

## IL MODELLO DI KLEIN E LA COSMOLOGIA

per

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)

### I — L'UNIVERSO DI DE SITTER E LA COSMOLOGIA

In questi ultimi anni si é avuta una vera e propria rivoluzione nel campo della astrofisica e della Cosmologia, e con la scoperta delle quasar, delle pulsar, delle velocità iper-c e dell'eco del Big-Bang, ci si é convinti che occorre passare a nuove e più perfezionate teorie, per poter comprendere tutto ciò che si osserva nel cielo. Si rende quindi necessaria una profonda revisione della fisica relativistica di Einstein, anzi, secondo Hoyle, ci troviamo alla vigilia di un grande cambiamento nella scienza, e cioè la nascita di una nuova fisica, a partire dalla Astronomia.

In una serie di ricerche, a partire dal 1955, ho fatto vedere che utilizzando il gruppo di Fantappié ed il cronotopo di De Sitter a curvatura costante, si può costruire una nuova teoria, la «relatività proiettiva», la quale perfeziona la relatività ristretta, in modo da renderla adatta allo studio dei fenomeni su scala cosmica [1].

E' noto che si può ottenere un modello piano della geometria non euclidea, nel modo indicato da Klein, e cioè tracciando nel piano una circonferenza («assoluto») e considerando come rette del piano, le «corde», e come punti impropri quelli dell'assoluto. In modo analogo, un modello piano del cronotopo di De Sitter é dato dal cronotopo di Castelnuovo [2], nel quale l'assoluto, se ci limitiamo alle due dimensioni (x, t) é dato dalla iperbole di equazione

$$(1,1) \quad A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2 = 0$$

con  $\alpha = x/r$ , e  $\gamma = ct/r = t/t_0$ . Si ottiene così un modello di Universo a tempo finito (figura 3), il quale si presta assai bene allo studio della Cosmologia. Come si vede dalla fig. 3, l'asse del tempo incontra l'assoluto nei due punti  $A(-t_0)$  ed  $Q(+t_0)$ , che si possono considerare

l'istante iniziale e quello finale dell'Universo. Per un secondo osservatore in moto con velocità  $V$  rispetto al primo, si ha una dilatazione del tempo, ed allora l'istante iniziale e quello finale sono dati dai due punti  $A'$  ed  $\Omega'$ . Tale intervallo tende a diventare infinito, quando la velocità  $V$  si avvicina a quella della luce. Ne segue che *nel cronotopo di Castelnuovo, la singolarità iniziale e quella finale, sono rappresentate dalle due falde della iperbole assoluto, di equazione (1).*

Per un intervallo temporale, la distanza non euclidea dalla origine, è data dal logaritmo di un birapporto, e cioè dall'invariante proiettivo della geometria non euclidea

$$(1,2) \quad \boxed{\tau = \frac{t_0}{2} \log \frac{t_0 + t}{t_0 - t}}$$

Essa può essere interpretata come formula della «doppia scala» del tempo, analoga a quella di Milne [3]

$$(1,3) \quad \tau = t_0 + t_0 \log t/t_0$$

E' facile dimostrare che la (2) si riduce in prima approssimazione alla formula di Milne. Basta infatti osservare che

$$\tau = \frac{t_0}{2} \log \frac{1 + t/t_0}{1 - t/t_0} \simeq \frac{t_0}{2} \log \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^2 = t_0 \log \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)$$

e se facciamo la seguente traslazione

$$\tau \rightarrow \tau - t_0; \quad t \rightarrow t - t_0$$

otteniamo subito la (3).

Nei precedenti lavori abbiamo visto che il cronotopo di Castelnuovo può essere studiato nel modo più semplice se si adoperano le coordinate proiettive, ed allora la relatività proiettiva assume un aspetto assai simile a quello della relatività ristretta. Nel 1973, R. L. Mallett e G. N. Fleming sono giunti alla stessa conclusione per altra via, e cioè studiando gli operatori «posizione» nello spazio di De Sitter [4], ed hanno fatto vedere che tale sistema di coordinate proiettive si presta assai bene alla rappresentazione delle geodetiche.

La prima parte di questa memoria è dedicata allo studio di alcuni casi limiti del cronotopo di Castelnuovo e del gruppo di Fantappié,

seguendo la tecnica della «contrazione» di un gruppo  $G$ , rispetto ad un suo sottogruppo  $S$ . Si ottengono così tutta una serie di gruppi e di modelli di Universo più semplici, che facilitano lo studio della relatività proiettiva.

Nella seconda parte del lavoro viene studiata la propagazione delle onde nella idrodinamica e nella magnetoidrodinamica ideale relativiste. I risultati ottenuti vengono poi estesi al caso della relatività proiettiva, nella quale l'equazione di D'Alembert generalizzata, risulta del tipo «misto» di Tricomi. Tale equazione infatti, è di tipo iperbolico nei punti dello spazio fisico, di tipo parabolico nei punti dell'assoluto e di tipo ellittico negli altri punti.

2 — CASI LIMITI DELL'UNIVERSO DI DE SITTER

A partire dal cronotopo di De Sitter-Castelnuovo, basato sul gruppo di Fantappié, con le due costanti universali  $(c, r)$ , si possono ricavare tutta una serie di nuovi modelli di Universo, applicando il processo di «contrazione» di un gruppo  $G$ , rispetto ad un suo sottogruppo  $S$ , secondo una tecnica dovuta ad Inönü e Wigner [5].

Le trasformazioni del gruppo di Fantappié, nel caso di due variabili  $(x, t)$  e di tre parametri  $(T, T_0, V)$  con la velocità  $V$  parallela alla traslazione spaziale  $T$ , e diretta lungo l'asse delle  $x$ , sono le seguenti [1]:

$$(2,1) \quad \begin{cases} x' = \frac{Ax + [\beta + (\alpha - \beta\gamma)\gamma] ct + BT}{(\beta\gamma - \alpha)Ax/r + (\gamma - \alpha\beta)t/t_0 + B} \\ t' = \frac{A\beta x/c + [1 + (\alpha - \beta\gamma)]t + BT_0}{(\beta\gamma - \alpha)Ax/r + (\gamma - \alpha\beta)t/t_0 + B} \end{cases}$$

con  $\alpha = T/r$ ,  $\beta = V/c$  e  $\gamma = T_0/t_0$ , e nelle quali abbiamo posto

$$(2,2) \quad \boxed{A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2; \quad B^2 = 1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}$$

Si ricordi che  $A = 0$  ci dà l'equazione dell'assoluto, mentre la  $B = 0$ , ci dà l'equazione delle caratteristiche. Il gruppo (1) si può considerare come il «prodotto» delle seguenti trasformazioni ad un parametro

$$(2,3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x + T}{1 - \alpha x/r} \\ t' = \frac{t \sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - \alpha x/r} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x \sqrt{1 - \gamma^2}}{1 + \gamma t/t_0} \\ t' = \frac{t + T_0}{1 + \gamma t/t_0} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x + Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t' = \frac{t + \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right.$$

A tale gruppo corrispondono le seguenti leggi di variazione della massa e della velocità di fuga

$$(2,4) \quad m = m_0 \frac{1 + \alpha^2 - \gamma^2}{\sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}}; \quad \beta = \frac{\alpha}{1 + \gamma}$$

Fatta questa premessa, dal gruppo (1) si possono ricavare, per successive «contrazioni», i seguenti casi limiti:

a) *Il modello di Hooke*— Si ottiene dal modello di Castelnuovo mediante una contrazione «velocità-spazio», cioè contraendo rispetto al sottogruppo  $S$  formato dalle rotazioni e dalle traslazioni spaziali.

