CONJUNTO DE VALORES DE UN COEFICIENTE DIFERENCIAL

POR

BALTASAR R.-SALINAS

Dada una función real f, definida en un intervalo I, diremos que f posee en el punto x_0 de I una *diferencial de orden n* si para x perteneciente a I se tiene

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu\,!} + o\,(x-x_0)^n$$

cuando $x \to x_0$.

Entonces, como el coeficiente a_n de $(x-x_0)^n/n\,!$ está unívocamente determinado por f, n y x_0, podemos designarle sin ninguna ambigüedad por $f_n(x_0)$ y llamarle n^{mo} *coeficiente diferencial* (o *de orden n*) *de f en el punto* x_0. Con esta notación se puede escribir (1) así:

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x_0) \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu\,!} + o\,(x-x_0)^n \qquad (x \in I)$$

para $x \to x_0$.

Si existe la n^{ma} derivada $f^{(n)}(x_0)$ de f en el punto $x_0 \in I$ se puede encontrar un entorno de x_0 en I de forma que existan las $n-1$ primeras derivadas de f en él. Por tanto, aplicando $n-1$ veces la fórmula de l' HOSPITAL, tendremos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} f^{(\nu)}(x_0) \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu\,!}}{\dfrac{(x-x_0)^n}{n\,!}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\right] = 0$$

y, por consiguiente,

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f^{(\nu)}(x_0) \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} + o(x-x_0)^n$$

y

$$(4) \qquad f_\nu(x_0) = f^{(\nu)}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

La recíproca de esta proposición no es cierta para $n \geq 2$ porque aunque f posea el n^{mo} coeficiente diferencial $f_n(x_0)$ pueden no existir las derivadas de orden $\nu \geq 2$. Así pasa en el caso que

$$f(x) = e^{-x^{-2}} \operatorname{sen} e^{x^{-2}} \quad \text{para} \quad x \neq 0$$

y

$$f(0) = 0$$

para $n \geq 2$ y $x_0 = 0$. Desde luego, si f posee el n^{mo} coeficiente diferencial $f_n(x_0)$ y $n \geq 1$, la derivada $f'(x_0)$ existe y $f'(x_0) = f_1(x_0)$.

Corominas ha extendido en su tesis (1) los teoremas fundamentales del cálculo diferencial, es decir, los teoremas de Rolle, de valor medio, etc. Estos resultados los vamos a mejorar aquí con los teoremas I y II.

Teorema I. *Si la función real f posee n^{mo} coeficiente diferencial f_n en un intervalo I y no existe la derivada $f^{(n)}(x_0)$ en un punto $x_0 \in I$, cualquiera que sea el número real λ existe un punto $\xi \neq x_0$ de I tal que $f_n(\xi) = \lambda$, es decir, el conjunto de los valores de f_n en $I - \{x_0\}$ (2) es la recta real R.*

Corolario I. *Sean f y g dos funciones reales definidas en un intervalo $I \subset R$. Si f posee n^{ma} diferencial f_n y existe la n^{ma} derivada $g^{(n)}$ de g de forma que f_n y $g_n = g^{(n)}$ no se anulen simultáneamente y no exista la derivada $f^{(n)}(x_0)$ en un punto $x_0 \in I$, cualquiera que sea el número real λ existe un punto $\xi \in I - \{x_0\}$ tal que $f_n(\xi)/g_n(\xi) = \lambda$, es decir, el conjunto de los valores de f_n/g_n en $I - \{x_0\}$ es la recta real.*

Este corolario resulta fácilmente aplicando el teorema I a $f - \lambda g$.

También como consecuencia del teorema I se obtiene:

---

(1) Corominas, E.: *Contribution a la théorie de la dérivation d'ordre supérieur*. Bull. de la Soc. Math. de France, Vol. 81 (1953), 177-222.

