GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE LAS FAMILIAS DE PLANOS

POR

JOSÉ VAQUER TIMONER

Se estudia, por el método del triedro móvil, la geometría diferencial local del espacio euclídeo ordinario considerando como elemento el plano, obteniéndose en particular duales de los teoremas de EULER y BONNET sobre la curvatura y torsión de las curvas trazadas sobre una superficie.

Se usan los resultados y notaciones del libro de W. BLASCHKE « Einführung in die Differentialgeometrie » salvo el producto exterior que se escribe $\wedge$ en vez de [ ]. La cita (B. § 12) indica el § 12 de dicho libro.

§ 1. RESUMEN DE LAS FÓRMULAS DEL TRIEDRO MÓVIL.

Como es sabido, las ecuaciones diferenciales del desplazamiento de un triedro ortonormal $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ en el espacio euclídeo ordinario son :

$$
\begin{aligned}
d\,\mathfrak{x} &= \mathfrak{a}_1\,\sigma_1 + \mathfrak{a}_2\,\sigma_2 + \mathfrak{a}_3\,\sigma_3 \\
d\,\mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{a}_2\,\omega_3 - \mathfrak{a}_3\,\omega_2 \\
d\,\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{a}_3\,\omega_1 - \mathfrak{a}_1\,\omega_3 \\
d\,\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{a}_1\,\omega_2 - \mathfrak{a}_2\,\omega_1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

En el caso de que los triedros dependan de más de un parámetro, se han de cumplir las condiciones de integrabilidad que se deducen de las (1) por diferenciación exterior :

$$
\begin{gathered}
d\,\sigma_1 = \omega_3 \wedge \sigma_2 - \omega_2 \wedge \sigma_3, \qquad d\,\sigma_2 = \omega_1 \wedge \sigma_3 - \omega_3 \wedge \sigma_1, \\
d\,\sigma_3 = \omega_2 \wedge \sigma_1 - \omega_1 \wedge \sigma_2 \\
d\,\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \qquad d\,\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \qquad d\,\omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_1
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Para estudiar las familias de planos dependientes de uno o dos parámetros, asignaremos a cada plano del espacio euclídeo ordinario la familia de triedros ortonormales dependientes de tres parámetros, que tienen el origen $\mathfrak{x}$ sobre el plano y el vector $\mathfrak{a}_3$ ortogonal al plano (en realidad son dos subfamilias continuas que determinan dos orientaciones del plano). Estos se deducen a partir de uno de ellos $\mathfrak{x}^*$; $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$, $\mathfrak{a}_3^*$ mediante las transformaciones

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{x}^* + \lambda\,\mathfrak{a}_1^* + \mu\,\mathfrak{a}_2^* \\ \mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{a}_1^* \cos\varphi + \mathfrak{a}_2^* \operatorname{sen}\varphi \\ \mathfrak{a}_2 &= -\,\mathfrak{a}_1^* \operatorname{sen}\varphi + \mathfrak{a}_2^* \cos\varphi \\ \mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{a}_3^* \end{aligned} \tag{3}$$

de las que, teniendo en cuenta (1), deducimos:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= < d\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1 > = (\sigma_1^* + d\lambda - \mu\,\omega_3^*)\cos\varphi + (\sigma_2^* + d\mu + \lambda\,\omega_3^*)\operatorname{sen}\varphi \\ \sigma_2 &= < d\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_2 > = -\,(\sigma_1^* + d\lambda - \mu\,\omega_3^*)\operatorname{sen}\varphi + (\sigma_2^* + d\mu + \lambda\,\omega_3^*)\cos\varphi \\ \sigma_3 &= < d\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_3 > = \sigma_3^* - \lambda\,\omega_2^* + \mu\,\omega_1^* \\ \omega_1 &= -< d\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_2 > = \omega_1^* \cos\varphi + \omega_2^* \operatorname{sen}\varphi \\ \omega_2 &= < d\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_1 > = -\,\omega_1^* \operatorname{sen}\varphi + \omega_2^* \cos\varphi \\ \omega_3 &= < d\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 > = \omega_3^* + d\varphi \end{aligned} \tag{4}$$

§ 2. Familias de planos dependientes de un parámetro.

Si tenemos una familia de planos dependientes de un parámetro u, la familia de triedros ortonormales a ellos asignados depende de cuatro parámetros u ; λ, μ, φ. A los tres últimos se les llama parámetros secundarios.

