

REPRESENTACIONES DE ENLACES EN RELACION  
CON RECUBRIDORES DOBLES RAMIFICADOS

por

JOSE M. MONTESINOS

§0. Introducción

Representaremos por  $t: \tilde{L} \rightarrow S^3$  al recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un enlace  $L$  de  $S^3$ .

Un *enlace representado*  $(L, \omega)$  es un par formado por un enlace  $L$  y una representación transitiva  $\omega$  de  $\pi(S^3 - L)$  en el grupo de permutaciones  $\mathfrak{S}_n$  de los  $n$  índices  $0, \dots, n-1$ . Una representación  $\omega$  es *simple* (ver [4]) cuando, para cualquier meridiano  $m$  de  $L$ ,  $\omega(m)$  es una trasposición. Llamaremos  $p: M(L, \omega) \rightarrow S^3$  al recubrimiento, ramificado sobre  $L$ , asociado de modo único a la representación  $\omega$  (ver [4] y [5]). Entonces  $p|_{M - p^{-1}L}: M - p^{-1}L \rightarrow S^3 - L$  es un recubrimiento, no ramificado, correspondiente al subgrupo  $\omega^{-1}\mathfrak{C}_n$  de  $\pi(S^3 - L)$ , siendo  $\mathfrak{C}_n$  el subgrupo de  $\mathfrak{S}_n$  de elementos que dejan fijo un determinado índice (p. e. el cero).

En esta nota estudiaremos primero el ejemplo de las variedades  $M_g = S^1 \times F_g$ , siendo  $F_g$  una superficie orientable de género  $g > 0$ . Ha sido demostrado en [4] y [6] que  $M_g$  no es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre  $S^3$ . Sin embargo, veremos aquí que  $M_g$  es un recubridor de cuatro hojas ramificado, correspondiente a una representación  $\omega$  de  $\pi(S^3 - L)$  en  $\mathfrak{S}_4$ , siendo la imagen de  $\omega$  el grupo de KLEIN de cuatro elementos. Demostraremos que este recubrimiento puede factorizarse de tal modo que  $M_g$  sea un recubridor doble, no ramificado, sobre  $\tilde{L}$ .

De un modo más general, sea  $\mathfrak{C}$  un grupo,  $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{C}$  un subgrupo de índice dos y  $\alpha$  una inmersión transitiva de  $\mathfrak{C}$  en  $\mathfrak{S}_n$ . Para una representación  $\omega$  de  $\pi(S^3 - L)$  sobre  $\mathfrak{C}$  tal que  $\omega m \notin \mathfrak{H}$  y  $(\omega m)^2 = 1$ , estudiaremos la posición de  $t: \tilde{L} \rightarrow S^3$  respecto de  $p: M(L, \alpha\omega) \rightarrow S^3$ . Demostraremos los siguientes teoremas.

TEOREMA 1. Si  $\alpha^{-1}\mathfrak{E}_n$  está contenido en  $\mathfrak{F}$  entonces  $n$  es par y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M(L, \alpha\omega) & \xrightarrow{p} & S^3 \\ & \searrow q & \nearrow t \\ & & \tilde{L} \end{array}$$

en donde  $q$  es un recubrimiento (no ramificado) de  $n/2$  hojas.

TEOREMA 2. Si  $\alpha^{-1}\mathfrak{E}_n$  no está contenido en  $\mathfrak{F}$ , el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ r \swarrow & & \searrow s \\ \tilde{L} & & M(L, \alpha\omega) \\ t \searrow & & \swarrow p \\ & S^3 & \end{array}$$

en donde  $r$  es un recubrimiento de  $n$  hojas no ramificado y  $s$  es un recubrimiento cíclico de dos hojas ramificado sobre el enlace de  $M(L, \alpha\omega)$  formado de aquellas componentes de  $p^{-1}L$ , cuyo índice de ramificación es uno.

El estudio de estas representaciones puede tener interés en vista de la siguiente observación hecha en § 3: «Si todo enlace  $L$ , distinto del nudo trivial, admite una representación transitiva  $\omega : \pi(S^3 - L) \rightarrow \mathfrak{E}_n$ , con  $n \geq 3$ , tal que  $(\omega m)^2 = 1$ , entonces es correcta la Conjetura I.5. de [5]».

