridge 1971.
- (3) J. MERLEAU-PONTY, *Cosmologia del XX secolo*, Il saggiatore, pp. 76-77, Milano 1974.
- (4) E. A. MILNE, *Kinematic relativity*, Oxford 1948.
- (5) H. BONDI, *Cosmology*, Cambridge 1961.
- (6) L. FANTAPPÍE, *Sui fondamenti grupपालi della fisica*, Coll. Math. 1959. *Su una nuova teoria di relatività finale*, Rend. Lincei, Nov. 1954.
- (7) La «relatività proiettiva» é sviluppata nel volume G. ARCIDIACONO, *Relatività e Cosmologia*; Libreria Veschi (Viale Università 7), Roma 1973.
- (8) G. ARCIDIACONO, *Relatività finale e cosmologia*, Coll. Mathem. XII, 3-32 (1960); *Il modello di Klein e la cosmologia*, Coll. Math. XXV, 159 (1974).
- (9) I. SHAPIRO, Science, 172, 54 (1971).
- (10) G. FEINBERG, *Possibility of faster-than-light particles*, Phys. Rev. 159, 1106 (1967).
- (11) R. MIGNANI, E. RECAMI, *Classical theory of tachyons*, Nuovo Cimento 1974.
- (12) G. ARCIDIACONO, *L'Universo di De Sitter e la meccanica*, Coll. Math. XX, 231-255 (1969).
- (13) G. ARCIDIACONO, *L'Universo di De Sitter-Castelnuovo e la magnetoidrodinamica ideale*, Coll. Math. XXI, 149-171 (1970); *Su alcuni casi limiti della magnetoidrodinamica*, Coll. Math. XXII, 141-156 (1971); *L'Universo di De Sitter-Castelnuovo e la termoidrodinamica*, Coll. Math. XXIII, 105-128 (1972).
- (14) P. M. S. BLACKETT, Nature, 169, 657 (1947); M. SURDIN, *Le champ électromagnétique fluctuant de l'Univers*, Ann. Poinc. XV, 203 (1971).
- (15) G. ARCIDIACONO, *Gli spazi di Cartan e le teorie unitarie*, Coll. Math. XVI, 149-168 (1964); E. PESSA, *The De Sitter Universe and general relativity*, Coll. Math. XXIV, 151-174 (1973).

Prof. GIUSEPPE ARCIDIACONO  
via Acq, Peschiera 96  
00135- Roma