Especializando convenientemente los parámetros secundarios obtendremos una familia de triedros ortonormales dependiente de un parámetro ligada a la familia de planos y que juega un papel análogo al triedro de Frenet de la teoría de curvas y que llamaremos triedro de «Frenet» de la familia de planos.

Las fórmulas (4) muestran que los pfaffianos ω_1, ω_2, σ_3 no dependen de las diferenciales de los parámetros secundarios, cosa que también puede verse directamente observando que si $du = 0$ tiene que verificarse $d\,\mathfrak{a}_3 = 0$, $< d\,\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_3 > = 0$.

Excluyendo el caso trivial $\omega_1 = \omega_2 = 0$ que corresponde a una familia de planos perpendiculares a una dirección fija y que no posee ningún invariante, podemos siempre suponer $\omega_1 \neq 0$ y entonces

$$\omega_2 = a\,\omega_1 \qquad \sigma_3 = b\,\omega_1 \tag{5}$$

Diferenciando la primera de las (5) y teniendo en cuenta las condiciones de integrabilidad (2), resulta :

$$(da + (1 + a^2)\,\omega_3) \wedge \omega_1 = 0$$

Puesto que ω_1 no depende de las diferenciales de los parámetros secundarios, llamando δa a la parte de da que depende de las diferenciales de los parámetros secundarios resulta

$$\delta a + (1 + a^2)\,d\varphi = 0$$

Luego, escogiendo convenientemente φ puede conseguirse $a = 0$, $\omega_2 = 0$. Los cambios que conservan la situación son los (3), (4) con $\varphi = 0$. Las formas diferenciales ω_1 y ω_3 son invariantes frente a estos cambios. Diferenciando la segunda de las (5) y teniendo en cuenta las condiciones de integrabilidad (2), se tiene :

$$(db - \sigma_2) \wedge \omega_1 = 0$$

Puesto que ω_1 no depende de las diferenciales de los parámetros secundarios resulta :

$$\delta b - d\mu = 0$$

Luego, escogiendo convenientemente μ puede conseguirse $b = 0$, $\sigma_3 = 0$. Los cambios que conservan la situación son los (3), (4) con $\varphi = 0$ y $\mu = 0$.

Aún disponemos del parámetro secundario λ para seguir especializando el triedro y obtener el triedro de « FRENET », pero para el estudio de las familias de planos uniparamétricas de una familia dependiente de dos parámetros conviene estudiar las familias de triedros anteriores en las que λ es una función de u. A estas familias las llamaremos *hilos*.

Las ecuaciones del triedro móvil de un hilo son :

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} &= \mathfrak{a}_1\,\sigma_1 + \mathfrak{a}_2\,\sigma_2 \\ d\mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{a}_2\,\omega_3 \\ d\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{a}_3\,\omega_1 - \mathfrak{a}_1\,\omega_3 \\ d\mathfrak{a}_3 &= -\,\mathfrak{a}_2\,\omega_1 \end{aligned} \tag{6}$$

Obsérvese que $\mathfrak{a}_1$ es perpendicular a $\mathfrak{a}_3$ y $d\,\mathfrak{a}_3$, luego $\mathfrak{a}_1$ da la dirección de la generatriz de la desarrollable.

§ 3. Invariantes de un hilo.

Las integrales

$$\alpha = \int \omega_1, \qquad u = \int \omega_3 \tag{7}$$

no dependen de la curva $\mathfrak{x}$ sino que dependen solamente de la familia de planos, las designaremos por *ángulo total* y *curvatura total* de la familia de planos respectivamente. A la forma invariante $\omega_1 = \omega = d\,\alpha$ la designaremos por *diferencial del ángulo*.

Las integrales

$$u_1 = \int \sigma_1, \qquad u_2 = \int \sigma_2 \tag{8}$$

dependen no solamente de la familia de planos sino que también dependen de la curva $\mathfrak{x}$ elegida, las llamaremos, respectivamente, *torsión* y *desvío totales* del hilo.

Los cocientes diferenciales

$$k = \frac{\omega_3}{\omega}, \qquad d = \frac{\sigma_2}{\omega}, \qquad w = \frac{\sigma_1}{\omega} \tag{9}$$

se designarán por *curvatura, desvío* y *torsión* del hilo, respectivamente. Obsérvese que la curvatura no depende del hilo elegido sobre la familia de planos.