A questo scopo, basta fare nelle (1) le sostituzioni

$$(2,5) \quad V \rightarrow \varepsilon V; \quad T \rightarrow \varepsilon T; \quad x \rightarrow \varepsilon x$$

e facendo tendere  $\varepsilon$  allo zero, otteniamo il nuovo gruppo, con lo stesso numero di parametri, ma che non é isomorfo al gruppo di Fantappié, perché non ha le stesse costanti di struttura

$$(2,6) \quad \boxed{\begin{array}{l} x' = \frac{x \sqrt{1 - \gamma^2} + [\beta + (\alpha - \beta\gamma) \gamma] ct + T}{1 + \gamma t/t_0} \\ t' = (t + T_0)/(1 + \gamma t/t_0) \end{array}}$$

Esso é scomponibile nelle tre trasformazioni ad un parametro

$$(2,7) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + T \\ t' = t \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x \sqrt{1 - \gamma^2}}{1 + \gamma t/t_0} \\ t' = \frac{t + T_0}{1 + \gamma t/t_0} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x' = x + Vt \\ t' = t \end{array} \right.$$

A tale gruppo corrisponde il *modello di Universo di Hooke* [6], nel quale l'iperbole assoluto si riduce alla coppia di rette  $t = \pm t_0$  (vedi fig. 1). Otteniamo così un modello di Universo con età finita,

nel quale il cono-luce uscente da 0 viene a coincidere con l'asse delle  $x$  contato due volte. Ad esso corrisponde una fisica valida per piccole velocità e distanze, ma grandi durate, e cioè una cosmologia di tipo classico.

In virtù delle (5), le leggi (2,4) della variazione della massa e della velocità di fuga, diventano

$$(2,8) \quad m = m_0 (1 - \gamma^2); \quad \beta = \alpha/(1 + \gamma)$$

Ne segue che la massa  $m$  di un corpo, quando passiano da  $-t_0$  a  $+t_0$ , prima aumenta (*creazione continua*) da zero al valore  $m_0$  (per  $t = 0$ ), e poi diminuisce, sino a raggiungere di nuovo il valore zero. Invece la legge di fuga è quella stessa che vale nel cronotopo di Castelnuovo.

b) *Il modello di Bacry* — Un secondo modello di Universo, che chiameremo di Bacry [7], si ottiene da quello di Castelnuovo mediante una contrazione «velocità-tempo», cioè contraendo rispetto al sottogruppo delle rotazioni e delle traslazioni spaziali. A questo scopo basta porre

$$(2,9) \quad V \rightarrow \varepsilon V; \quad T_0 \rightarrow \varepsilon T_0; \quad t \rightarrow \varepsilon t$$

e per  $\varepsilon$  tendente a zero, dalle (1) si ricava il nuovo gruppo

$$(2,10) \quad \boxed{\begin{aligned} x' &= (x + T)/(1 - \alpha x/r) \\ t' &= \frac{\beta x/c + t\sqrt{1 + \alpha^2} + T_0}{1 - \alpha x/r} \end{aligned}}$$

da cui si deducono le tre trasformazioni ad un parametro

$$(2,11) \quad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{x + T}{1 - \alpha x/r} \\ t' &= \frac{t\sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - \alpha x/r} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} x' &= x \\ t' &= t + T_0 \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} x' &= x \\ t' &= t + \beta x/c \end{aligned} \right\}$$

Si ottiene così una fisica valida per piccole velocità e per brevi durate, ma per grandi distanze. Ad essa corrisponde una cosmologia con tempo infinito, e nella quale l'assoluto si riduce alla coppia di

rette immaginarie  $x = \pm ir$  (vedi figura 5), mentre il cono-luce uscente da 0 viene a coincidere con l'asse delle  $t$ , contato due volte.

In tale modello di Universo, la legge di variazione della massa e quella di fuga, diventano rispettivamente

$$(2,12) \quad m = m_0 \sqrt{1 + \alpha^2}; \quad \beta = \infty$$

come é facile verificare.

c) *Il modello di Minkowski* — Si ottiene dal gruppo di Fantappié con una contrazione «spazio-tempo», cioè rispetto al sottogruppo  $S$  formato dalle rotazioni e dai trascinamenti

$$(2,13) \quad T \rightarrow \varepsilon T; \quad x \rightarrow \varepsilon x; \quad T_0 \rightarrow \varepsilon T_0; \quad t \rightarrow \varepsilon t$$

Passando al limite, per  $\varepsilon$  tendente allo zero, si ottiene il gruppo di Poincaré

$$(2,14) \quad \boxed{x' = \frac{x + Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} + T; \quad t' = \frac{t + \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} + T_0}$$

al quale corrisponde una fisica valida per piccole distanze e durate, ma per alte velocità. Nel cronotono di Minkowski l'assoluto si riduce alla retta impropria contata due volte, e sia lo spazio che il tempo sono infiniti. La legge di variazione della massa e quella di fuga si riducono alle

$$(2,15) \quad m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}; \quad \beta = 0$$

e quindi non vi é espansione cosmica (vedi figura 4).

d) *Il modello di Newton* — Dal gruppo di Poincaré, con una nuova contrazione «velocità-spazio», data delle (5), si ricava il gruppo di Galileo

$$(2,16) \quad \boxed{x' = x + Vt + T; \quad t' = t + T_0}$$

che si può anche ottenere dal gruppo (6) con una contrazione «spazio-tempo». Nel cronotopo di Newton della fisica classica, il cono-luce

uscende da 0, viene a coincidere con l'asse delle  $x$  contato due volte (vedi figura 2)

e) *Il modello di Carroll* — Infine, contraendo il gruppo di Poincaré rispetto alla «velocità-tempo» (oppure il gruppo (10) rispetto allo «spazio-tempo»), si ottiene il nuovo gruppo

$$(2,17) \quad \boxed{x' = x + T; \quad t' = t + \beta x/c + T_0}$$

nel quale il cono-luce uscente da 0, coincide con l'asse delle  $t$  contato due volte (vedi figura 6), ed allora la regione del «presente» si estende a tutto il cronotopo. Questo significa che un segnale luminoso non si propaga, ma rimane localizzato nel punto in cui viene emesso. Tale modello di Universo ha delle proprietà simili a quelle del «Paese delle meraviglie», descritte da Carroll nel suo celebre libro, ed è stato introdotto da Levy-Leblond nel 1965 [8].

### 3 — TRASFORMAZIONE DEL CAMPO MAGNETOIDRODINAMICO

Nella relatività proiettiva il campo magnetoidrodinamico è dato dal tensore doppio antisimmetrico  $H_{AB}$  ( $A, B = 1, 2 \dots 5$ ), con le seguenti componenti

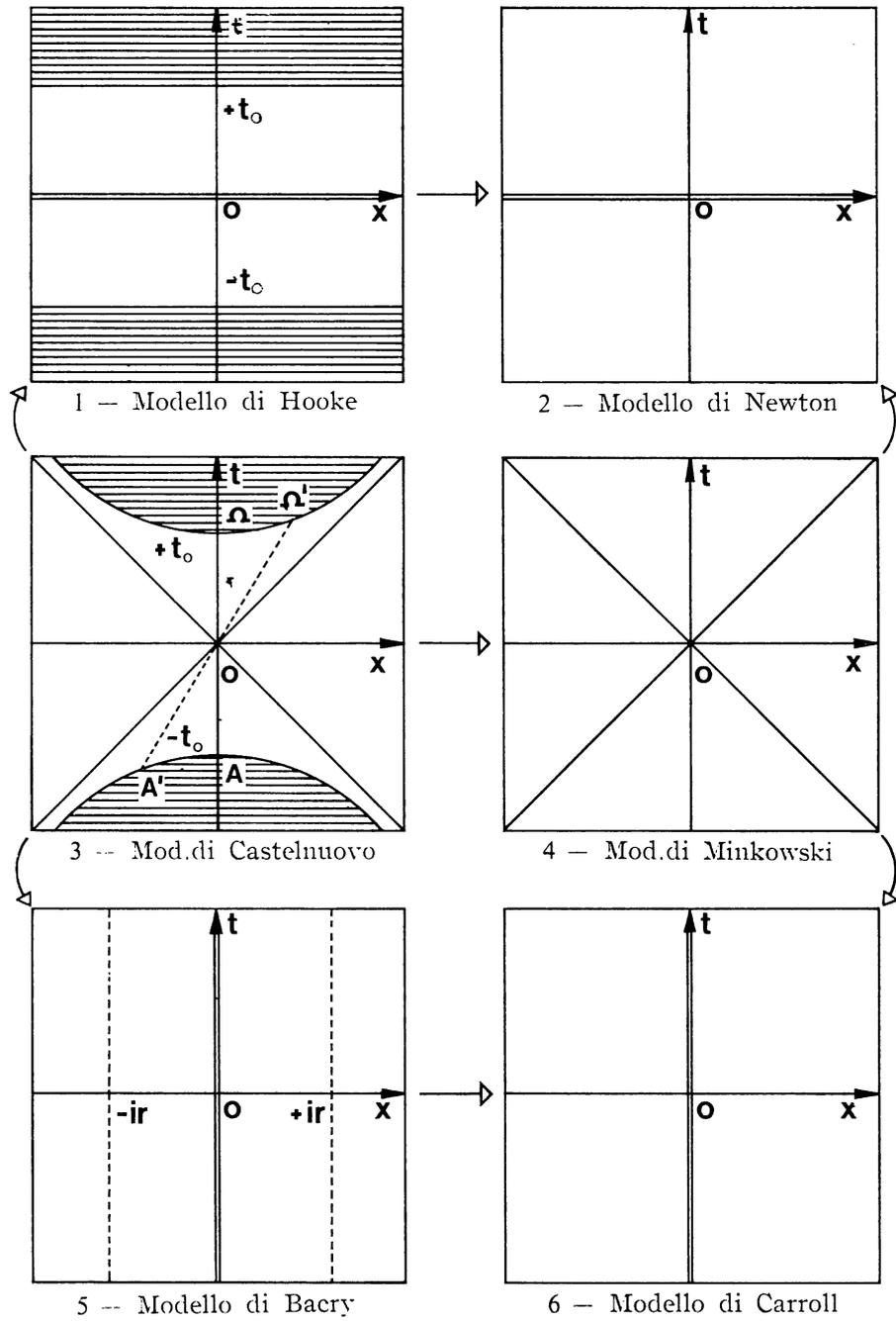
$$(3,1) \quad H_{\alpha\beta} = E_\alpha; \quad H_{\alpha 4} = -iH_\alpha; \quad H_{\alpha 5} = C_\alpha; \quad H_{45} = iC_0$$