(2) Designamos por $I - \{x_0\}$ el conjunto de los puntos $x \neq x_0$ de I y por $I - x_0$ el intervalo que se obtiene de I mediante la aplicación $x \to x - x_0$.

TEOREMA II. *Sea Φ una función real de las $p\,(n+1)$ variables* $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_p^{(0)}, y_1^{(1)}, \ldots, y_p^{(1)}, \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_p^{(n-1)}$, *definida en $I^p R^{np}$ excepto en los $\binom{p}{2}$ hiperplanos $x_i = x_j$, siendo R la recta real e I un intervalo de ella, tal que para cada función real f, n veces derivable en I, y cada punto $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de I^p existe un punto ξ interior de I que satisface*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1), \ldots, f(x_p), f'(x_1), \ldots, f'(x_p), \ldots, f^{(n-1)}(x_p)) = f^{(n)}(\xi). \tag{5.1}$$

Entonces, se puede generalizar (5.1) afirmando que para cada función real f que posea n^{ma} diferencial en I y cada punto $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de I^p existe un punto ξ interior de I que satisface

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1), \ldots, f(x_p), f_1(x_1), \ldots, f_1(x_p), \ldots, f_{n-1}(x_p)) = f_n(\xi). \tag{5.2}$$

En efecto, si existe la derivada $f^{(n)}$ la fórmula (5.2) es válida por verificarse (5.1) y ser $f_n = f^{(n)}$, y si no existe la derivada $f^{(n)}(x_0)$ en un punto $x_0 \in I$ también lo es por tomar f_n, según el teorema I, todos los valores reales en el interior de I.

En el caso que Φ sea una función lineal de $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_p^{(0)}, y_1^{(1)}, \ldots, y_p^{(n-1)}$, del teorema II se deduce:

COROLARIO II. *Si f y g son dos funciones reales definidas en un intervalo $I \subset R$ que poseen n^{mos} coeficientes diferenciales f_n y g_n en I que no se anulan simultáneamente, cualesquiera que sean los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de I, existe un punto ξ interior de I que satisface*

$$\frac{\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1), \ldots, f_{n-1}(x_p))}{\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, g(x_1), \ldots, g_{n-1}(x_p))} = \frac{f_n(\xi)}{g_n(\xi)}, \tag{6}$$

siempre que $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, g(x_1), \ldots, g_{n-1}(x_p)) \neq 0$.

Estos resultados comprenden los teoremas III, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII y XIII del trabajo anteriormente citado de COROMINAS.

Con esta contribución ponemos de manifiesto que el interés fundamental que tienen los teoremas clásicos del cálculo diferencial: teorema de ROLLE, de valor medio, etc., reside en que « generalmente» el conjunto de los valores de una derivada en un intervalo es un subconjunto propio de la recta real R y que, por tanto, no se pueden superar dichos teoremas mediante una proposición análoga al teorema I.

Por las consideraciones que hemos hecho será suficiente probar el teorema I para que queden demostrados los demás resultados. Esto es precisamente lo que nos proponemos realizar ahora.

Dada una función real f, definida en un intervalo I de R, y un entero $n > 0$ vamos asociarles una función F definida en la banda

$$\Omega = \left\{ x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \;\middle|\; \sum_{\nu=1}^{n} x^\nu \in I_0 \right\}$$

de R^n y una función de intervalo Φ poniendo

$$F(x) = F(x^1, x^2, \ldots, x^n) = f(x^1 + x^2 + \ldots + x^n) \tag{7}$$

y

$$\Phi(I) = \Delta_{x_1 x_2} F = \sum_{k=k_1+\ldots+k_n} (-1)^k F(x^1_{k_1}, x^2_{k_2}, \ldots, x^n_{k_n}) \qquad (k_\nu = 1, 2) \tag{8}$$

para cada intervalo

$$I = \{x \mid x_1^k \leq x^k \leq x_2^k,\ k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \Omega.$$

