«ALGUNAS PROPIEDADES DEL EJEMPLO DE TYCHONOFF DE UN ESPACIO REGULAR QUE NO ES COMPLETAMENTE REGULAR»

por

JOSE LUIS BLASCO OLCINA

y

MANUEL LOPEZ PELLICER

ABSTRACT

Here we give a proof of the Tychonoff's example of a regular space, R, which is not completely regular. The ideas used in this demostration have allowed us to obtain negative results of C*-embedding (theorem 2) and to find a subspace of R, R^*, whose Alexandroff's compactification, $\widehat{R}^*$, has the propriety that $C(R) = C(\widehat{R}^*)$ (theorem 3). This theorem has permited us to characterize the pairs of points and closed sets that are not completely separated in the regular space R (corollary 2-3)

* * *

En el espacio topológico regular R dado por A. TYCHONOFF ([5]) vamos a determinar un cerrado y un punto del complemento del cerrado que no están completamente separados [1-3.1], lo que proporciona una nueva demostración de la propiedad, probada por A. TYCHONOFF, de que el espacio R es regular y no es completamente regular (véase [5] y [4]-IV-1-ejemplo 3).

La notación que seguimos, en lo esencial, es la usada en ([4]-IV-1-ejemplo 3), y, por lo tanto, ω_1 representará el primer ordinal infinito no numerable; $[1\ \omega_1]$ será el conjunto de ordinales menores o iguales que ω_1 (se usa el buen orden, $\leqslant$, usual entre ordinales) y R_6 será el espacio topológico formado por el conjunto $[1\ \omega_1]$ provisto de la topología del orden $\leqslant$.

* Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valencia, bajo la dirección del profesor Dr. M. Valdivia.

Si α y β son dos ordinales pertenecientes a $[1 \ \omega_1]$ entonces

$$[\alpha \ \beta] = \{\gamma \in [1 \ \omega_1] : \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta\}$$

y

$$[\alpha \ \beta[= \{\gamma \in [1 \ \omega_1] \sim \{\beta\} : \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta\}$$

El subespacio topológico de R_6 cuyo conjunto es $[1 \ \omega_1[$ se denomina $R_6{}^*$ y el subespacio topológico de $R_6{}^*$ cuyo conjunto soporte es $[1 \ \omega_0]$ se representa por $R_6{}'$. Al no ser posible la confusión, los ordinales de $[1 \ \omega_0[$ se representan por $1,2,3,\ldots, n,\ldots$

Sea S el subespacio topológico del producto de R_6 por $R_6{}'$ cuyo conjunto soporte es

$$[1 \ \omega_1] \times [1 \ \omega_0] \sim \{(\omega_1 \ \omega_0)\}$$

y S^k, $k = 1,2,3,\ldots$, una familia numerable de copias del espacio S. Los puntos de S en la copia k se afectan del superíndice k.

Sea R' la suma topológica de los espacios S^k, $k = 1,2,3,\ldots$ y D la partición del conjunto soporte de R' consistente en los conjuntos

$$\left.\begin{array}{lll} \{(\omega_1 \ n)^{2k-1}, \ (\omega_1, n)^{2k}\} & n \in [1 \ \omega_0[& k = 1,2,3\ldots \\ \{(\alpha, \omega_0)^{2k}, \ (\alpha, \omega_0)^{2k+1}\} & \alpha \in [1 \ \omega_1[& k = 1,2,3\ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

y todos los conjuntos de un elemento formados por cada uno de los demás puntos del conjunto soporte de R'.

El espacio topológico R' es de Hausdorff, regular y localmente compacto; la partición D es cerrada ([4]-IV-1-ej. 3); por lo tanto si R^* es el espacio topológico cociente de R' respecto a la partición D entonces ([3]-5-20) resulta que:

El espacio topológico R^* es de Hausdorff, regular y localmente compacto (2)

Si φ es la aplicación canónica entre los espacios R' y R^* entonces, por brevedad, se escribe

$$\varphi \, (\alpha, \beta)^k = (\alpha, \beta)^{k*}$$

$$\varphi \, (S^k) = S^{k*}$$

Finalmente, se forma el espacio topológico R añadiendo un punto y_0 al conjunto soporte de R^* y definiendo un sistema fundamental de entornos del punto y_0 por la familia de conjuntos

$$\{y_0\} \cup \left[\bigcup_{k=l+1}^{\infty} S^{k*}\right] \qquad l = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

y para cualquier otro punto $(\alpha, \beta)^{k*}$ de R se toma como base de entornos a la familia de entornos de $(\alpha\ \beta)^{k*}$ en R^*.