con  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ , e dove  $(\alpha\beta\gamma)$  è una permutazione pari degli indici (123). Ci proponiamo di vedere come si trasforma tale campo per una trasformazione del gruppo di Fantappié del tipo (2,1), e poi vediano quello che accade nei vari casi limiti. La trasformazione (2,1), scritta in coordinate omogenee ( $\bar{x}_A$ ), è data dalla

$$(3,2) \quad \bar{x}'_A = a_{AB} \bar{x}_B \quad (A, B = 1, 2 \dots 5)$$

dove la matrice della trasformazione è la seguente

CASI LIMITI DELL'UNIVERSO DI DE SITTER



$$(3,3) \quad [a_{AB}] = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

ed in base alle (2,1) si ha

$$(3,4) \quad \begin{cases} B a_{11} = 1; & AB a_{14} = \beta + (\alpha - \beta\gamma) \gamma; & A a_{15} = \alpha \\ B a_{41} = \beta; & AB a_{44} = 1 + \alpha (\alpha - \beta\gamma); & A a_{45} = \gamma \\ B a_{51} = \beta\gamma - \alpha; & AB a_{54} = \gamma - \alpha\beta; & A a_{55} = 1 \end{cases}$$

Il campo magnetoidrodinamico si trasforma come un tensore doppio di  $S_5$ , cioè con la seguente legge

$$(3,5) \quad H'_{AB} = a_{AR} a_{BS} H_{RS}$$

Tenendo conto delle (1), (2), (3) e con calcoli laboriosi, ma elementari, otteniamo la seguente legge di trasformazione del campo magnetoidrodinamico, per una trasformazione (2,1) del gruppo di Fantappié

$$(3,6) \quad E'_1 = E_1 \begin{cases} E'_2 = a_{11} E_2 + a_{14} H_3 + a_{15} C_3 \\ H'_3 = a_{41} E_2 + a_{44} H_3 + a_{45} C_3 \\ C'_3 = a_{51} E_2 + a_{54} H_3 + a_{55} C_3 \end{cases}$$

Si trova poi che  $(E_3, H_2, C_2)$  e  $(C_0, C_1, H_1)$  si trasformano con la stessa legge di trasformazione delle  $(E_2, H_3, C_3)$ , cioè

$$(3,7) \quad \begin{cases} E'_3 = a_{11} E_3 + a_{14} H_2 + a_{15} C_2 \\ H'_2 = a_{41} E_3 + a_{44} H_2 + a_{45} C_2 \\ C'_2 = a_{51} E_3 + a_{54} H_2 + a_{55} C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} C'_0 = a_{11} C_0 + a_{14} C_1 + a_{15} H_1 \\ C'_1 = a_{41} C_0 + a_{44} C_1 + a_{45} H_1 \\ H'_1 = a_{51} C_0 + a_{54} C_1 + a_{55} H_1 \end{cases}$$

Ne segue che il campo magnetoidrodinamico si decompone secondo lo schema

$$(3,8) \quad (E_1), (E_2, H_3, C_3), (E_3, H_2, C_2), (C_0, C_1, H_1)$$

ed è la stessa decomposizione che si osserva nello studio delle onde piane che si propagano lungo l'asse delle  $x$  [9].

Utilizzando le trasformazioni dei gruppi ottenuti da quello di Fantappié per successive contrazioni, si rivacano facilmente le leggi di trasformazioni del campo magnetoidrodinamico, nei vari casi limiti.

a) *Modello di Hooke* — Dalle (2,6) si deduce che  $a_{41} = 0$ ;  $a_{51} = 0$ . Si ha inoltre

$$(3,9) \quad \boxed{A = \sqrt{1 - \gamma^2}; \quad B = 1}$$

Otteniamo così la legge di trasformazione del campo magnetoidrodinamico

$$(3,10) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_2' = E_2 + \frac{[\beta + (\alpha - \beta\gamma)\gamma]H_3 + \alpha C_3}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \\ H_3' = \frac{H_3 + \gamma C_3}{\sqrt{1 - \gamma^2}}; \quad C_3' = \frac{C_3 + \gamma H_3}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \end{array} \right.$$

In modo analogo si trasformano le  $(E_3, H_2, C_2)$  e  $(C_0, C_1, H_1)$ , come risulta dalle (7), mentre  $E_1' = E_1$ .

b) *Modello di Bacry* — Dalle trasformazioni (2,10), si deduce che  $a_{14} = 0$ ;  $a_{54} = 0$ , mentre

$$(3,11) \quad \boxed{A = \sqrt{1 + \alpha^2}; \quad B = \sqrt{1 + \alpha^2}}$$

Se ne deduce la legge di trasformazione del campo

$$(3,12) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_2' = \frac{E_2 + \alpha C_3}{\sqrt{1 + \alpha^2}}; \quad C_3' = \frac{C_3 - \alpha C_2}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \\ H_3' = H_3 + \frac{\beta E_2 + \gamma C_3}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \end{array} \right.$$

e le analoghe, mentre  $E_1' = E_1$ .

c) *Modello di Minkowski* — Dalle (2,14) si deduce che  $a_{15} = 0$ ;  $a_{45} = 0$ , mentre

$$(3,13) \quad \boxed{A = 1; \quad B = \sqrt{1 - \beta^2}}$$

Otteniamo così la legge di trasformazione del campo magnetoidrodinamico

$$(3,14) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1' = E_1; \quad E_2' = \frac{E_2 - \beta H_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad H_3' = \frac{H_3 + \beta E_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ H_1' = H_1; \quad E_3' = \frac{E_3 - \beta H_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad H_2' = \frac{H_2 + \beta E_3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ C_0' = \frac{C_0 + \beta C_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad C_1' = \frac{C_1 - \beta C_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad C_2' = C_2; \quad C_3' = C_3 \end{array} \right.$$

Ne segue che il campo elettromagnetico e quello idrodinamico si trasformano separatamente, secondo lo schema

$$(3,15) \quad (E_1), \quad (E_2, H_3), \quad (E_3, H_2), \quad (H_1), \quad (C_0, C_1), \quad (C_2), \quad (C_3)$$

Infine, nei due modelli di Newton e di Carroll, il campo elettrico, quello magnetico, il campo idrodinamico e  $C_0$ , si trasformano separatamente.