Lema 1. *Si f posee n^{mo} coeficiente diferencial $f_n(a)$ en el punto $a \in I$ resulta*

$$\lim \frac{\Delta_{x_1 x_2} F}{\prod_{k=1}^{n} (x^k - x_1^k)} = f_n(a) \tag{9}$$

cuando x_1 y x_2 tienden hacia un punto $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ tal que $\sum_{k=1}^{n} x_0^k = a$ de forma que $x_1^k \leq x_0^k \leq x_2^k$ y que todas las sucesiones

$$\{a_{hk}\} = \{(x_2^k - x_1^k)/(x_2^h - x_1^h)\}$$

sean acotadas para $h, k = 1, 2, \ldots, n$, es decir, la derivada ordinaria $\Phi'(x_0) = f_n(a)$ si $\sum_{k=1}^{n} x_0^k = a$.

DEMOSTRACIÓN. Basta tener presente (7), (8) y que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}^i\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f_\nu(a)}{\nu!}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{k_i}^i - x_0^i)\right]^\nu + o\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{k_i}^i - x_0^i)\right]^n$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f_\nu(a)}{\nu!}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{k_i}^i - x_0^i)\right]^\nu + o\left[\sum_{i=1}^{n}(x_2^i - x_1^i)\right]^n$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f_\nu(a)}{\nu!}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{k_i}^i - x_0^i)\right]^\nu + o\left[\prod_{k=1}^{n}(x_2^k - x_1^k)\right]$$

LEMA 2. *Si Φ es una función aditiva de intervalo, definida en una región Ω de R^n, tal que la derivada ordinaria $\Phi'(x) \leq 0$ en Ω, resulta $\Phi(I) \leq 0$ para cada intervalo compacto $I \subset \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea

$$I = \{x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \mid x_1^k \leq x^k \leq x_2^k\} \subset \Omega.$$

Entonces, por bisección de los lados de I se obtienen $N = 2^n$ intervalos $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(N)}$ para los que se verifica

$$\Phi(I) = \sum_{\nu=1}^{N} \Phi(I^{(\nu)}).$$

Por tanto, se puede encontrar un intervalo $I_2 = I_{(\nu_0)}$ de modo que

$$\Phi(I) \leq 2^n \Phi(I_1).$$

Repitiendo este proceso indefinidamente se determina una sucesión decreciente de intervalos $\{I_\nu\}$, convergente hacia un punto $x_0 \in I$, que satisface

$$\Phi(I_\nu) \leq 2^n \Phi(I_{\nu+1}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

y, por consiguiente,

$$\Phi(I) \leq 2^{n\nu} \Phi(I_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

De esto resulta

$$\Phi(I) \leq |I| \lim \frac{\Phi(I_\nu)}{|I_\nu|} = |I|\,\Phi'(x_0) \leq 0.$$

Lema 3. *Sea f una función real definida en el intervalo cerrado $I = [a, b]$. Si el $(n-1)^{mo}$ coeficiente diferencial f_{n-1} existe en I y f_n satisface la desigualdad $f_n(x) \leq K$ en $I^0 = (a, b)$ resulta*

$$\frac{f_{n-1}(b) - f_{n-1}(a)}{b-a} \leq K. \tag{10}$$

Demostración. Supongamos $K = 0$, entonces podemos aplicar el lema 2 a la función de intervalo Φ definida por (7) y (8) para cada intervalo

$$J = \{x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \mid x^k \leq x^k \leq x_2^k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$$

contenido en la región

$$\Omega^0 = \left\{ x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \,\middle|\, \sum_{\nu=1}^{n} x^\nu \in I^0 \right\} \text{(3)}$$

puesto que por el lema 1 se tiene $\Phi'(x_0) = f_n\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_0^\nu\right) \leq 0$ en Ω^0. Así resulta