Los distintos hilos de una misma familia de planos vienen dados por las (3) con $\varphi = 0$ y $\mu = 0$. De las (4) se deduce

$$k = k^*, \qquad d = d^* + \lambda\, k^* \qquad w = w^* + \frac{d\,\lambda}{d\,\alpha} \tag{10}$$

§ 4. Interpretación geométrica de los invariantes.

Si a partir de un punto fijo llevamos el vector $\mathfrak{a}_3$, el extremo del mismo describirá una curva sobre la esfera de radio 1 que llamaremos imagen esférica del hilo. De las (6) y (7) se deduce inmediatamente (B. § 22).

PROPOSICIÓN. *El ángulo y la curvatura de una familia de planos dependientes de un parámetro coinciden respectivamente con la longitud del arco y la curvatura geodésica de su imagen esférica.*

Si $k = 0$, entonces $\mathfrak{a}_1$ es constante y se trata de una familia cilíndrica. De la segunda de las (10) resulta que el desvío no depende del hilo. Llamando σ al elemento de arco de la curva $\mathfrak{x}$ y β al ángulo que forma con $\mathfrak{a}_1$ se tiene

$$\frac{d\mathfrak{x}}{\sigma} = \left(\mathfrak{a}_1 \frac{\sigma_1}{\omega} + \mathfrak{a}_2 \frac{\sigma_2}{\omega}\right) \frac{\omega}{\sigma} = \mathfrak{a}_1 \frac{w}{\sqrt{w^2 + d^2}} + \mathfrak{a}_2 \frac{d}{\sqrt{w^2 + d^2}}$$

luego

$$\cos \beta = \frac{w}{\sqrt{w^2 + d^2}} \qquad \operatorname{sen} \beta = \frac{d}{\sqrt{w^2 + d^2}} \tag{11}$$

Tomando $\mathfrak{x}$ una sección recta del cilindro las (6) se convierten en

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} &= \mathfrak{a}_2 \sigma_2 \\ d\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{a}_3 \omega_1 \\ d\mathfrak{a}_3 &= -\mathfrak{a}_2 \omega_1 \\ d\mathfrak{a}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{6'}$$

y podemos enunciar:

PROPOSICIÓN. *Si $k = 0$, la familia de planos es una familia cilíndrica, el desvío d es independiente del hilo y coincide con el radio de curvatura de la sección recta. La torsión de un hilo está ligada al ángulo β que forma con las generatrices $\mathfrak{a}_1$ por las fórmulas* (11).

Si $k \neq 0$, siguen valiendo las (11). En este caso el desvío d depende del hilo y existe uno para el cual $d = 0$. Para éste las (6) se convierten en

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} &= \mathfrak{a}_1 \sigma_1 \\ d\mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{a}_2 \omega_3 \\ d\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{a}_3 \omega_1 - \mathfrak{a}_1 \omega_3 \\ d\mathfrak{a}_3 &= -\mathfrak{a}_2 \omega_1 \end{aligned} \tag{6''}$$

Luego, llamando ϱ y τ a los radios de curvatura y torsión de la arista de retroceso, y w_0 a la torsión del hilo sin desvío, tenemos (B. § 24).

PROPOSICIÓN. *Si $k \neq 0$, existe un hilo con desvío nulo que coincide con la arista de retroceso de la desarrollable. Si la arista de retroceso no se reduce a un punto, los invariantes del hilo están relacionados con los invariantes de la arista de retroceso por $w_0 = -\tau$, $k = -\dfrac{\tau}{\varrho}$.*

§ 5. HILOS DE UNA MISMA FAMILIA DE PLANOS.

Dado un hilo de invariantes k, d, w, los hilos sin desvío de la misma familia de planos satisfacen a la ecuación

$$d + \lambda k = 0$$

Luego podemos enunciar

PROPOSICIÓN. *En una familia de planos con $k = 0$ no existe ningún hilo sin desvío. Si $k \neq 0$, existe un hilo sin desvío (arista de retroceso, reducida a un punto si $w_0 = 0$).*

Obsérvese que el hilo sin desvío es el concepto dual de la banda osculatriz de la teoría de curvas.

Los hilos sin torsión satisfacen a la ecuación diferencial

$$w + \frac{d\lambda}{d\alpha} = 0$$

Luego tenemos:

PROPOSICIÓN. *En una familia de planos dependientes de un parámetro existen infinitos hilos sin torsión y dos de ellos cortan a las generatrices $\mathfrak{a}_1$ en puntos equidistantes.*

Esta proposición es el dual del teorema de O. BONNET sobre las bandas de curvatura de una misma curva. (B. § 23).