#### 4 - MOMENTO LINEARE E MOMENTO ANGOLARE

Nella relatività proiettiva [1], il «momento angolare» è un tensore doppio antisimmetrico, così definito

$$(4,1) \quad M_{AB} = \bar{x}_A \dot{p}_B - \bar{x}_B \dot{p}_A = m_0 (\bar{x}_A \bar{u}_B - \bar{x}_B \bar{u}_A)$$

e comprende sia il momento lineare che quello angolare relativistici

$$(4,2) \quad M_{5i} = r \dot{p}_i / A^2; \quad M_{ik} = (x_i \dot{p}_k - x_k \dot{p}_i) / A^2 \quad (i, k = 1, 2, 4)$$

Possiamo allora utilizzare i risultati ottenuti al n.º 3, per studiare come si trasforma il tensore (1) per una trasformazione del gruppo di Fantappié. A tale scopo, poniamo

$$(4,3) \quad M_{\alpha\beta} = K_\gamma; \quad M_{\alpha 4} = iK_\alpha^0; \quad M_{\alpha 5} = -P_\alpha; \quad M_{45} = iP^0$$

Per una traslazione nel tempo di  $T_0$ , dalle (3,6) e (3,7), ponendo  $T = 0$ ,  $Y = 0$ , si deduce che il tensore (1) si trasforma nel seguente modo

$$(4,4) \quad \mathbf{P}' = (\mathbf{P} + \gamma \mathbf{K}^0) / \sqrt{1 - \gamma^2}; \quad \mathbf{K}^{0'} = (\mathbf{K}^0 + \gamma \mathbf{P}) / \sqrt{1 - \gamma^2}$$

e le altre componenti rimangono invariate. Se ne deduce che se nel primo riferimento il momento lineare é nullo ( $\mathbf{P} = 0$ ), nel secondo riferimento, spostato nel tempo di  $T_0$ , si avrà

$$\mathbf{P}' = \gamma \mathbf{K}^0 / \sqrt{1 - \gamma^2}; \quad \mathbf{K}^{0'} = \mathbf{K}^0 / \sqrt{1 - \gamma^2}$$

e quindi se ne deduce la relazione

$$(4,5) \quad \boxed{\mathbf{P}' = \gamma \mathbf{K}^{0'}}$$

la quale ci dice che non si ha conservazione del momento lineare. Da questa relazione, tenendo conto delle (2), e non scrivendo gli apici, si deduce che

$$r V_\alpha = \gamma (c x_\alpha - ct V_\alpha)$$

la quale, per  $\gamma = -1$ , cioè per  $T_0 = -t_0$ , ci dà

$$(4,6) \quad r V_\alpha + ct V_\alpha = c x_\alpha$$

Se allora poniamo

$$(4,7) \quad \vec{\alpha} = \mathbf{x}/r; \quad \vec{\beta} = \mathbf{V}/c; \quad \gamma = t/t_0$$

dalla (6) si deduce la legge di fuga delle galassie

$$(4,8) \quad \vec{\beta} = \vec{\alpha}/(1 + \gamma)$$

*La legge della espansione cosmica risulta quindi strettamente connessa alla non conservazione del momento lineare.* Infatti, nella relatività proiettiva il momento lineare non é più un vettore, ma fa parte di un tensore doppio (1), che comprende pure il momento angolare.

Se invece facciamo una traslazione  $T$  lungo l'asse delle  $x$ , ponendo nelle (3,6) e (3,7)  $T_0 = 0$ ,  $V = 0$  si trova che il tensore (1) si trasforma nel seguente modo

$$(4,9) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1' = K_1; \quad K_2^{0'} = K_2^0; \quad K_3^{0'} = K_3^0; \quad P_1' = P_1. \\ K_2' = \frac{K_2 + \alpha P_3}{\sqrt{1 + \alpha^2}}; \quad K_3' = \frac{K_3 + \alpha P_2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}; \quad K_1^{0'} = \frac{K_1^0 + \alpha P^0}{\sqrt{1 + \alpha^2}}. \\ P_2' = \frac{P_2 + \alpha K_3}{\sqrt{1 + \alpha^2}}; \quad P_3' = \frac{P_3 + \alpha K_2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}; \quad P^{0'} = \frac{P^0 + \alpha K_1^0}{\sqrt{1 + \alpha^2}}. \end{array} \right.$$

Se nel primo sistema di riferimento il momento angolare é nullo ( $K = 0, K^0 = 0$ ), nel secondo riferimento si avrà

$$(4,10) \quad \begin{cases} K_2' = \alpha P_3/\sqrt{1 + \alpha^2}; & K_3' = \alpha P_2/\sqrt{1 + \alpha^2}; & K_1^{0'} = \alpha P^0/\sqrt{1 + \alpha^2} \\ P_2' = P_2/\sqrt{1 + \alpha^2}; & P_3' = P_3/\sqrt{1 + \alpha^2}; & P^{0'} = P^0/\sqrt{1 + \alpha^2} \end{cases}$$

Invece  $P_1' = P_1$ , mentre le altre componenti sono nulle. Ne segue che nel nuovo riferimento appare un momento angolare

$$(4,11) \quad \boxed{K_2' = \alpha P_3'; \quad K_3' = \alpha P_2'; \quad K_1^{0'} = \alpha P^{0'}}$$

legato al momento lineare.

Come vedremo in un successivo lavoro, dalle trasformazioni (2,1) del gruppo di Fantappié, si deduce la nuova formula dell'effetto Döppler

$$(4,12) \quad \boxed{\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta} + \alpha^2}}$$

dove si é indicata con  $\omega$  la frequenza.

Per  $\beta = 1$ , essa si riduce alla

$$(4,13) \quad \omega' = \alpha \omega$$

mentre, per  $\beta = 0$ , ci dà un effetto Döppler dovuto alla distanza

$$(4,14) \quad \omega' = \omega \sqrt{1 + \alpha^2}$$

Se la galassia o il quasar ubbidisce alla legge di fuga (8) e ci poniamo sul cono-luce dell'osservatore, ( $\alpha = -\gamma$ ) si avrà

$$(4,15) \quad \beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

dalla quale si ricava che per  $x = r/2$ , si ha  $V = c$ .

Sostituendo la (15) nella formula (12), da essa si deduce che

$$(4,16) \quad 1 + z = 1/(1 - \alpha)$$

dove si é indicato con  $z$  il red-shift. Ne segue che  $\beta = z$ ,

Così per esempio, per un quasar con red-shift  $z = 2$ , dalle (15) e (16) si ricavano la sua distanza e la sua velocità

$$(4,17) \quad x = 2r/3; \quad V = 2c$$

cioè la sua velocità (apparente) è iper-c. Secondo la relatività invece la sua velocità sarebbe 0,8 c.

#### 5 — LE ONDE NELLA IDRODINAMICA RELATIVISTICA

Nei precedenti lavori abbiamo fatto vedere che dalle equazioni della magnetoidrodinamica (equazioni di Maxwell generalizzate) si possono dedurre come casi limiti la termoidrodinamica [10] e la magnetoidrodinamica ideale [11], le quali risultano tra loro «duali» nel senso della geometria proiettiva. Ci proponiamo adesso di studiare la propagazione delle onde nella idrodinamica relativistica e di estendere poi tale studio alla idrodinamica proiettiva.