En esta nota, hemos hecho aplicación de estos Teoremas al caso de ser  $\mathfrak{E}$  el grupo diedral  $\mathfrak{D}_p$ , con  $p$  impar, y  $\mathfrak{F}$  el subgrupo cíclico  $\mathfrak{E}_p \subset \mathfrak{D}_p$  de  $p$  elementos, obteniendo así el Teorema 4 de § 4.

Otra aplicación de estos Teoremas ha sido hecha al caso de representaciones simples, en las cuales  $\mathfrak{E}$  es  $\mathfrak{E}_n$  y  $\mathfrak{F}$  es el subgrupo alternaute  $\mathfrak{A}_n$  de  $\mathfrak{E}_n$ . Hemos demostrado así el Teorema 5 de § 5, que

fue hallado en un intento de dilucidar la Conjetura  $A'$  de [4]. El ejemplo del final de § 5 puede ser indicativo a tal respecto.

Los resultados de § 2 se utilizan en [7] para obtener ejemplos de enlaces representados no separables (ver [4], [5] y [6]).

§ 1. Un ejemplo

1. La superficie orientable de género  $g$ ,  $F_g$ , es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre  $2g + 2$  puntos de  $S^2$ . En Fig. 1 la involución de  $F_2$  que define el recubrimiento  $q'$  es la simetría respecto al eje  $E$ . La singularidad de  $q'$  es  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_6$ .

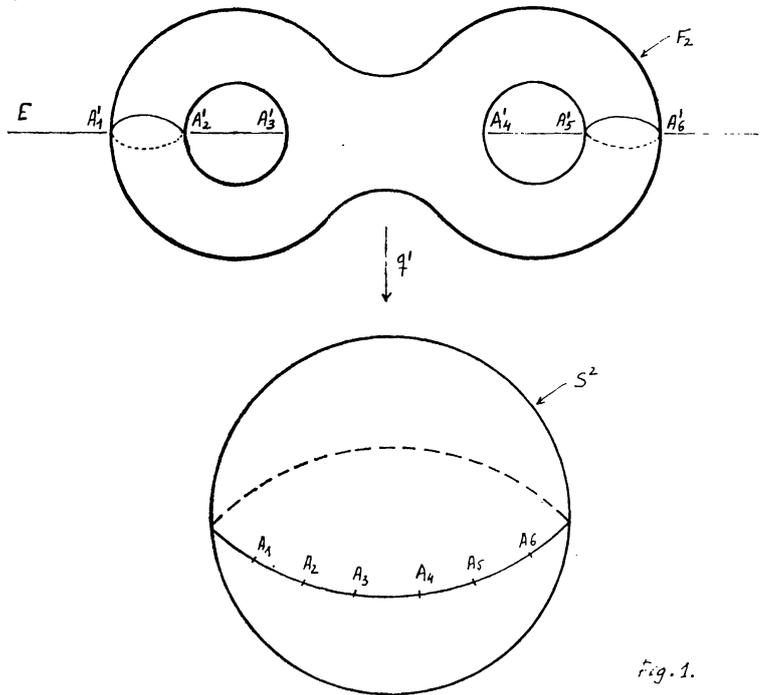


Fig. 1.

2. Entonces  $q = 1 \times q' : S^1 \times F_g \rightarrow S^1 \times S^2$  convierte a  $M_g = S^1 \times F_g$  en un recubridor doble ramificado sobre el enlace  $A \times S^1$  de  $S^1 \times S^2$ . Representamos  $S^1 \times S^2$  en Fig. 2 identificando adecuadamente  $S^2 \times \{0\}$  con  $S^2 \times \{1\}$  en  $S^2 \times I$ .



es homeomorfo a  $M_g$  (comparar [4, Fig. 1 a 5]). Es fácil ver además que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M(L, \omega) & \xrightarrow{p} & S^3 \\
 & \searrow q & \nearrow t \\
 & & S^1 \times S^2
 \end{array}$$

es conmutativo;  $t$  se ramifica sobre  $R' + S'$  y  $q$  se ramifica sobre  $A \times S^1 = t^{-1}(L - (R' + S'))$ .