De las (11) se deduce que los hilos sin torsión son las trayectorias ortogonales de las generatrices $\mathfrak{a}_1$.

§ 6. CÁLCULO DE LOS INVARIANTES.

En general, una familia de planos dependientes de un parámetro u vendrá dada por un punto $\mathfrak{p}(u)$ y el vector normal unitario $\mathfrak{a}(u)$.

Teniendo en cuenta las fórmulas (6), tenemos que el elemento de ángulo viene dado (salvo el signo) por

$$\omega^2 = \omega_1^2 = < d\mathfrak{a},\ d\mathfrak{a} >$$

y el triedro asociado será

$$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}_2 = -\frac{d\,\mathfrak{a}}{\omega}, \qquad \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3$$

La curvatura viene dada por

$$k = \frac{< d\,\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2 >}{\omega} = \left[\mathfrak{a}, \frac{d\,\mathfrak{a}}{d\,\alpha}, \frac{d^2\,\mathfrak{a}}{d\,\alpha^2}\right]$$

La curva $\mathfrak{p}$ en general no será un hilo. Para que $\mathfrak{x} = \mathfrak{p} + \lambda\,\mathfrak{a}_1 + \mu\,\mathfrak{a}_2$ sea un hilo ha de verificarse $0 = < d\,\mathfrak{x},\ \mathfrak{a}_3 > = < d\,\mathfrak{p},\ \mathfrak{a}_3 > + \mu\,\omega$, o sea:

$$\mu = -\frac{< d\,\mathfrak{p},\ \mathfrak{a} >}{d\,\alpha}$$

Existe, pues, una familia de hilos dependientes de un parámetro λ cuyos desvío y torsión se obtienen por las fórmulas

$$d = \frac{< d\,\mathfrak{x},\ \mathfrak{a}_2 >}{\omega} = -\frac{< d\,\mathfrak{p},\ d\,\mathfrak{a} >}{< d\,\mathfrak{a},\ d\,\mathfrak{a} >} + k\,\lambda + \frac{d\,\mu}{d\,\alpha}$$

$$w = \frac{< d\,\mathfrak{x},\ \mathfrak{a}_1 >}{\omega} = \frac{[d\,\mathfrak{p},\ \mathfrak{a},\ d\,\mathfrak{a}]}{< d\,\mathfrak{a},\ d\,\mathfrak{a} >} + \frac{< d\,\mathfrak{p},\ \mathfrak{a} >}{d\,\alpha}\,k + \frac{d\,\lambda}{d\,\alpha}$$

§ 7. Familias de planos dependientes de dos paràmeros.

Si una familia de planos depende de dos parámetros u y v, entonces la familia de triedros ortonormales a ellos asociados depende de cinco parámetros: $u,\ v\ ;\ \lambda,\ \mu,\ \varphi$.

Como en el caso de las familias uniparamétricas, especializando convenientemente los parámetros secundarios obtendremos el triedro de « Frenet » de la familia que nos permitirá obtener teoremas análogos a los de Euler y Bonnet de la teoría puntual de superficies.

De las fórmulas (4) se deduce inmediatamente que los pfaffianos $\omega_1\ \omega_2$, σ_3 no dependen de las diferenciales de los parámetros secundarios. Distinguiremos dos casos: *a)* $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ y *b)* $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. El caso *b)* será estudiado en el § 11.

a) En este caso la imagen esférica $\mathfrak{a}_3$ es un abierto de la superficie esférica. Puesto que ω_1, ω_2 son independientes y σ_3 no depende de las diferenciales de los parámetros secundarios se tiene

$$\sigma_3 = a\,\omega_1 + b\,\omega_2$$

Diferenciando y teniendo en cuenta las condiciones de integrabilidad (2) se obtiene

$$(da - b\,\omega_3 - \sigma_2) \wedge \omega_1 + (db + a\,\omega_3 + \sigma_1) \wedge \omega_2 = 0$$

Puesto que ω_1 y ω_2 no dependen de las diferenciales de los parámetros secundarios resulta (con las mismas notaciones anteriores)

$$\begin{aligned} \delta a - b\,d\varphi + \operatorname{sen}\varphi\,d\lambda - \cos\varphi\,d\mu &= 0 \\ \delta b + a\,d\varphi + \cos\varphi\,d\lambda + \operatorname{sen}\varphi\,d\mu &= 0 \end{aligned}$$

y manteniendo $\varphi = 0$

$$\delta a - d\mu = 0, \qquad \delta b + d\lambda = 0$$

Luego, escogiendo convenientemente λ y μ se puede conseguir $a = b = 0$ o sea $\sigma_3 = 0$ y las ecuaciones del triedro móvil se reducen a