Come è noto, le equazioni della idrodinamica relativistica dei fluidi perfetti, sono le seguenti

$$(5,1) \quad \begin{cases} \mu' \frac{d u_i}{d \tau} + \frac{u_i}{c^2} \frac{d p}{d \tau} + \partial_i p = 0; & u_i u_i = -c^2 \\ c^2 \partial_k (\mu' u_k) = d p / d \tau; & \mu = \mu(p) \end{cases}$$

con  $\mu' = \mu + p/c^2$ . Per studiare la propagazione delle onde, sia

$$(5,2) \quad \varphi(x_i) = \text{costante} \quad (i = 1, 2, \dots, 4)$$

una ipersuperficie del cronotopo (che indicheremo con S), attraverso la quale siano continue  $(u_i, p, \mu)$ , mentre possono presentare discontinuità di prima specie almeno una delle loro derivate parziali prime. Ora, se una funzione  $f$  è ovunque continua, il suo differenziale, calcolato da una parte e dall'altra di S, dovrà avere lo stesso valore, e cioè dovrà essere continuo attraverso S. Si avrà quindi

$$(5,3) \quad \Delta d f = \Delta \partial_k f d x_k = 0$$

Ma dalla (2) segue che  $\partial_k \varphi d x_k = 0$ , e confrontando con la (3) si deduce che

$$(5,4) \quad \Delta \partial_k f = \lambda \partial_k \varphi = \lambda \varphi_k$$

dove si é posto  $\partial_k \varphi = \varphi_k$ , e si é indicato con  $\lambda$  un fattore arbitrario non nullo. Se allora introduciamo i 6 parametri di discontinuità  $(U_i, \pi, m)$  della velocità, della pressione e della densità, per quanto abbiamo detto, si avrà

$$(5,5) \quad \Delta \partial_i u_k = U_k \varphi_i; \quad \Delta \partial_i p = \pi \varphi_i; \quad \Delta \partial_i \mu = m \varphi_i$$

dalle quali, moltiplicando per  $u_i$ , segue che

$$(5,6) \quad \Delta \dot{u}_k = U_k \dot{\varphi}; \quad \Delta \dot{p} = \pi \dot{\varphi}; \quad \Delta \dot{\mu} = m \dot{\varphi}$$

mentre dalla equazione di stato si deduce che

$$(5,7) \quad \Delta \partial_i \mu = \frac{d\mu}{dp} \Delta \partial_i p = \pi \frac{d\mu}{dp} \varphi_i$$

Per trovare a quali condizioni debbono soddisfare i parametri di discontinuità, scriviamo le (1) da una banda e dall'altra del fronte d'onda, e sottraendo avremo le equazioni

$$(5,8) \quad \begin{cases} \mu' U_i \dot{\varphi} + \frac{u_i}{c^2} \pi \dot{\varphi} + \pi \varphi_i = 0; & u_i U_i \dot{\varphi} = 0 \\ \mu' U_i \varphi_i + m \dot{\varphi} = 0; & m = \pi d\mu/dp \end{cases}$$

Per trovare l'equazione differenziale delle caratteristiche, é opportuno introdurre la nuova incognita

$$(5,9) \quad X = U_i \varphi_i$$

Se moltiplichiamo la prima equazione (8) per  $\varphi_i$ , e teniamo conto delle altre equazioni, avremo il seguente sistema di tre equazioni indipendenti nelle tre incognite  $(X, \pi, m)$

$$(5,10) \quad \begin{cases} \mu' X \dot{\varphi} + \pi \dot{\varphi}^2/c^2 + \pi \bar{\varphi}^2 = 0 \\ \mu' X + m \dot{\varphi} = 0; & m dp - \pi d\mu = 0 \end{cases}$$

dove si é posto  $\bar{\varphi}^2 = \varphi_i \varphi_i$ . Poiché si tratta di un sistema omogeneo, esso ammetterà soluzioni non tutte nulle, se il suo determinante é nullo

$$(5,11) \quad \begin{vmatrix} \mu' \dot{\varphi} & \dot{\varphi}^2/c^2 + \bar{\varphi}^2 & 0 \\ \mu' & 0 & \dot{\varphi} \\ 0 & -d\mu & dp \end{vmatrix} = 0$$

Otteniamo così la seguente equazione delle caratteristiche

$$(5,12) \quad \dot{\varphi}^2/c^2 + \bar{\varphi}^2 = \dot{\varphi}^2 d\mu/dp$$

Se allora introduciamo la velocità  $V_H$  delle onde idrodinamiche, e la velocità  $V$  così:

$$(5,13) \quad V_H^2 = dp/d\mu; \quad V^2 = \dot{\varphi}^2/\bar{\varphi}^2 \quad (\bar{\varphi}^2 \neq 0)$$

la (12) si scrive nel seguente modo

$$(5,14) \quad \boxed{(1 - V_H^2/c^2) V^2 - V_H^2 = 0}$$

La velocità  $U$  del fronte d'onda è data da  $U^2 = \dot{\varphi}^2/(\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2) = V^2/(1 + V^2/c^2) = V_H^2$ .

## 6 — LE ONDE NELLA IDRODINAMICA PROIETTIVA

I risultati precedenti possono essere facilmente estesi al caso della idrodinamica proiettiva [10], nella quale valgono le seguenti equazioni

$$(6,1) \quad \begin{cases} \mu' a_A + \frac{u_A}{c^2} \frac{dp}{d\tau} - \frac{x_A}{r^2} \frac{dp}{d\rho} + \partial_A p = H^2 \mu' x_A \\ c^2 \partial_A (\mu' u_A) = dp/d\tau; \quad c^2 \partial_A (\mu' x_A) = dp/d\rho \\ u_A u_A = -c^2; \quad u_A x_A = 0; \quad \mu = \mu(p) \end{cases}$$

dove abbiamo ommesso le sbarrette sopra i vettori proiettivi, ed abbiamo indicato con  $d/d\rho = x_A \partial_A$  la derivata radiale.

Se introduciamo i parametri di discontinuità  $(U_A, \pi, m)$  e procediamo come nel caso relativistico, dalle (1) si deducono le seguenti equazioni delle discontinuità

$$(6,2) \quad \begin{cases} \mu' U_A \dot{\varphi} + \frac{u_A}{c^2} \pi \dot{\varphi} - \frac{x_A}{r^2} \pi \varphi' + \pi \varphi_A = H^2 \mu' x_A \\ m \dot{\varphi} + \mu' U_A \varphi_A = 0; \quad 5 \mu' + m \varphi' = 0 \\ u_A U_A \dot{\varphi} = 0; \quad x_A U_A \dot{\varphi} - c^2 = 0; \quad \pi d\mu - m dp = 0 \end{cases}$$

dove abbiamo posto

$$(6,3) \quad \varphi' = x_A \partial_A \varphi = d\varphi/d\rho; \quad \dot{\varphi} = u_A \partial_A \varphi = d\varphi/d\tau$$

ed abbiamo tenuto presente che  $x_A a_A = c^2$ , mentre  $\partial_A x_A = 5$ .

A questo punto é opportuno introdurre le due nuove incognite

$$(6,4) \quad X = U_A \varphi_A; \quad S = U_A x_A$$

Moltiplicando la prima equazione (2) per  $\varphi_A$ , tenendo conto delle (4) e ponendo  $\varphi_A \varphi_A = \bar{\varphi}^2$ , otteniamo il seguente sistema non omogeneo di 5 equazioni nelle 4 incognite ( $X, S, \pi, m$ )

$$(6,5) \quad \begin{cases} \mu' \dot{\varphi} X + \frac{\pi}{c^2} \dot{\varphi}^2 - \frac{\pi}{r^2} \varphi'^2 + \pi \bar{\varphi}^2 = H^2 \mu' \varphi'; & \pi = m d\rho/d\mu \\ m \dot{\varphi} + \mu' X = 0; & 5\mu' + m \varphi' = 0; & S \dot{\varphi} - c^2 = 0 \end{cases}$$

Dalle ultime quattro equazioni si possono ricavare le quattro incognite, in funzione della  $\varphi$  e delle sue derivate

$$(6,6) \quad X = 5 \frac{\dot{\varphi}}{\varphi'}; \quad S = \frac{c^2}{\dot{\varphi}}; \quad m = -5 \frac{\mu'}{\varphi'}; \quad \pi = -5 \frac{\mu'}{\varphi'} \frac{d\rho}{d\mu}$$

e sostituendo tali valori nella prima delle (5) otteniamo l'equazione differenziale delle caratteristiche

$$(6,7) \quad \left(c^2 - \frac{d\rho}{d\mu}\right) \frac{\dot{\varphi}^2}{c^2} + \left(\frac{c^2}{5} - \frac{d\rho}{d\mu}\right) \frac{\varphi'^2}{r^2} - \frac{d\rho}{d\mu} \bar{\varphi}^2 = 0$$

Ora, osserviamo che si ha

$$(6,8) \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\rho} = \dot{\varphi}/\dot{\rho}$$

e tenendo conto delle (5,13) otteniamo dalla (7) l'equazione delle caratteristiche

$$(6,9) \quad \boxed{[(1 - V_H^2/c^2) + (H/\dot{\rho})^2 (1/5 - V_H^2/c^2)] V^2 - V_H^2 = 0}$$

che generalizza quella (5,14) della idrodinamica relativistica,

## 7 — STUDIO DELLE ONDE NELLA MAGNETOIDRODINAMICA IDEALE

Lo stesso metodo con cui abbiamo studiato le onde nella idrodinamica, può essere applicato alla magnetoidrodinamica ideale [12]. Prima tratteremo il caso relativistico, e poi vedremo cosa accade quando si passa alla relatività proiettiva.