§ 2. Enlaces representados sobre el grupo de Klein

1. El grupo de KLEIN  $\mathfrak{K}$  está constituido por las permutaciones (01)(23), (02)(13), (03)(12), junto con la identidad de  $\mathfrak{S}_4$ . Sea  $(L, \omega)$  un enlace representado sobre  $\mathfrak{K}$  de tal manera que  $\omega m \neq 1$  para cada meridiano  $m$  de  $L$ . Puede verse que, fijada una componente de  $L$ ,  $\omega$  aplica sus meridianos en un mismo elemento de  $\mathfrak{K}$  distinto de 1; llamaremos  $L_g$  a la unión de las componentes de  $L$  cuyos meridianos se aplican en el elemento  $g$  de  $\mathfrak{K}$ . Sea entonces  $L'_g = L - L_g$ .

TEOREMA 3. *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc}
 M(L, \omega) & \xrightarrow{p} & S^3 \\
 & \searrow q & \nearrow t \\
 & & \tilde{L}'_g
 \end{array}$$

en donde  $p$  es el recubrimiento ramificado correspondiente a  $(L, \omega)$ ;  $q$  es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre  $t^{-1}L'_g$  y  $t$  es el recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre  $L'_g$ . Si  $L'_g$  es vacío, entonces  $q$  es un recubridor doble no ramificado.

*Demostración.*  $\alpha: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}/\mathfrak{H} \approx \mathfrak{C}_2$  es el homomorfismo natural determinado por el subgrupo  $\mathfrak{H}$ , de índice dos, generado por  $g$ . Si  $m$  es

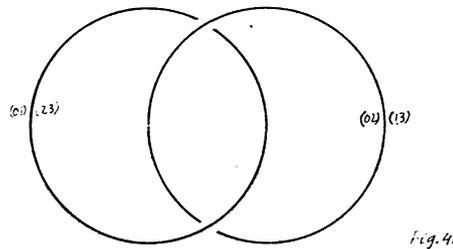
un meridiano de  $L$ , entonces  $\alpha\omega m = 1$  si y sólo si  $m$  es un meridiano de  $L_g$ . Así  $M(L, \alpha\omega)$  es  $\tilde{L}'_g$  y el recubrimiento (no ramificado)

$$t' = t|_{\tilde{L}'_g - t^{-1}L} : \tilde{L}'_g - t^{-1}L \rightarrow S^3 - L$$

corresponde al subgrupo  $\ker\alpha\omega = \omega^{-1}\mathfrak{H}$  de  $\pi(S^3 - L)$ ; en otras palabras, la imagen de  $t'_\#$  es  $\omega^{-1}\mathfrak{H}$ .

La imagen de  $\omega t'_\# : \pi(\tilde{L}'_g - t^{-1}L) \rightarrow \mathfrak{H}$  es entonces  $\mathfrak{H} \approx \mathbb{C}_2$ . Si  $m$  es un meridiano de  $t^{-1}L$ , entonces  $\omega t'_\# m = 1$  si y sólo si  $m$  es un meridiano de  $t^{-1}L'_g$ , ya que, en este caso,  $t'_\# m = n^2$ , siendo  $n$  un meridiano de  $L$ . Así  $\omega t'_\#$  define un recubrimiento,  $q : Q \rightarrow \tilde{L}'_g$ , cíclico de dos hojas ramificado sobre  $t^{-1}L_g$ ;  $q|_{Q - (tq)^{-1}L}$  es entonces un recubrimiento de dos hojas (no ramificado) sobre  $\tilde{L}'_g - t^{-1}L$ , correspondiente al subgrupo  $t_\#^{-1}\ker\omega$  de  $\pi(\tilde{L}'_g - t^{-1}L)$ . Esto significa que  $Q - (tq)^{-1}L$  es un recubridor de cuatro hojas (no ramificado) sobre  $S^3 - L$ , correspondiente al subgrupo  $\ker\omega$  de  $\pi(S^3 - L)$ . Así pues  $Q = M(L, \omega)$  y  $qt = p$ .

2. Por ejemplo, si  $(L, \omega)$  es el enlace representado de Fig. 4,  $M(L, \omega)$  es un recubridor de dos hojas (no ramificado) sobre  $\tilde{L} = P^3$ . Por tanto  $M(L, \omega) = S^3$ . (Para más ejemplos ver [7]).