$$\begin{aligned}
\Phi(J) &= \sum_{k=k_1+\ldots+k_n} (-1)^k f(x_{k_1}^1 + x_k^2 + \ldots + x_{k_n}^n) \qquad (k_\nu = 1, 2) \\
&= \sum_{k=k_1+\ldots+k_{n-1}} (-1)^k f(x_{k_1}^1 + \ldots + x_{k_{n-1}}^{n-1} + x_2^n) \\
&\quad - \sum_{k=k_1+\ldots+k_{n-1}} (-1)^k f(x_{k_1}^1 + \ldots + x_{k_{n-1}}^{n-1} + x_1^n) = 0
\end{aligned}$$

para $J \subset \Omega^0$ y también para $J \subset \Omega$ por ser f continua en I, de donde por el lema 1 se deduce

$$f_{n-1}(\xi) - f_{n-1}(a) \leq 0$$

para $\xi \in I^0$ si se toma

$$x_1^1 = x_1^2 = \ldots = x_1^{n-1} = 0, \qquad x_1^n = a$$

y

$$x_2^1 = x_2^2 = \ldots = x_2^{n-1} = \frac{b-\xi}{n-1}\,\delta, \qquad x_2^n = \xi$$

con $0 < \delta < 1$ y se hace $\delta \to 0$ después de dividir por $\prod_{k=1}^{n-1} (x_2^k - x_1^k)$.

(3) Designamos por I^0 el interior de I.

Como de manera análoga se obtiene

$$f_{n-1}(b) - f_{n-1}(\xi) \leq 0$$

para $\xi \in I^0$, resulta

$$f_{n-1}(b) - f_{n-1}(a) \leq 0.$$

Una vez demostrada la desigualdad (10) para $K = 0$ se pasa al caso general aplicando dicho resultado a $f(x) - Kx^n/n!$

TEOREMA 1. *Si la función real f posee n^{mo} coeficiente diferencial acotado superiormente o inferiormente en un intervalo I, f es derivable n veces en I y, por consiguiente, $f^{(n)} = f_n$* (4).

DEMOSTRACIÓN. Sea 0 un punto de I distinto del extremo derecho y supongamos $n \geq 2$,

$$f(0) = f_1(0) = \ldots = f_n(0) = 0 \qquad (f(x) = o(x^n)) \tag{11}$$

y que existe un número K tal que

$$f_n(x) \leq K \tag{12}$$

para $x \in I$, es decir, que f_n es acotada superiormente. Entonces, aplicando reiteradamente el lema 3 resulta para $x > 0$,

$$f_{n-1}(x) \leq K\,x, \ldots, f_\nu(x) \leq K\,x^{n-\nu}, \ldots \qquad (\nu \leq n)$$

y, en particular,

$$f_2(x) \leq K\,x^{n-2}. \tag{13}$$

Nos proponemos demostrar ahora que

$$f_1(x) = o(x^{n-1}) \tag{14}$$

para $x \to 0$ y $x > 0$, es decir, que no se puede encontrar un número $\alpha > 0$ y una sucesión positiva $x_\nu \to 0$ de manera que

$$|f_1(x_\nu)| > \alpha\,x_\nu^{n-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

(4) Este teorema ha sido demostrado por COROMINAS, loc. cit., pág. 221, basándose en los teoremas de valor medio que previamente obtiene.

En efecto, supongamos que existe un número $\alpha > 0$ y una sucesión positiva $x_\nu \to 0$ que verifican

$$f_1(x_\nu) > \alpha\, x_\nu^{n-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

y sea θ un número positivo, menor que 1 y suficientemente próximo a 1 de modo que