Le equazioni della magnetoidrodinamica relativistica ideale, sono le seguenti [13]

$$(7,1) \quad \begin{cases} \partial_i (h_i u_k - h_k u_i) = 0; & c^2 \partial_i (\mu' u_i) = d p / d \tau \\ M a_k + u_k \partial_i (M u_i) + \partial_k P - \mu_o (h_i \partial_i h_k + h_k \partial_i h_i) = 0 \\ u_i u_i = -c^2; & u_i h_i = 0; \quad \mu = \mu(p) \end{cases}$$

nelle quali abbiamo posto  $h^2 = h_s h_s$ , mentre

$$(7,2) \quad M = \mu + (p + \mu_o h^2) / c^2; \quad P = p + \mu_o h^2 / 2$$

Eseguendo le derivazioni, e tenendo conto delle (2), le (1) si possono scrivere nel seguente modo:

$$(7,3) \quad \begin{cases} h_i \partial_i u_k + u_k \partial_i h_i - h_k \partial_i u_i - u_i \partial_i h_k = 0 \\ (\mu c^2 + p) \partial_i u_i + \dot{\mu} c^2 = 0 \\ M \dot{u}_k + M u_k \partial_i u_i + \dot{\mu} u_k + \frac{\dot{p}}{c^2} u_k + 2 \frac{\mu_o}{c^2} u_k h_i \dot{h}_i + \\ + \partial_k p + \mu_o h_i \partial_k h_i - \mu_o h_i \partial_i h_k - \mu_o h_k \partial_i h_i = 0 \\ u_i \dot{u}_i = 0; \quad u_i \dot{h}_i + \dot{u}_i h_i = 0; \quad \mu = \mu(p) \end{cases}$$

Occorre allora introdurre i 10 parametri di discontinuità ( $U_i$ ,  $H_i$ ,  $\pi$ ,  $m$ ) della velocità, del campo magnetico, della pressione e della densità. Se scriviamo le (3) da una banda e dall'altra del fronte d'onda, e sottraiamo, otteniamo le seguenti equazioni

$$(7,4) \quad \begin{cases} h_i U_k \varphi_i + u_k H_i \varphi_i - h_k U_i \varphi_i - u_i H_k \varphi_i = 0 \\ (\mu c^2 + p) U_i \varphi_i + m c^2 \dot{\varphi} = 0 \\ M U_k \dot{\varphi} + H u_k U_i \varphi_i + m u_k \dot{\varphi} + \frac{\pi}{c^2} u_k \dot{\varphi} + \frac{2}{c^2} \mu_o h_i H_i u_k \dot{\varphi} + \\ + \pi \varphi_k + \mu_o h_i H_i \varphi_k - \mu_o h_i H_k \varphi_i - \mu_o h_k H_i \varphi_i = 0 \\ u_i U_i = 0; \quad u_i H_i + h_i U_i = 0; \quad m d p - \pi d \mu = 0 \end{cases}$$

che formano un sistema algebrico nei 10 parametri di discontinuità.

Per trovare l'equazione differenziale delle caratteristiche, é opportuno introdurre le nuove quattro incognite

$$(7,5) \quad X = U_i \varphi_i; \quad Y = H_i \varphi_i; \quad Z = H_i h_i; \quad W = U_i h_i$$

e ricavare dalle (4) sei equazioni algebriche indipendenti nelle 6 incognite  $(X, Y, Z, W, m, \pi)$ .

A questo scopo, moltiplichiamo la prima equazione (4) per  $u_k$  e poi per  $h_k$ , e la terza equazione per  $h_k$  e poi per  $\varphi_k$ . Tenendo conto delle (5), otteniamo il seguente sistema di sei equazioni algebriche omogenee, in sei incognite:

$$(7,6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} W - c^2 Y = 0; \quad h_i \varphi_i W - h^2 X - \dot{\varphi} Z = 0 \\ 2 M \dot{\varphi} X - 2 \mu_o h_i \varphi_i Y + \mu_o (2 \dot{\varphi}^2/c^2 + \bar{\varphi}^2) Z + \\ \quad + (\dot{\varphi}^2/c^2 + \bar{\varphi}^2) \pi + \dot{\varphi}^2 m = 0 \\ \mu' X + \dot{\varphi} m = 0; \quad \pi d \mu - m d p = 0 \\ M \dot{\varphi} W + h_i \varphi_i \pi - \mu_o h^2 Y = 0 \end{array} \right.$$

Perché tale sistema ammetta soluzioni non tutte nulle, occorre che sia nullo il suo determinante, ed otteniamo così l'equazione differenziale delle caratteristiche. E' però più semplice ricavare dalle (6) le varie incognite in funzione della  $X$ , cioè

$$(7,7) \quad \left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{\mu'}{\dot{\varphi}} X; \quad \pi = -\frac{d p}{d \mu} \cdot \frac{\mu'}{\dot{\varphi}} X; \quad Y = \frac{h_i \varphi_i}{c^2 \dot{\varphi}} \cdot \frac{d p}{d \mu} X \\ W = \frac{h_i \varphi_i}{\dot{\varphi}^2} \cdot \frac{d p}{d \mu} X; \quad Z = \left[ \frac{(h_i \varphi_i)^2}{\dot{\varphi}^3} \frac{d p}{d \mu} - \frac{h^2}{\dot{\varphi}} \right] X \end{array} \right.$$

Sostituendo tali valori nella seconda delle (6), e per  $X \neq 0$ , otteniamo l'equazione delle caratteristiche

$$(7,8) \quad \left( 1 - \frac{1}{c^2} \frac{d p}{d \mu} \right) \dot{\varphi}^4 - \left( \frac{d p}{d \mu} + \frac{\mu_o}{\mu'} h^2 \right) \bar{\varphi}^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{\mu_o}{\mu'} (h_i \varphi_i)^2 \frac{d p}{d \mu} \bar{\varphi}^2 = 0$$

Introduciamo poi la componente  $h_N$  del campo magnetico, nella direzione spaziale di propagazione dell'onda, e la velocità  $V_A$  delle onde di Alfvén, nel seguente modo

$$(7,9) \quad h_N^2 = \frac{(h_i \varphi_i)^2}{\bar{\varphi}^2}; \quad V_A^2 = \frac{\mu_o}{\mu'} h^2 \quad (\bar{\varphi}^2 \neq 0)$$

Tenendo conto delle (5,13), la (8) si scrive così

$$(7,10) \quad \boxed{(1 - V_H^2/c^2) V^4 - (V_H^2 + V_A^2) V^2 + \frac{\mu_o}{\mu'} h_N^2 V_H^2 = 0}$$

Tale equazione, se il campo magnetico è nullo ( $h_i = 0$ ), si riduce alla (5,14) delle onde idrodinamiche. Se invece il fluido è incompressibile, e cioè se  $V_H = c$ , si riduce alla

$$(7,11) \quad (c^2 + V_A^2) V^2 = \mu_o h_N^2 / \mu'$$

Se introduciamo la velocità  $U^2 = V^2 / (1 + V^2/c^2)$  del fronte d'onda, e la componente normale del campo magnetico  $*h_N^2 = h_N^2 / (1 + V^2/c^2)$ , la (11) diventa

$$(7,12) \quad \boxed{M U^2 - \mu_o *h_N^2 = 0}$$

Otteniamo così la velocità dell'onda di Alfvén relativistica

$$(7,13) \quad U^2 = \frac{\mu_o}{M} *h_N^2 = \frac{\mu_o *h_N^2}{\mu + (p + \mu_o h^2)/c^2}$$

In un fluido incompressibile si hanno quindi due velocità di propagazione, e cioè la velocità  $c$  della luce, e quella (13) dell'onda di Alfvén. Se invece  $\bar{\varphi}^2 = 0$ , cioè se il vettore  $\varphi_i$  è di genere luce, la (8) si riduce alla  $d p / d \mu = c^2$ , da cui segue che  $p = \mu c^2$ .