**§ 3. Representaciones de enlaces en relación con recubridores cíclicos de dos hojas ramificados sobre  $S^3$**

1. Si  $L$  es un enlace de  $S^3$  y  $t : \tilde{L} \rightarrow S^3$  es el recubridor cíclico de dos hojas correspondiente, Fox demuestra en [4] que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi(\tilde{L} - t^{-1}L) & \xrightarrow{t'_\#} & \pi(S^3 - L) \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 \pi(\tilde{L}) & \xrightarrow{h} & \pi(S^3 - L)/\mathfrak{G}
 \end{array}$$

en donde  $t'_\#$  es la inyección inducida por  $t|\tilde{L} - t^{-1}L$  y  $f$  corresponde a la inclusión  $\tilde{L} - t^{-1}L \subset \tilde{L}$ ;  $g$  es la proyección determinada por el subgrupo normal  $\mathfrak{G}$  generado por los elementos  $m^2$ , en donde  $m$  es un meridiano de  $L$ .

$t'_\#(\ker f) = \mathfrak{G}$  porque  $\ker f$  es el mínimo subgrupo normal que contiene a los meridianos de  $t^{-1}L$ , así  $h$  es inyectiva y por tanto  $\pi(S^3 - L)/\mathfrak{G}$  contiene a  $\pi(\tilde{L})$  como un subgrupo de índice dos.

Como Fox observa en [4]  $\pi(\tilde{L}) = 1$  si y sólo si  $\pi(S^3 - L)/\mathfrak{G} \approx \mathfrak{C}_2$  y esto le permite reformular algebraicamente la *Conjetura I.5.* de [5], (ver [4, Conjetura B']).

2. Sea  $\omega : \pi(S^3 - L) \rightarrow \mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 3$ , una representación (transitiva) de  $L$  tal que  $(\omega m)^2 = 1$ . Entonces  $\omega$  induce una representación transitiva  $\omega' : \pi(S^3 - L)/\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{S}_n$ , lo cual implica que la imagen de  $\omega'$  tiene más de dos elementos. Por lo tanto, si existe  $\omega$ ,  $\pi(\tilde{L}) \neq 1$ .

Si  $L$  tiene dos o más componentes, siempre existe una representación transitiva de  $\pi(S^3 - L)$  sobre el grupo de KLEIN.

*Cuestión.* ¿Todo nudo  $N$ , no trivial, admite una representación transitiva  $\omega : \pi(S^3 - N) \rightarrow \mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 3$ , tal que  $(\omega m)^2 = 1$ ?

La respuesta afirmativa a esta cuestión implica la *Conjetura I.5.* de [5].

3. Sea  $\mathfrak{E}$  un grupo y  $\mathfrak{F}$  un subgrupo de índice dos. Supongamos que existe una representación (transitiva)  $\omega$  de  $\pi(S^3 - L)$  sobre  $\mathfrak{E}$  tal que  $\omega m$  no pertenece a  $\mathfrak{F}$  y  $(\omega m)^2 = 1$ . Entonces  $\omega$  induce la representación.

$$\omega' : \pi(S^3 - L)/\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{E}$$

y se tiene que

$$\text{imagen } \omega' h = \text{imagen } \omega t'_\# = \mathfrak{F},$$

porque  $\tilde{L} - t^{-1}L$  corresponde a la representación

$$\pi(S^3 - L) \xrightarrow{\omega} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathfrak{F} \approx \mathbb{C}_2$$

y así es  $t'_\# \pi(\tilde{L} - t^{-1}L) = \omega^{-1}\mathfrak{F}$ .

Por lo tanto, si existe  $\omega$ , entonces existe una representación de  $\pi(\tilde{L})$  sobre  $\mathfrak{F}$ . Como veremos en § 4., esta condición es suficiente, en algunos casos, para la existencia de  $\omega$ .

Sea  $\alpha$  una inmersión transitiva de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}_n$ . Consideremos el enlace representado  $(L, \alpha\omega)$  y estudiemos a continuación la posición de  $\tilde{L}$  respecto de  $M(L, \alpha\omega)$ . Veremos dos casos, según  $\alpha^{-1}\mathbb{C}_n$  esté o no contenido en  $\mathfrak{F}$ .