$$\beta = \alpha - (1 - \theta) K > 0.$$

Entonces, el lema 3 nos permite escribir, teniendo presente (13), la desigualdad

$$\frac{f_1(x_\nu) - f_1(x'_\nu)}{x_\nu - x'_\nu} \leq K x_\nu^{n-2}$$

para $\theta\, x_\nu < x'_\nu < x_\nu$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} f_1(x'_\nu) &\geq f_1(x_\nu) - K(x_\nu - x'_\nu)\, x_\nu^{n-2} \\ &> \alpha\, x_\nu^{n-1} - K(1 - \theta)\, x_\nu^{n-1} \\ &= \beta\, x_\nu^{n-1} \end{aligned}$$

para $\nu = 1, 2, \ldots$. De donde se sigue aplicando el lema 3 a $-f$ esta otra desigualdad

$$\frac{f(x_\nu) - f(\theta\, x_\nu)}{x_\nu - \theta\, x_\nu} \geq \beta\, x_\nu^{n-1} \qquad (\beta > 0)$$

para $\nu = 1, 2, \ldots$, con lo cual se llega a una contradicción puesto que de $f(x) = o(x^n)$ resulta

$$\frac{f(x_\nu) - f(\theta\, x_\nu)}{x_\nu - \theta\, x_\nu} = o\left(x_\nu^{n-1}\right) \tag{15}$$

para $\nu \to \infty$.

De igual forma si suponemos que existe un número $\alpha > 0$ y una sucesión positiva $x_\nu \to 0$ que verifican

$$f_1(x_\nu) < -\alpha\, x_\nu^{n-1} \qquad (v = 1, 2, \ldots)$$

se llega a un absurdo. En efecto, si elegimos el número $\theta > 1$ suficientemente próximo a 1 de forma que

$$\beta = \alpha - (\theta - 1) K > 0$$

y aplicamos el lema 3 de manera análoga como antes, resulta

$$\frac{f_1(x'_\nu) - f_1(x_\nu)}{x'_\nu - x_\nu} \leq K x_\nu^{n-2}$$

para $x_\nu < x'_\nu < \theta x_\nu$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} f_1(x'_\nu) &< f_1(x_\nu) + K(x'_\nu - x_\nu)\, x_\nu^{n-2} \\ &< -\alpha x_\nu^{n-1} + K(\theta - 1)\, x_\nu^{n-1} \\ &= -\beta x_\nu^{n-1} \end{aligned}$$

y

$$\frac{f(\theta x_\nu) - f(x_\nu)}{\theta x_\nu - x_\nu} \leq -\beta x_\nu^{n-1} \qquad (\beta > 0),$$

de donde se llega a una contradicción observando que (15) es también válida para $\theta > 1$.

De la relación (14) se deduce que existe la derivada a la derecha de $f_1 = f'$ en el punto $x = 0$ si 0 no es extremo derecho de I e igualmente la derivada a la izquierda si 0 no es extremo izquierdo de I, pues basta aplicar el resultado precedente a la función g definida por $g(x) = (-1)^n f(-x)$ en $-I$. Por tanto, en todos los casos existe $f''(0)\ (= 0)$.

Si de manera general prescindimos de la restricción (11) y aplicamos el resultado que acabamos de probar a la función g definida en el intervalo $I - x_0$ por

$$g(x) = f(x_0 + x) - \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x_0) \frac{x^\nu}{\nu!}$$

para $x_0 \in I$, suponiendo f_n superiormente acotada, resulta que la derivada $f'_1 = f_2$ y que f_n es el $(n-1)^{mo}$ coeficiente diferencial de f_1 y, por consiguiente, que la derivada $f'_\nu = f_{\nu+1}$ y que f_n es el $(n-\nu)^{mo}$ coeficiente diferencial de $f_\nu\ (1 \leq \nu \leq n-1)$. De esto se deduce inmediatamente que existe la derivada $f^{(n)}\ (= f_n)$.

Igualmente se llega a la misma conclusión si se supone f acotada inferiormente.