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} &= \mathfrak{a}_1\sigma_1 + \mathfrak{a}_2\sigma_2 \\ d\mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{a}_2\,\omega_3 - \mathfrak{a}_3\,\omega_2 \\ d\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{a}_3\,\omega_1 - \mathfrak{a}_1\,\omega_3 \\ d\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{a}_1\,\omega_2 - \mathfrak{a}_2\,\omega_1 \end{aligned} \tag{12}$$

Los cambios que mantienen la situación son los (3), (4) con $\lambda = 0$, $\mu = 0$. La única forma que depende de $d\varphi$ es ω_3.

Si $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \neq 0$ las fórmulas (12) coinciden con las fórmulas del triedro móvil de la superficie puntual $\mathfrak{x}$ (B. § 41). Si $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = 0$, entonces $\mathfrak{x}$ describe una curva y la familia de planos está constituida por los planos tangentes a dicha curva. Si $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, entonces $\mathfrak{x}$ es fijo y se trata de la familia de planos que pasan por el punto $\mathfrak{x}$.

§ 8. Triedro de Frenet e invariantes.

Tomando convenientemente φ obtendremos el triedro de «Frenet» de la familia de planos. Las (4) muestran que σ_1 y σ_2 no dependen de $d\varphi$, luego

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a\,\omega_1 + b\,\omega_2 \\ \sigma_2 &= c\,\omega_1 + e\,\omega_2 \end{aligned} \tag{13}$$

La tercera de las (2) da

$$a + e = 0 \tag{14}$$

Diferenciando las (13) y teniendo en cuenta las condiciones de integrabilidad (2) y (14), se obtiene

$$(da - (b + c)\,\omega_3) \wedge \omega_2 + (db + 2\,a\,\omega_3) \wedge \omega_2 = 0$$
$$(dc + 2\,a\,\omega_3) \wedge \omega_2 + (- da + (b + c)\,\omega_3) \wedge \omega_2 = 0$$

Puesto que ω_1 y ω_2 no dependen de $d\varphi$ resulta

$$\delta a - (b + c)\, d\varphi = 0, \quad \delta b + 2\,a\,d\varphi = 0, \quad \delta c + 2\,a\,d\varphi = 0 \tag{15}$$

De las dos últimas se deduce $\delta(b - c) = 0$, luego

$$b - c = q = \text{invariante} \tag{16}$$

Substituyendo en (15) $b = q + c$ se obtiene

$$\delta a - (2\,c + q)\,d\varphi = 0, \qquad \delta c + 2\,a\,d\varphi = 0$$

de donde eliminando $d\varphi$ resulta

$$\delta(a^2 + c^2 + qc) = 0, \qquad a^2 + c^2 + qc = \text{invariante} \tag{17}$$

La (17) pone de manifiesto que escogiendo convenientemente φ puede conseguirse $a = 0$, y teniendo en cuenta (14) resulta

$$\begin{gathered} \sigma_1 = - r_1\,\omega_2 \qquad \sigma_2 = r_2\,\omega_1 \\ \omega_3 = q_1\,\omega_1 + q_2\,\omega_2 \end{gathered} \tag{18}$$

Las funciones r_1, r_2, q_1, q_2 son las invariantes de la familia de planos y entre ellos existen relaciones que se deducen fácilmente de las condiciones de integrabilidad (2).

Si $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \neq 0$, las fórmulas (12) y (18) ponen de manifiesto que r_1 y r_2 son los radios de curvatura principales de la teoría de superficies y q_1 y q_2 están ligados a las curvaturas geodésicas g_1 y g_2 de las líneas de curvatura por $g_1 = r_1 q_2$, $g_2 = - r_2 q_1$ (B. §§ 43 y 61).

Si $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = 0$, entonces $ae - bc = 0$, luego de (14) y (16) resulta

$$a^2 + c^2 + qc = 0$$

por tanto, siempre podrá conseguirse $a = 0$, $c = 0$, es decir, $r_2 = 0$.