Entonces el espacio topológico R es de Hausdorff, regular y no es completamente regular ([4]-IV-1ej. 3). De esta última propiedad damos esta demostración:

En el espacio topológico R el conjunto

$$M = \{(\alpha,\ \omega_0)^{1*}\ \ \alpha \in [1\ \ \omega_1[\}$$

es cerrado. Vamos a probar que si f es una aplicación continua de R en el espacio métrico real P entonces

$$f(y_0)\ \in f\ (M) \tag{4}$$

por lo que R no será completamente regular.

Para demostrar la relación (4) haremos uso de la propiedad de que para cada aplicación continua l de $R_6{}^*$ en P existe un ordinal $\alpha \in [1\ \omega_1[$ tal que $l(\beta) = l(\alpha)$ para cualquier $\beta \in [\alpha\ \omega_1[$ (véase [3]-5-Q, junto a [1]-1.4-pag. 12, ó [2]).

De esta propiedad y de que el subespacio topológico de R de conjunto soporte $\{(\alpha,\ n)^{k*}\ \ \alpha \in [1\ \ \omega_1[\}$ es homeomorfo a $R_6{}^*$, para cada valor de k, 1,2,3,.... , se deduce la existencia de un ordinal numerable α_n^k tal que

$$f(\alpha,\ n)^{k*} = f(\alpha_n^k,\ n)^{k*} = h_n^k \quad \forall\ \alpha \in [\alpha_n^k\ \ \omega_1[\ \ n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{5}$$

y si α_0^k es el ordinal numerable supremo de los ordinales α_n^k, $n =$ $= 1, 2, 3, \ldots.$, entonces

$$f(\alpha,\ n)^{k*} = f(\alpha_0^k,\ n)^{k*} = h_n \quad \forall\ \alpha \in [\alpha_0^k\ \omega_1[\quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{6}$$

De la continuidad de la función f, de $\lim\limits_{n<\omega_0} (\alpha\ n)^{k*} = (\alpha\ \omega_0)^{k*}$ para $\alpha \in [1\ \omega_1[$ y de (6) se deduce que:

$$\lim_{n<\omega_0} h_n^k = \lim_{n<\omega_0} f(\alpha,\ n)^{k*} = f(\alpha,\ \omega_0)^{k*} = h^k \quad \forall \alpha \in [\alpha_0^k\ \omega_1[\tag{7}$$

De (1) se deduce que si el natural k es par entonces $(\alpha,\ \omega_0)^{k*} = (\alpha\ \omega_0)^{(k+1)*}$, por lo que si α' es el supremo de α_0^k y α_0^{k+1}, entonces (7) asegura que

$$h^k = f(\alpha',\ \omega_0)^{k*} = f(\alpha',\ \omega_0)^{(k+1)*} = h^{k+1} \quad (\text{si } k \text{ es par}) \tag{8}$$

La continuidad de la función f, el que $\lim\limits_{\alpha<\omega_1} (\alpha,\ n)^{k*} = (\omega_1,\ n)^{k*}$ y la relación (6) aseguran que

$$\lim_{\alpha<\omega_1} f(\alpha,\ n)^{k*} = f(\omega_1,\ n)^{k*} = h_n^k \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Si el natural k es impar se deduce de (1) que $(\omega_1, n)^{k*} = (\omega_1\ n)^{(k+1)*}$, por lo tanto de (9) se deduce que

$$h_n^k = f(\omega_1,\ n)^{k*} = f(\omega_1,\ n)^{(k+1)*} = h_n^{k+1} \tag{10}$$

y puesto que (7) afirma que

$$h^k = \lim_{n<\omega_0} h_n^k \quad \text{y} \quad h^{k+1} = \lim_{n<\omega_0} h_n^{k+1}$$

resulta de (10) que

$$h^k = h^{k+1} \qquad (\text{si } k \text{ es impar}) \tag{11}$$

De las igualdades (8) y (11) deducemos que

$$h^k = h^{k+1} = h \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

De (3) se deduce que la sucesión $\{(\alpha_0^k,\ \omega_0)^{k*},\ k \in N\}$ converge en R a y_0, por lo tanto (véase (7))

$$f(y_0) = \lim_{k\to\infty} f(\alpha_0^k\ \omega_0)^{k*} = \lim_{k\to\infty} h^k = h \tag{13}$$

Es evidente que

$$h = h^1 = f(\alpha_0^1,\ \omega_0)^{1*} \in f(M) \tag{14}$$

Las relaciones (13) y (14) implican la relación (4), por lo que R no es completamente regular.