4. Supongamos que  $\alpha^{-1}\mathbb{C}_n$  está contenido en  $\mathfrak{F}$ . Esto significa que  $\alpha\omega m$  no deja ningún índice invariante, ya que  $\omega m \notin \mathfrak{F}$ ; como además  $(\omega m)^2 = 1$ ,  $\alpha\omega m$  es un producto de ciclos de orden dos y así  $n$  es par.

Sea  $p: M(L, \alpha\omega) \rightarrow S^3$  el recubridor ramificado asociado al enlace representado  $(L, \alpha\omega)$ .  $M(L, \alpha\omega) - p^{-1}L$  es un recubridor (no ramificado) de  $S^3 - L$  correspondiente al subgrupo  $(\alpha\omega)^{-1}\mathbb{C}_n$ . Como  $(\alpha\omega)^{-1}\mathbb{C}_n \subset \omega^{-1}\mathfrak{F}$  y  $\omega^{-1}\mathfrak{F}$  da lugar al recubridor (no ramificado)  $\tilde{L} - t^{-1}L \xrightarrow{t'} S^3 - L$ , deducimos que  $M(L, \alpha\omega) - p^{-1}L$  es un recubridor (no ramificado) de  $n/2$  hojas sobre  $\tilde{L} - t^{-1}L$ . Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M(L, \alpha\omega) & \xrightarrow{p} & S^3 \\ & \searrow q & \nearrow t \\ & & \tilde{L} \end{array}$$

Como  $\alpha\omega m$  es un producto de  $n/2$  ciclos de orden dos, deducimos que el cardinal de  $p^{-1}y$  es  $n/2$  para  $y \in L$ . Como el cardinal de  $t^{-1}y$  es uno, eso implica que  $q$  es no ramificado. Esto prueba el Teorema 1 de la Introducción.

5. Supongamos ahora que  $\alpha^{-1}\mathbb{C}_n$  no está contenido en  $\mathfrak{F}$ . Sea como antes  $p: M(L, \alpha\omega) \rightarrow S^3$  el recubridor ramificado asociado con  $(L, \alpha\omega)$ .  $M(L, \alpha\omega) - p^{-1}L$  es un recubridor (no ramificado) de  $S^3 - L$

correspondiente al subgrupo  $(\alpha\omega)^{-1}\mathfrak{E}_n$ . Sea  $q: Q \rightarrow S^3$  el recubridor ramificado correspondiente al subgrupo  $(\alpha\omega)^{-1}\mathfrak{E}_n \cap \omega^{-1}\mathfrak{F}$  de  $\pi(S^3 - L)$ .  $Q - q^{-1}L$  es entonces un recubridor (no ramificado) de  $M(L, \alpha\omega) - p^{-1}L$ , correspondiente a la representación:

$$\pi(M(L, \alpha\omega) - p^{-1}L) \xrightarrow{p\#} \pi(S^3 - L) \xrightarrow{\omega} \mathfrak{E} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{E}/\mathfrak{F} \approx \mathfrak{E}_2$$

porque  $\ker(\beta\omega p\#) = (\omega p\#)^{-1}\mathfrak{F} = p\#^{-1}((\alpha\omega)^{-1}\mathfrak{E}_n \cap \omega^{-1}\mathfrak{F})$  ya que la imagen de  $p\#$  es  $(\alpha\omega)^{-1}\mathfrak{E}_n$ .

Nótese que, si  $m$  es un meridiano de  $p^{-1}L$ , es  $\beta\omega p\#m = 1$  exactamente cuando  $m$  es un meridiano de una rama de índice de ramificación dos, porque  $\omega m \notin \mathfrak{F}$  y  $(\omega m)^2 = 1$ . Así pues el cardinal de  $q^{-1}y$ , para  $y \in L$ , es  $n$ .

$Q - q^{-1}L$  es también un recubridor (no ramificado) de  $\tilde{L} - t^{-1}L$  y esto define  $r: Q \rightarrow \tilde{L}$ . Se tiene que el cardinal de  $(tr)^{-1}y$  es igual que el cardinal de  $q^{-1}y$ , para  $y \in L$ . Como el cardinal de  $t^{-1}y$  es uno, se deduce que el cardinal de  $r^{-1}y$  es  $n$  y así  $r$  es no ramificado. Esto prueba el Teorema 2 de la Introducción.