Nel caso più generale, la (10) è una equazione di secondo grado nella incognita  $V^2$ , e ci fornisce due valori entrambi reali e positivi. Si dimostra allora che le due velocità di propagazione  $V'$  e  $V''$  sono, una minore del più piccolo dei due valori  $V_H^2$  e  $V_A^2$ , ed una maggiore del più grande di essi. Si ha così l'onda idrodinamica *lenta* e quella *veloce*.

## 8 — CASO DELLA MAGNETOIDRODINAMICA PROIETTIVA IDEALE

Lo studio precedente può essere facilmente esteso alla magnetoidrodinamica ideale proiettiva [11]. Per maggiore semplicità ci limiteremo al caso in cui il fluido è incompressibile e la permeabilità

magnetica ha un valore prossimo all'unità (cioé porremo  $\mu_0 = 1$ ).  
Si hanno allora le seguenti equazioni

$$(8,1) \left\{ \begin{array}{l} h^2 a_B + u_B \partial_A (h^2 u_A) + (c^2/2) \partial_B h^2 = c^2 \partial_A (h_A h_B) \\ 2 \partial_A (h^2 u_A) - d h^2 / d \tau + 2 h_A u_B \partial_A h_B = 0; \quad u_A u_A = -c^2 \\ \partial_A (h_A u_B - h_B u_A) = 0; \quad h_A u_A = 0; \quad u_A x_A = 0 \end{array} \right.$$

In questo caso, nelle equazioni non figurano la densità  $M$  e la pressione totale  $P$ , perché vale la interessante relazione tra campo magnetico, densità e pressione

$$(8,2) \quad \boxed{h^2 = M c^2 = 2 P}$$

Procedendo come nel caso relativistico, dal sistema (1) si deducono le seguenti equazioni delle discontinuità ( $H_A, U_A$ )

$$(8,3) \left\{ \begin{array}{l} h^2 U_B \dot{\varphi} + u_B h^2 U_A \varphi_A + 2 u_B h_S H_S \dot{\varphi} + c^2 h_S H_S \varphi_B = \\ \quad \quad \quad = c^2 h_A \partial_A h_B + c^2 h_B \partial_A h_A \\ h^2 U_A \varphi_A + h_S H_S \dot{\varphi} + h_A u_B H_B \varphi_A = 0 \\ u_A H_B \varphi_A + h_B U_A \varphi_A - u_B H_A \varphi_A - h_A U_B \varphi_A = 0 \\ u_A H_A = -h_A U_A; \quad u_A U_A = 0; \quad x_A U_A \dot{\varphi} - c^2 = 0 \end{array} \right.$$

e nell'ultima equazione si é tenuto conto che  $x_A a_A = c^2$ . A questo punto occorre introdurre le sei nuove incognite

$$(8,4) \quad X = U_A \varphi_A; \quad Y = H_A \varphi_A; \quad Z = H_A h_A; \quad W = U_A h_A; \quad R = H_A x_A; \quad S = U_A x_A$$

e dedurre dalle (3) sei equazioni indipendenti in tali incognite.

Moltiplichiamo la prima equazione rispettivamente per  $u_B, h_B, \varphi_B$  ed  $x_B$ , e lo stesso facciamo con la terza equazione. Tenendo presente che  $h_A x_A = r c f$ , dove  $f$  é l'indice del fluido, otteniamo il seguente sistema di equazioni indipendenti nelle sei incognite (4):

$$(8,5) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} Z + h^2 X - h_A \varphi_A W = 0; \quad \dot{\varphi} W = c^2 Y \\ 2 h^2 \dot{\varphi} X = (2 \dot{\varphi}^2 + c^2 \varphi^2) Z - 2 c^2 h_A \varphi_A Y = 0 \\ h^2 \dot{\varphi} S + c^2 \varphi' Z = c^2 h_A \varphi_A R + c^3 r f Y \\ \dot{\varphi} R + r c f X - h_A \varphi_A S = 0; \quad S \dot{\varphi} = c^2 \end{array} \right.$$

il quale non é più omogeneo, e quindi ammette soluzioni non tutte nulle.

Dalla seconda ed ultima equazione avremo

$$(8,6) \quad W = c^2 Y / \dot{\varphi}; \quad S = c^2 / \dot{\varphi}$$

Dalla prima equazione si ricava la incognita  $Z$

$$(8,7) \quad Z = \frac{c^2}{\dot{\varphi}^2} h_A \varphi_A Y - \frac{h^2}{\dot{\varphi}} X$$

Sostituendo nella terza equazione e semplificando, si ricava la  $X$

$$(8,8) \quad X = c^2 h_A \varphi_A Y / h^2 \dot{\varphi}$$

Tale valore, sostituito nella (7), ci dà  $Z = 0$ . Dalla quinta equazione, tenendo conto della (8), ricaviamo la  $R$

$$(8,9) \quad R = c^2 h_A \varphi_A / \dot{\varphi}^2 - r c^3 f h_A \varphi_A Y / h^2 \dot{\varphi}^2$$

Sostituendo nella quarta equazione, otteniamo in definitiva

$$(8,10) \quad [h^2 - c r f Y] \cdot [h^2 - c^2 (h_A \varphi_A)^2 / \dot{\varphi}^2] = 0$$

Per  $Y$  arbitrario, deve essere nullo il secondo fattore, ed otteniamo così l'equazione delle caratteristiche

$$(8,11) \quad h^2 \dot{\varphi}^2 - c^2 (h_A \varphi_A)^2 = 0$$

Se allora poniamo

$$(8,12) \quad h_N = h_A \varphi_A / \bar{\varphi}; \quad V = \dot{\varphi} / \bar{\varphi} \quad (\bar{\varphi}^2 \neq 0)$$

otteniamo l'equazione  $h^2 V^2 - c^2 h_N^2 = 0$ , da cui

$$(8,13) \quad \boxed{h^2 U^2 - c^2 *h_N^2 = 0}$$

Tenendo conto della (2), otteniamo la velocità delle onde di Alfven, nella relatività proiettiva

$$(8,14) \quad U^2 = c^2 *h_N^2 / h^2 = *h_N^2 / M$$

Indicando con  $\theta$  l'angolo dei due vettori  $h_A$  ed  $(h_A)_N$ , possiamo scrivere la (14) nel seguente modo

$$(8,15) \quad U = \pm c \cos \theta \leq c$$

In particolare, se  $*h_N^2 = h^2$ , cioè se il campo magnetico è nella direzione di propagazione dell'onda, si ha  $\theta = 0$ , e quindi  $U = c$ .

Inoltre si ha

$$(8,16) \quad Z = H_A h_A = 0$$

cioè la discontinuità è ortogonale al campo magnetico.

Se invece nella (10) annulliamo il primo fattore, otteniamo la soluzione

$$(8,17) \quad \begin{cases} X = c h_A \varphi_A / r f \dot{\varphi}; & Y = h^2 / r c f; & Z = 0 \\ W = c h^2 / r f \dot{\varphi}; & R = 0; & S = c^2 / \dot{\varphi} \end{cases}$$

e tale soluzione si annulla, al limite relativistico.

### 9 - L'EQUAZIONE DI D'ALEMBERT GENERALIZZATA

Nel cronotopo di Castelnuovo vale la seguente equazione di D'Alembert generalizzata [9]

$$(9,1) \quad \boxed{(1 + \alpha^2) \varphi_{xx} + 2 \alpha \gamma \varphi_{xt} - (1 - \gamma^2) \varphi_{tt} / c^2 + 2 \alpha \varphi_x + 2 \gamma \varphi_t + n(n + 3) \varphi = 0}$$

nella quale abbiamo supposto che la funzione  $\varphi$  sia omogenea di grado  $n$  nelle  $(\bar{x}_A)$ . Le caratteristiche uscenti da un punto  $P$  sono le due tangenti all'assoluto, condotte da  $P$ , ed in conseguenza la (1) è una equazione differenziale del tipo «misto» di Tricomi, che è *iperbolica* nei punti dello spazio fisico (esterni all'assoluto), *parabolica* nei punti dell'assoluto ed *ellittica* negli altri punti.