En este caso las condiciones de integrabilidad (2) dan $(r_1 \neq 0)$:

$$0 = d\,\sigma_1 = - dr_1 \wedge \omega_2 - r_1\,d\,\omega_2, \quad 0 = q_1, \quad d\,\omega_1 = 0$$

o sea, poniendo $\sigma_1 = du$, $\omega_1 = dv$:

$$\frac{\partial r_1}{\partial v} = - r_1 q_2, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial v} = - (1 + q_2^2) \tag{19}$$

$v =$ constante da una banda de la curva $\mathfrak{x}$ cuyas ecuaciones del triedro móvil son

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} &= \mathfrak{a}_1 du \\ d\mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{a}_3 \omega_2 - \mathfrak{a}_2 \omega_3 \\ d\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{a}_1 \omega_3 \\ d\mathfrak{a}_3 &= - \mathfrak{a}_1 \omega_2 \end{aligned} \tag{20}$$

con

$$\omega_2 = - \frac{1}{r_1} du, \qquad \omega_3 = - \frac{q_2}{r_1} du$$

Luego la curvatura k, y torsión w de la curva $\mathfrak{x}$ son (B. § 23) :

$$k^2 = \frac{1 + q_2^2}{r_1^2}, \qquad w = \frac{\dfrac{\partial q_2}{\partial u}}{1 + q_2^2}$$

De las (19) se deduce que k y w no dependen de v, como debe suceder.

§ 9. Desarrollables de la familia.

Consideremos una familia de planos dependientes de dos parámetros (brevemente superficie) cuyas ecuaciones diferenciales del triedro de Frenet son las (12) con las condiciones (18), y en ella una familia de planos dependientes de un parámetro (brevemente desarrollable) cuya generatriz $\mathfrak{a}_1^*$ forma un ángulo τ con $\mathfrak{a}_1$, es decir :

$$\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{a}_1 \cos \tau + \mathfrak{a}_2 \operatorname{sen} \tau$$

La $\mathfrak{x}$ de la (12) determina un hilo de la desarrollable cuyas fórmulas del triedro móvil son

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} &= \mathfrak{a}_1^* \sigma_1^* + \mathfrak{a}_2^* \sigma_2^* \\ d\mathfrak{a}_1^* &= \mathfrak{a}_2^* \omega_1^* \\ d\mathfrak{a}_2^* &= \mathfrak{a}_3^* \omega_1^* - \mathfrak{a}_1^* \omega_3^* \\ d\mathfrak{a}_3^* &= - \mathfrak{a}_2^* \omega_1^* \end{aligned}$$

con

$$\omega_1^* = \omega^* = \omega_1 \cos \tau + \omega_2 \operatorname{sen} \tau, \quad 0 = \omega_2^* = -\omega_1 \operatorname{sen} \tau + \omega_2 \cos \tau,$$
$$\omega_3^* = \omega_3 + d\tau$$
$$\sigma_1^* = \sigma_1 \cos \tau + \sigma_2 \operatorname{sen} \tau \qquad \sigma_2^* = -\sigma_1 \operatorname{sen} \tau + \sigma_2 \cos \tau$$

Los invariantes de este hilo vienen dados por las fórmulas

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{\sigma_1^*}{\omega^*} = \frac{\sigma_1 \operatorname{sen} \tau + \sigma_2 \cos \tau}{\omega^*} = (r_2 - r_1) \operatorname{sen} \tau \cos \tau \\ d^* &= \frac{\sigma_2^*}{\omega^*} = \frac{-\sigma_1 \operatorname{sen} \tau + \sigma_2 \cos \tau}{\omega^*} = -(r_1 \operatorname{sen}^2 \tau + r_2 \cos^2 \tau) \qquad (21) \\ k^* &= \frac{\omega_3^*}{\omega^*} = \frac{\omega_3 + d\tau}{\omega^*} \end{aligned}$$

Llamaremos *desarrollables de curvatura* a aquellas cuyo hilo tenga torsión $w = 0$. Vienen dadas por la ecuación

$$\sigma_1 \cos \tau + \sigma_2 \operatorname{sen} \tau = 0 \qquad \text{o sea,} \qquad \sigma_1 \omega_1 + \sigma_2 \omega_2 = 0$$

de donde se tiene (B. § 62):

PROPOSICIÓN. *Las desarrollables de curvatura son aquellas cuya línea de contacto con la superficie es una línea de curvatura,* $(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \neq 0)$.