Si suponemos que  $\mathfrak{F}$  es transitivo en  $\mathfrak{E}_n$ , el recubrimiento (no ramificado)  $r|Q - q^{-1}L: Q - q^{-1}L \rightarrow \tilde{L} - t^{-1}L$  corresponde a la representación:

$$\pi(\tilde{L} - t^{-1}L) \xrightarrow{r\#} \pi(S^3 - L) \xrightarrow{\omega} \mathfrak{E} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{E}_n$$

porque  $(\alpha\omega r\#)^{-1}\mathfrak{E}_n = r\#^{-1}(\omega^{-1}(\alpha^{-1}\mathfrak{E}_n \cap \mathfrak{F}))$ , debido a que la imagen de  $r\#$  es  $\omega^{-1}\mathfrak{F}$ . Pero como  $\omega r\# = \omega'hf$  (ver § 3.3) y  $f$  transforma un meridiano de  $t^{-1}L$  en la identidad, se deduce que  $r: Q \rightarrow \tilde{L}$  es no ramificado y corresponde a la representación  $\alpha\omega'h$  de  $\pi(\tilde{L})$  en  $\mathfrak{E}_n$ .

#### § 4. Representaciones sobre el grupo diedral $\mathfrak{D}_p$

1. Supongamos que  $p$  es un número impar mayor que dos; analizando el trabajo de Fox [2, pág. 161] observamos que, para un enlace  $L$  de  $S^3$ , tenemos:

*« $\pi(S^3 - L)$  admite una representación  $\omega$  sobre  $\mathfrak{D}_p$ , tal que  $\omega m$  es una reflexión, si y solo si  $H_1(\tilde{L})$  admite una representación sobre  $\mathfrak{E}_p$ »*

Consecuencia de esto es que los nudos  $N$ , tales que  $\Delta_N(t) = 1$ , no admiten la representación  $\omega$ . Estos nudos dan lugar a recubridores  $\tilde{N}$  que son 3-esferas homológicas.

2. Sea pues  $\omega$  una representación de  $\pi(S^3 - L)$  sobre  $\mathfrak{C}_p$ ,  $p$  impar mayor que dos, tal que  $\omega m$  es una reflexión. Existe entonces una representación de  $H_1(\tilde{L})$  sobre  $\mathfrak{C}_p$  y llamaremos  $\mathfrak{Z}$  al núcleo de  $\pi(\tilde{L}) \rightarrow H_1(\tilde{L}) \rightarrow \mathfrak{C}_p$ .

$\mathfrak{D}_p$  tiene la presentación  $\{R_1, R_2; R_1^2 = R_2^2 = (R_1 R_2)^p = E\}$  (ver [1, pág. 6]). Llamaremos  $\alpha$  a la inmersión transitiva de  $\mathfrak{D}_p$  en  $\mathfrak{C}_p$  definida por

$$\alpha(R_1) = (1\ p-1)(2\ p-2) \dots \left(\frac{p-1}{2}\ \frac{p+1}{2}\right)$$

$$\alpha(R_2) = (02)(p-1\ 3) \dots \left(\frac{p+1}{2}\ \frac{p+3}{2}\right).$$

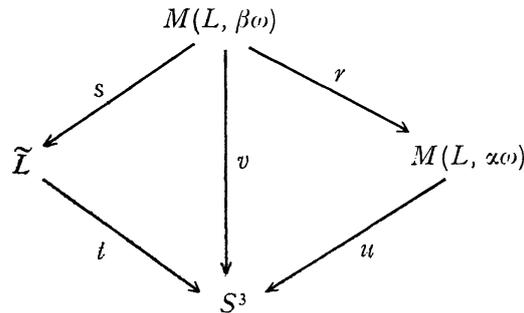
Sea  $\beta$  la inmersión transitiva de  $\mathfrak{D}_p$  en  $\mathfrak{C}_{2p}$  definida por

$$\beta(R_1) = (01)(23) \dots (2p-4\ 2p-3)(2p-2\ 2p-1)$$

$$\beta(R_2) = (03)(25) \dots (2p-4\ 2p-1)(2p-2\ 1).$$

3. Entonces a la representación  $\omega$  le corresponden dos enlaces representados  $(L, \alpha\omega)$  y  $(L, \beta\omega)$  y entre los recubridores asociados  $M(L, \alpha\omega) \rightarrow S^3$  y  $M(L, \beta\omega) \rightarrow S^3$  se tiene la siguiente relación:

TEOREMA. 4. *El diagrama siguiente es conmutativo:*



en donde  $r$  es un recubridor doble ramificado sobre las componentes de  $u^{-1}L$ , de índice de ramificación uno;  $s$  es un recubridor (no ramificado) regular de  $p$  hojas, correspondiente al subgrupo normal  $\mathfrak{Z}$  de  $\pi(\tilde{L})$ .

*Demostración.* Nótese que tanto  $\alpha(\mathfrak{C}_p) \cap \mathfrak{C}_p$  como  $\beta(\mathfrak{D}_p) \cap \mathfrak{C}_{2p}$  constan exclusivamente del elemento identidad. Para la demostración

basta aplicar el Teorema 2 a  $(L, \alpha\omega)$  con  $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}_p$  y  $\tilde{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}_p$ , teniendo en cuenta que  $\alpha\mathfrak{E}_p$  es transitivo en  $\mathfrak{E}_p$ . Entonces la variedad  $Q$ , dada por el Teorema 2, corresponde al subgrupo  $(\alpha\omega)^{-1}\mathfrak{E}_p \cap \omega^{-1}\mathfrak{E}_p = \ker\omega$  y así  $Q = M(L, \beta\omega)$  porque  $(\beta\omega)^{-1}\mathfrak{E}_{2p} = \omega^{-1}(\beta^{-1}\mathfrak{E}_{2p}) = \ker\omega$ .

4. Resultados parecidos pueden obtenerse fácilmente con representaciones sobre  $\mathfrak{D}_p$ ,  $p$  par. El caso  $\mathfrak{D}_2$  ha sido estudiado en § 2.

§ 5. Representaciones simples

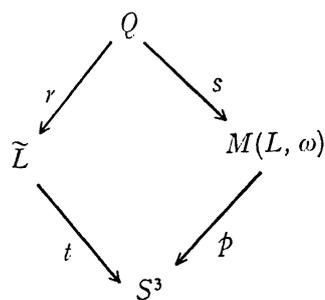
1. Estudiaremos ahora representaciones simples de  $\pi(S^3 - L)$  sobre  $\mathfrak{S}_n$  para un enlace  $L$  de  $S^3$ . El caso  $n = 3$  corresponde a representaciones sobre  $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{D}_3$  y esto ha sido estudiado en la sección anterior.

Sea  $\omega : \pi(S^3 - L) \rightarrow \mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 3$ , una representación simple y llamemos  $\lambda : \pi(\tilde{L}) \rightarrow \mathfrak{A}_n$  a la representación sobre el subgrupo alterante  $\mathfrak{A}_n$  de  $\mathfrak{S}_n$  definida en § 3.3. Es claro que  $\lambda^{-1}\mathfrak{E}_n$  es el núcleo de  $\lambda$  si y sólo si  $n = 3$ , y sólo en este caso es  $\lambda^{-1}\mathfrak{E}_n$  un subgrupo normal de  $\pi(\tilde{L})$ .

Por tanto, una condición necesaria para que  $L$  admita una representación simple sobre  $\mathfrak{S}_n$ , con  $n > 3$ , es que  $\pi(\tilde{L})$  admita un subgrupo no normal de índice  $n$ . Es claro que si  $\pi(\tilde{L})$  es abeliano (es el caso de ser  $L$  un nudo con dos puentes y  $\tilde{L}$  una lente [8])  $L$  no admite representaciones simples sobre  $\mathfrak{S}_n$  con  $n > 3$ .

El caso  $n = 3$  ha sido ya estudiado y se sabe que una condición necesaria y suficiente para que un nudo  $N$  admita una representación simple sobre  $\mathfrak{S}_3$  es que  $3 \mid \Delta_N(-1)$ . Esto significa que los nudos  $N$  tales que  $\tilde{N}$  es una lente  $L(m, n)$ , no siendo  $m$  múltiplo de 3, sólo admiten representaciones simples sobre  $\mathfrak{S}_2$ .