Tale equazione è stata ridotta a forma normale dalla prof. M. Cinquini Cibrario, della quale riportiamo i calcoli che mi ha gentilmente comunicato e che ringrazio vivamente. A questo scopo facciamo la posizione  $\xi = x$  [14], e poniamo per semplicità  $c = r = 1$ . Determiniamo la funzione  $\tau(x, t)$  come integrale della equazione

$$(9,2) \quad (1 + x^2) \tau_x + x t \tau_t = 0$$

le cui caratteristiche soddisfano la

$$(9,3) \quad x dx/(1+x^2) = dt/t$$

e quindi, integrando avremo

$$(9,4) \quad t = k \sqrt{1+x^2}$$

Si prenda l'integrale particolare della (3)

$$(9,5) \quad \tau(x, t) = t/\sqrt{1+x^2} - 1$$

in modo che si abbia  $\tau(x, t) = 0$  sul ramo  $t = +\sqrt{1+x^2}$  della iperbole assoluto, mentre risulta  $\tau(x, t) = -2$  sul ramo  $t = -\sqrt{1+x^2}$ .

Si faccia poi il seguente cambiamento di variabili

$$(9,6) \quad \xi = x; \quad \tau = t/\sqrt{1+x^2} - 1$$

il cui Jacobiano è dato da  $1/\sqrt{1+x^2} \neq 0$ . Avremo allora, con facili calcoli

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \varphi_\xi + \varphi_\tau [-xt(1+x^2)^{-3/2}]; & \varphi_t &= \varphi_\tau (1+x^2)^{-1/2} \\ \varphi_{xx} &= \varphi_{\xi\xi} + 2\varphi_{\xi\tau} [-xt(1+x^2)^{-3/2}] + \varphi_{\tau\tau} x^2 t^2 (1+x^2)^{-3} + \\ & \quad + \varphi_\tau [-t(1+x^2)^{-3/2} + 3x^2 t(1+x^2)^{-5/2}] \\ \varphi_{xt} &= \varphi_{tx} = \varphi_{\xi\tau} (1+x^2)^{-1/2} + \varphi_{\tau\tau} [-xt(1+x^2)^{-2}] + \\ & \quad + \varphi_\tau [-x(1+x^2)^{-3/2}]; & \varphi_{tt} &= \varphi_{\tau\tau} (1+x^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Sostituendo tali valori nella equazione (1) e semplificando, si ottiene la seguente equazione in forma canonica (per  $n = 0$  e con  $c = r = 1$ )

$$(9,7) \quad \boxed{(1+\xi^2)^2 \varphi_{\xi\xi} + \tau(\tau+2) \varphi_{\tau\tau} + 2\xi(1+\xi^2) \varphi_\xi + (\tau+1) \varphi_\tau = 0}$$

Essa ammette l'equazione delle caratteristiche

$$(9,8) \quad (1+\xi^2)^2 d\tau^2 + \tau(\tau+2) d\xi^2 = 0$$

Tali caratteristiche sono reali per  $\tau(\tau+2) \leq 0$ , e quindi si hanno le due rette paraboliche

$$(9,9) \quad \tau = 0; \quad \tau = -2$$

che corrispondono ai due rami della iperbole equilatera (*assoluto*).

La (7) é quindi di tipo iperbolico entro la striscia limitata dalle due rette (9), e per  $\xi$  arbitrario. Fuori di tale striscia é invece di tipo ellittico.

Con un ulteriore cambiamento di variabili, si può rendere uguale ad 1 il coefficiente di  $\varphi_{\xi\xi}$ . A tale scopo si determini la funzione  $X(\xi)$  mediante la condizione

$$(9,10) \quad (1 + \xi^2)^2 X'^2(\xi) = 1, \text{ da cui } X = \text{arctg } \xi$$

e si faccia il seguente cambiamento di variabili

$$(9,11) \quad X = \text{arctg } \xi; \quad T = \tau$$

e lo jacobiano é dato da  $1/(1 + \xi^2) \neq 0$ . Si avrà allora

$$\varphi_{\xi} = \varphi_X/(1 + \xi^2); \quad \varphi_{\xi\xi} = \varphi_{XX}/(1 + \xi^2)^2 - [2\xi/(1 + \xi^2)^2]\varphi_X$$

e sostituendo nella (7) otteniamo la nuova equazione in forma canonica

$$(9,12) \quad \boxed{\varphi_{XX} + T(T + 2)\varphi_{TT} + (T + 1)\varphi_T = 0}$$

la quale ammette ancora la rette paraboliche

$$(9,13) \quad T = 0; \quad T = -2$$

mentre la retta  $T = -1$  corrisponde all'asse delle  $x$ .

Le caratteristiche della (12) si ottengono integrando l'equazione

$$(9,14) \quad dT^2 + T(T + 2)dX^2 = 0$$

e sono reali e distinte per  $-2 < T < 0$ . Dalle equazioni scritte segue che

$$dX = \pm dT/\sqrt{-T^2 - 2T} \text{ cioè } dX = \pm dT/\sqrt{1 - (1 + T)^2}$$

e quindi si hanno le due famiglie di caratteristiche

$$(9,15) \quad X = \pm \text{arcsen}(T + 1) + X_0$$

le quali ammettono come involuppo le due rette paraboliche (13).

## BIBLIOGRAFÍA

- (1) La «relatività proiettiva» é sviluppata nel volume G. ARCIDIACONO, *Relatività e Cosmologia*, Libreria Veschi (Viale Università, 7) Roma 1973.
- (2) G. CASTELNUOVO, *L'Universo di De Sitter*, Rend. lincei, XII, 263 (1930); I. FANTAPPIE', *Su una nuova teoria di «relatività finale»*, Rend. Lincei, Ser. 8.º, vol. XVII, fasc. 5 (1954).
- (3) E. A. MILNE, *Kinematic Relativity*, Oxford 1948.
- (4) R. L. MALLETT, G. N. FLEMING, *Position operators in a  $(3 + 1)$  de Sitter space*, Journ. Math. Phys. 14,45 (1973).
- (5) E. INONU, *Contraction of Lie groups and their representations*, nel volume F. GURSEY, *Group theoretical concepts and methods in Elementary Particle Physics*, New York 1964, pag. 391.
- (6) J. R. DEROME, J. G. DUBOIS, *Hooke's symmetries and non relativistic cosmological kinematics*, Nuovo Cimento, 9 B, 351 (1972).
- (7) H. BACRY, J. M. LEVY-LEBLOND, *Possible Kinematics*, Journ. Math. Phys. 9, 1605 (1968).
- (8) J. M. LEVY-LEBLOND, *Une nouvelle limite non relativiste du groupe de Poincaré*, Ann. Poinc. III, 1, (1965).
- (9) G. ARCIDIACONO, *Magnetoidrodinamica e cosmologia*, Coll. Math. XIX, 177 (1968).
- (10) G. ARCIDIACONO, *L'Universo di De Sitter-Castelnuovo e la termoidrodinamica*, Coll. Math. XXIII, 105-128 (1972).
- (11) G. ARCIDIACONO, *L'Universo di De Sitter-Castelnuovo e la magnetoidrodinamica ideale*, Coll. Math. XXI, 149-171 (1970).
- (12) A. M. PRATELLI, *Discontinuità ed ipersuperfici caratteristiche in magnetoidrodinamica relativistica*, Ann. Mat. LXIX, 41 (1965); *Comportamento delle discontinuità nella fluidodinamica relativistica*, Atti Acc. Scienze Torino, 98, 1 (1964).
- (13) A. LICHNEROWICZ, *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics*, New York 1967; Y. BRUHAT, *Fluides relativistes de conductibilité infinie*, Astronautica Acta, 6, 354 (1960).
- (14) F. TRICOMI, *Equazioni alle derivate parziali di tipo misto*, Memorie Acc. Lincei, 14, 133 (1924); M. CIBRARIO, *Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo misto*, Rend. Istituto Lombardo, 65, 889 (1932).

Su questi argomenti ho tenuto una serie di lezioni (15-19 maggio 1973) alla Facoltà di Scienze della Università di Valencia.

Prof. GIUSEPPE ARCIDIACONO  
Via Acquedotto del Peschiera 96  
00135 - ROMA