Llamaremos *desarrollables asintóticas* a aquellas cuyo hilo tenga desvío $d = 0$. Vienen dadas por la ecuación

$$-\sigma_1 \operatorname{sen} \tau + \sigma_2 \cos \tau = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \sigma_2 \omega_1 - \sigma_1 \omega_2 = 0$$

de donde se tiene (B. § 61):

PROPOSICIÓN. *Las desarrollables asintóticas son aquellas cuya línea de contacto con la superficie es una asintótica,* $(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \neq 0)$.

Llamaremos *desarrollables geodésicas* a aquellas que tengan curvatura $k = 0$, es decir, a los cilindros circunscritos a la superficie. Vienen dadas por la ecuación diferencial

$$\omega_3 + d\tau = 0 \qquad \tau = \operatorname{arctg} \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

PROPOSICIÓN. *Las desarrollables geodésicas son las que hacen estacionaria la integral* $\int \omega$.

En efecto, basta observar que la integral $\int \omega$ es la longitud del arco de la imagen esférica, luego para que sea estacionaria es necesario y basta que la imagen esférica sea una geodésica.

En el caso de la familia de planos tangentes a una curva ($\sigma_2 = 0$) la ecuación de las desarrollables de curvatura se reduce a $\sigma_1 \omega_1 = 0$. $\sigma_1 = 0$ equivale a $\mathfrak{x} =$ constante y da los haces de planos de arista la tangente en $\mathfrak{x}$ a la curva. $\omega_1 = 0$ da las bandas de curvatura como se deduce inmediatamente de (12) poniendo $\sigma_2 = 0$, $\omega_1 = 0$. La ecuación de las desarrollables asintóticas se reduce a $\sigma_1 \omega_2 = 0$, o sea, teniendo en cuenta (18), $\sigma_1^2 = 0$, que da los haces de planos de arista tangente a la curva $\mathfrak{x}$. En este caso existe una asintótica singular, la desarrollable osculatriz, que es el dual de la arista de retroceso de las superficies desarrollables consideradas como conjunto de puntos.

§ 10. Duales de los teoremas de Euler y Bonnet de la teoría puntual de superficies.

Sea $\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{a}_1 \cos \tau + \mathfrak{a}_2 \operatorname{sen} \tau$ la generatriz de una desarrollable circunscrita a la superficie y $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + \lambda \mathfrak{a}_1^*$ su arista de retroceso, entonces las fórmulas (21) y (10) dan para el hilo con $d = 0$.

$$\lambda k = - d^* = r_1 \operatorname{sen}^2 \tau + r_2 \cos^2 \tau$$

$$w = (r_2 - r_1) \operatorname{sen} \tau \cos \tau + \frac{d\lambda}{\omega}$$

es decir

Proposición. *Si una desarrollable circunscrita a una superficie tiene una generatriz que forma un ángulo τ con la generatriz $\mathfrak{a}_1$ de la desarrollable de curvatura y el punto de la arista de retroceso está a una distancia λ del punto de contacto con la superficie, se verifica, llamando k y w a la curvatura y torsión del hilo con desvío $d = 0$,*

$$\lambda k = r_1 \operatorname{sen}^2 \tau + r_2 \cos^2 \tau$$

$$w - \frac{d\lambda}{w} = (r_2 - r_1) \operatorname{sen} \tau \cos \tau$$

Esta proposición es el dual de los teorema de Euler y Bonnet que relacionan la curvatura y torsión de una curva trazada sobre una superficie con las dos curvaturas principales (B. § 62) (*).

(*) Véase también G. Darboux. *Theorie générale des Surfaces* — II Partie. Livre V. Chap. I.

§ 11. El caso $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$

Si $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$, entonces $\mathfrak{a}_3$ describe una curva esférica y la familia de planos está constituída por los planos perpendiculares a las generatrices de un cono, o lo que es lo mismo, por los planos tangentes a una curva impropia.

Si tomamos por triedro $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, el triedro de la banda esférica $\mathfrak{a}_3$, y $\mathfrak{x}$ la intersección del plano con la generatriz del cono perpendicular a él, resulta :

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} &= \mathfrak{a}_1 \sigma_1 + \mathfrak{a}_3 \sigma_3 \\ d\mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{a}_2 \omega_3 - \mathfrak{a}_3 \omega_2 \\ d\mathfrak{a}_2 &= - \mathfrak{a}_1 \omega_3 \\ d\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{a}_1 \omega_2 \end{aligned} \tag{22}$$

y si además tomamos como parámetros el arco u de la curva esférica y la longitud v de la generatriz del cono, resulta :

$$\sigma_1 = v\,du \qquad \sigma_3 = dv \qquad \omega_2 = du \qquad \omega_3 = q\,du$$

y las condiciones de integrabilidad dan $dq \wedge du = 0$.