* * *

Admitido que las aplicaciones de R_6^* en P son constantes a partir de cierto ordinal, la demostración que hemos presentado no usa la reducción al absurdo y sugiere los siguientes problemas:

PROBLEMA 1 — Relación entre R y la compactación de Alexandroff de R^*.

PROBLEMA 2 — Sea $C(R)$ la familia de funciones continuas definidas en R y con valores en P. Relación entre la topología proyetiva definida por la familia $C(R)$ y la topología de la compactación de Alexandroff de R^*. Prolongación de las funciones continuas de R^* a R.

PROBLEMA 3 — Caracterización de los pares cerrados-puntos de R que no están completamente separados.

PROBLEMA 4 — Caracterización de los espacios compactos a los que se les puede dar una topología más fina regular, que no sea completamente regular.

El siguiente teorema resuelve el problema primero:

TEOREMA 1 — *La aplicación identidad de R^* en R^* puede prolongarse a una aplicación continua biyectiva y no abierta del espacio de Tychonoff R en la compactación de Alexandroff de R^**

DEMOSTRACION

Por comodidad consideraremos siempre que el punto añadido para construir la compactación de Alexandroff, $\widehat{R}^*$, de R^* es el punto y_0

Cada punto $(\alpha, \beta)^{k*}$ de R^* tiene un entorno contenido en $S^{(k-1)*} \cup S^{k*} \cup S^{(k+1)*}$, por lo tanto para cada compacto C existe un natural k_c tal que

$$C \subset \bigcup_{k=1}^{k_c} S^{k*}$$

Es pues evidente que la aplicación idéntica de R en $\widehat{R}^*$ es continua. Esta aplicación idéntica no es un homeomorfismo, puesto que R no es completamente regular. La topología de R es estrictamente más fina que la de $\widehat{R}^*$, lo que prueba el teorema 1 y justifica el enunciado del problema 4.

El problema 2 es resuelto por los siguientes teoremas (2,3 y corolarios):

TEOREMA 2 — *R^* no es C^*-sumergible en R*

DEMOSTRACION

El teorema quedará probado encontrando una aplicación continua g de R^* en P que no se pueda prolongar continuamente a una aplicación de R en P ([1]-1.16)

La función g de R^* en P definida por

$$g(\alpha, \beta)^{k*} = \begin{cases} \dfrac{1}{cd\ \alpha} & \text{si} \quad \alpha \in [1\ \omega_0[\\ 0 & \text{si} \quad \alpha \in [\omega_0\ \omega_1[\end{cases} \qquad \forall\, \beta \in [1\ \omega_0[\text{ y } \forall\, k \in 1, 2, 3, \ldots.$$

es continua ($cd\, \alpha =$ cardinal de un conjunto ordenado representante de α).

De (3) se deduce que en R la sucesión $\{(\omega_0\ 1)^{k*}\ k = 1, 2, 3, \ldots\}$. converge a y_0, por lo tanto si g se pudiese prolongar continuamente a una función $\bar{g}$ de R en P entonces

$$\bar{g}(y_0) = 0$$

pero es evidente que la aplicación $\bar{g}$ no es continua, puesto que por definición de g

$$(1,\ 1)^{k*} \notin \bar{g}^{-1}\left(\left] -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right[\right) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{15}$$

y de (3) y de (15) se deduce que

$$\bar{g}^{-1}\left(\left] -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right[\right)$$

no es entorno, en R, de y_0. De $y_0 \in \bar{g}^{-1}\left(]-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[\right)$ se sigue que $\bar{g}^{-1}\left(]-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[\right)$ no es abierto, y, a fortiori, $\bar{g}$ no es continua.

El siguiente corolario es consecuencia evidente de los teoremas 1 y 2.

COROLARIO 1-2 — *R^* no es C^*-sumergible en su compactación de Alexandroff $\widehat{R}^*$*

Es claro ([1]-1.16), que R^* no es C-sumergible ni en R, ni en $\widehat{R}^*$.

TEOREMA 3 — *Los espacios $C(R)$ y $C(\widehat{R}^*)$ son idénticos (se supone identificados los conjuntos soportes de R y de $\widehat{R}^*$).*

DEMOSTRACION

Identificando los conjuntos soportes de R y $\widehat{R}^*$, como se hizo en la demostración del teorema 1, y teniendo en cuenta que la topología de R es más fina que la topología de $\widehat{R}^*$, resulta que quedará probado el teorema 3 si establecemos que si f es una aplicación continua de R en P entonces f es una aplicación continua de $\widehat{R}^*$ en P.