LEMA 4. *Sea Φ una función aditiva de intervalo, continua y con derivada ordinaria Φ' en una región Ω de R^n. Si*

$$\Phi'(x_1) < 0 \quad \text{y} \quad \Phi'(x_2) > 0$$

en dos puntos x_1 y x_2 de Ω, existe al menos un punto $x_0 \in \Omega$ que satisface

$$\Phi'(x_0) = 0.$$

Demostración. Siendo Ω un conjunto abierto y conexo se puede encontrar una poligonal $\gamma \subset \Omega$ de un número finito de lados que una x_1 con x_2. Entonces, por ser γ un subconjunto compacto de Ω existe un número $\varrho > 0$ tal que cada esfera de radio ϱ que tenga por centro un punto de γ esté contenida en Ω.

Como

$$\Phi'(x_1) < 0 \quad \text{y} \quad \Phi'(x_2) > 0,$$

se puede determinar un número λ: $0 < \lambda < \varrho/\sqrt{n}$ de forma que si designamos por $I_x^{(\lambda)}$ un intervalo cúbico de R^n, de centro x y de lado λ, se verifique

$$\Phi(I_{x_1}^{(\lambda)}) < 0 \quad \text{y} \quad \Phi(I_{x_2}^{(\lambda)}) > 0.$$

De esto se deduce, siendo $\Phi(I_x^{(\lambda)})$ una función continua de x en el conjunto conexo γ, que existe un intervalo $I_0 = I_x^{(\lambda)}$ con $x \in \gamma$ que satisface

$$\Phi(I_0) = 0.$$

Por tanto, si por bisección de los lados de I_0 subdividimos I_0 en $N = 2^n$ intervalos cerrados congruentes : $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(N)}$, tendremos

$$\sum_{\nu=1}^{N} \Phi(I^{(\nu)}) = \Phi(I_0) = 0.$$

Si para alguno de estos intervalos $I^{(\nu)}$ se verifica

$$\Phi(I^{(\nu)}) = 0$$

designaremos por I_1 este intervalo. En caso contrario existen dos intervalos $I^{(\nu_1)}$ e $I^{(\nu_2)}$ que satisfacen

$$\Phi(I^{(\nu_1)}) < 0 \quad \text{y} \quad \Phi(I^{(\nu_2)}) > 0$$

y, por tanto, se puede determinar un intervalo $I_1 \subset I_0$, congruente con ellos, de forma que

$$\Phi(I_1) = 0.$$

Repitiendo indefinidamente este proceso se construye una sucesión decreciente $\{I_\nu\}$ de intervalos cúbicos cerrados cuyos lados $\lambda_\nu = \lambda/2^\nu \to 0$ y $\Phi(I_\nu) = 0$. Por consiguiente, si designamos por x_0 el límite de $\{I_\nu\}$, tendremos

$$\Phi'(x_0) = \lim_{\nu} \frac{\Phi(I_\nu)}{|I_\nu|} = 0.$$

TEOREMA 2. *Si la función real f posee n^{mo} coeficiente diferencial f_n $(n \geq 1)$ en un intervalo $I \subset R$, cualesquiera que sean los puntos α y β de I y el número real λ que verifique*

$$f_n(\alpha) < \lambda < f_n(\beta) \qquad o \qquad f_n(\alpha) > \lambda > f_n(\beta),$$

existe un punto $\xi \in (\alpha, \beta)$ tal que

$$f_n(\xi) = \lambda,$$

es decir, f_n posee la propiedad de DARBOUX ([5]).

DEMOSTRACIÓN. Resulta como consecuencia de los lemas 1 y 4.

Ahora podemos ya demostrar el teorema I. En efecto, como por el teorema 1 se pueden encontrar dos puntos x_1 y x_2 de I, a la izquierda o derecha de x_0, de modo que

$$f_n(x_1) < \lambda < f_n(x_2),$$

por el teorema 2 resulta que existe un punto $\xi \in I - \{x_0\}$ tal que

$$f_n(\xi) = \lambda.$$

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

([5]) Véase COROMINAS, loc. cit., pág. 199.