El único invariante q es la curvatura geodésica de $\mathfrak{a}_3$.

Las desarrollables de la familia vendrán dadas por funciones $v \neq \varphi(u)$ cuyos invariantes pueden calcularse como se ha visto en el § 6.

$$\omega^2 = < d\mathfrak{a}_3 d\mathfrak{a}_3 > = du^2, \quad \omega = du, \quad \mathfrak{a}_2^* = - \mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{a}_2$$

$$k = - \frac{< d\mathfrak{a}_1^*, d\mathfrak{a}_3^* >}{\omega^2} = q$$

la arista de retroceso viene dada por $\mathfrak{x} + \lambda \mathfrak{a}_1^* + \mu \mathfrak{a}_2^*$ con

$$\mu = - \frac{< d\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_3 >}{\omega} = - \varphi'(u) ;$$

$$0 = - \frac{< d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{a}_3 >}{\omega^2} + q\lambda - \varphi'' = q\lambda - (\varphi + \varphi'')$$

y la torsión por

$$w = \frac{[d\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_3, d\mathfrak{a}_1]}{\omega^2} + \frac{< d\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}_3 >}{\omega} q + \frac{d\lambda}{du} = q\varphi' + \frac{d}{du}\left(\frac{\varphi + \varphi''}{q}\right)$$

En el caso que $q = 0$ se trata de la familia de planos paralelos a una dirección fija y todas las desarrollables son cilindros cuyo desvío es

$$d = - \frac{< d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{a}_3 >}{\omega^2} + \frac{d\mu}{du} = - (\varphi + \varphi'')$$

Las consideraciones geométricas que nos han conducido a las fórmulas (22), pueden sustituirse por el siguiente razonamiento analítico .

Las formas de PFAFF ω_1 y ω_2 no pueden ser ambas nulas (puesto que entonces $\mathfrak{a}_3$ sería fijo y la familia de planos no dependería más que de un parámetro), y siempre puede suponerse $\omega_2 \neq 0$. De $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$ se sigue $\omega_1 = a\, \omega_2$ y por diferenciación exterior, teniendo en cuenta las condiciones de integrabilidad (2) resulta

$$(da - (1 + a^2)\, \omega_3) \wedge \omega_2 = 0$$

y puesto que ω_2 no depende de las diferenciales de los parámetros secundarios

$$\delta a - (1 + a^2)\, d\varphi = 0$$

luego, tomando convenientemente φ puede conseguirse $a = 0$, $\omega_1 = 0$. Los cambios que conservan la situación son los (3), (4) con $\varphi = 0$.

De $\omega_1 = 0$ se deduce (vid. (2)) $\omega_3 \wedge \omega_2 = 0$, luego $\omega_3 = q\, \omega_2$ y q es un invariante como se deduce inmediatamente de las (4).

De las condiciones de integrabilidad resulta $d\, \omega_2 = 0$, $dq \wedge \omega_2 = 0$ luego podemos poner $\omega_2 = du$, $q = q\,(u)$.

El sistema de PFAFF

$$\begin{aligned} \theta_1 &\equiv \sigma_1 + d\,\lambda - \mu q\, du - v\, du = 0 \\ \theta_2 &\equiv \sigma_2 + d\mu + \lambda q\, du = 0 \\ \theta_3 &\equiv \sigma_3 - \lambda\, du - dv = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

es completamente integrable, pues de las condiciones (2) se sigue :

$$\begin{aligned} d\,\theta_1 &= d\sigma_1 - q\, d\mu \wedge du - dv \wedge du = q\, du \wedge \sigma_2 - du \wedge \sigma_3 - q\, d\mu \wedge du - \\ &\quad - dv \wedge du = (\sigma_3 - dv) \wedge du - q\,(\sigma_2 + d\mu) \wedge du = \theta_3 \wedge du - q\,\theta_2 \wedge du \\ d\,\theta_2 &= d\sigma_2 + q\, d\lambda \wedge du = - \omega_3 \wedge \sigma_1 + q\, d\lambda \wedge du = q\theta_1 \wedge du \\ d\,\theta_3 &= d\sigma_3 - d\lambda \wedge du = \omega_2 \wedge \sigma_1 - d\lambda \wedge du = - \theta_1 \wedge du \end{aligned}$$

luego, tomando λ, μ, v soluciones de (23), obtenemos los (22).