Sea U un entorno cerrado de $h = f(y_0)$ en P y l un número natural tal que

$$\{y_0\} \cup \left\{\bigcup_{k=l+1}^{\infty} S^{k*}\right\} \subset f^{-1}(U) \tag{16}$$

(la base de entornos de y_0 se dio en (3)).

La continuidad de la aplicación f de $\widehat{R}^*$ en P, en el punto y_0, teniendo en cuenta la relación (16) quedará establecida si encontramos para cada valor de $k = 1, 2, 3, \ldots l$, una pareja de ordinales $(\alpha^k, \beta^k) \in [1\ \omega_1[\ \times\ [1\ \omega_0[$ tal que

$$\left[[\alpha^k\ \ \omega_1] \times [\beta^k\ \ \omega_0] \sim \{(\omega_1,\ \omega_0)\}\right]^{k*} \subset f^{-1}(U) \tag{17}$$

La relación (17) es inmediata, puesto que sea α^k el ordinal α_0^k

definido en (6); de (12) y de (7) se deduce que

$$\lim_{n<\omega_0} h_n^k = h$$

y, por lo tanto, existe un ordinal β^k tal que

$$h_n^k \in U \quad \text{si} \quad n \in [\beta^k\ \omega_0[\tag{18}$$

La relación (6) y la (18) aseguran que

$$f(\alpha, n)^{k*} = h_n^k \in U \qquad \forall\ (\alpha, n) \in [\alpha_0^k\ \omega_1[\ \times\ [\beta^k\ \omega_0[\tag{19}$$

La relación (19), el que $\alpha_0^k = \alpha^k$, la continuidad de f y que el entorno U es cerrado, implican la relación (17).

La continuidad de la aplicación f de $\widehat{R}^*$ en P. en cualquier otro punto $(\alpha, \beta)^{k*}$, distinto de y_0, es simple consecuencia de la coincidencia del sistema de entornos del punto $(\alpha, \beta)^{k*}$ en las topologías de R y de $\widehat{R}^*$.

COROLARIO 1-3 — *El espacio de Tychonoff R es seudocompacto.*

DEMOSTRACION

Las aplicaciones continuas de R en P, son aplicaciones continuas de $\widehat{R}^*$ en P (teorema 3) y $\widehat{R}^*$ es compacto.

COROLARIO 2-3 — *Un conjunto M y un punto p de R están completamente separados si, y sólo si, están completamente separados en $\widehat{R}^*$.*

Por su sencillez omitimos la demostración. Este corolario resuelve el problema 3. En particular:

COROLARIO 3-3 — *En el espacio de Tychonoff R el punto y_0 está completamente separado del conjunto M si, y sólo si, M está contenido en un subconjunto compacto de R que no contiene a y_0.*

DEMOSTRACION

Sabemos, corolario 2-3, que M está completamente separado de y_0 en R si, y sólo si, M está completamente separado de y_0 en $\widehat{R}^*$. Y puesto que $\widehat{R}^*$ es completamente regular M está completamente separado de y_0 si, y sólo si, $\overline{M}^{\hat{R}^*} \cap \{y_0\} = \phi$

Esta última condición equivale a afirmar que M está contenido en el subconjunto compacto en $\widehat{R}^*$, $B = \overline{M}^{\hat{R}^*}$ y que B no contiene a y_0. B será un subconjunto compacto de R^*, y, por lo tanto, B será un subconjunto compacto de R.

El problema 4 lo proponemos como cuestión abierta*.

BIBLIOGRAFÍA

1 L. GILLMAN and M. JERISON. — *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand R. Comp. (London) 1960.

2 E. HEWITT. — *On two problems of Urysohn*, Ann. of Math. (2) *47* (1946) 503-509.

3 J. L. KELLEY. — *Topología General*, Endeba (Buenos Aires) 1962.

4 J. NAGATA. — *Modern General Topology*, North-Holland P. Comp. (Amsterdam) 1968.

5 A. TYCHONOFF. — *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Ann. *102* (1929) 544-561.

---

* El profesor M. Valdivia ha encontrado una amplia clase de espacios de Banach, para los que el problema 4 tiene contestación afirmativa, en la bola unidad, provista de la topología débil.