2. TEOREMA 5. El siguiente diagrama es conmutativo.



en donde  $\tau$  es un recubrimiento de  $n$  hojas (no ramificado) correspondiente al subgrupo  $\lambda^{-1} \mathfrak{S}_n$  de  $\pi(\tilde{L})$ ;  $s$  es un recubrimiento cíclico de dos hojas ramificado sobre el enlace de  $M(L, \omega)$  formado de aquellas componentes de  $p^{-1}L$  cuyo índice de ramificación es uno;  $p$  es el recubrimiento asociado a la representación  $(L, \omega)$ .  $Q$  es un recubridor regular de  $\tilde{L}$  exactamente cuando  $n = 3$ .

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema 2 a  $(L, \omega)$  con  $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_n$  y  $\tilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{A}_n$ , teniendo en cuenta que  $\mathfrak{A}_n$  es transitivo en  $\mathfrak{S}_n$ .

3. Sea, por ejemplo, el nudo representado  $(N, \omega)$  de Fig. 5.  $\tilde{N}$  es la lente  $L(3, 1)$  y  $Q$  es  $S^3$  porque  $Q$  es un recubridor de tres hojas (no ramificado) sobre  $\tilde{N} = L(3, 1)$  y por tanto  $Q$  es el recubridor universal de  $L(3, 1)$ . Existe, por tanto, una involución en  $S^3$  cuyo espacio órbita es  $M(N, \omega)$ . De [9] se deduce que  $M(N, \omega)$  es  $S^3$  (ver [3]).

En este ejemplo  $Q$  es  $M(N, \omega')$ , siendo  $(N, \omega')$  el nudo representado de Fig. 6.

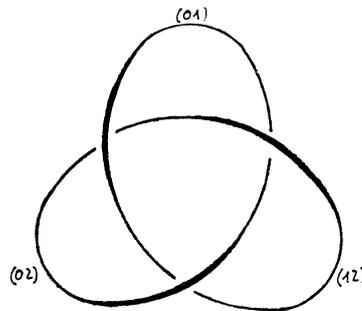


Fig. 5.

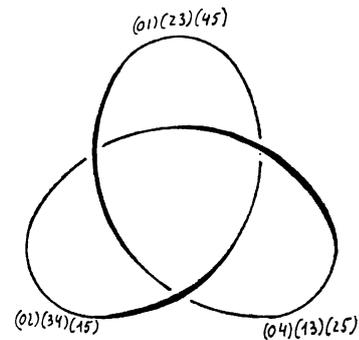


Fig. 6.

El Sr. KENNETH A. PERKO, Jr. me ha comunicado que la condición para la existencia de recubridores diedrales que, al comienzo de § 4, atribuimos al Profesor FOX, parece haber sido considerada antes por K. REIDEMEISTER en Math. Z. 29, comienzo de pág. 715. Recientemente han hecho estudios sobre recubridores diedrales R. H. FOX (Canadian J. Math. 22, 193-201), K. A. PERKO, Jr. («On dihedral covering spaces of knots», October 1973 AMS notices) y G. BURDE (Canadian J. Math. 23, 84-89). PERKO me ha hecho notar que el diagrama de pág. 86 de este último trabajo está relacionado con mi Teorema 4.

Aprovecho la oportunidad que me brinda el Editor para indicar dos correcciones a la *Tabla II* de mi Tesis («Sobre la Conjetura de Poincaré y los recubridores ramificados sobre un nudo» Universidad Complutense, Madrid 1971) que me han sido apuntadas por PERKO:  $8_{20}$  y  $9_{40}$  deben incluirse en *Tabla II* (sus recubridores asociados son  $S^3$ ) mientras que  $9_{36}$  debe retirarse de la *Tabla*.

## REFERENCIAS

- 1 H. S. M. COXETER & W. O. J. MOSER: *Generators and Relations for discrete groups*, *Ergebnisse der Mathematik*, Band 14, 1965.
- 2 R. H. FOX: «A quick trip through knot theory» *Topology of 3-manifolds and related topics*, Englewood Cliffs, N. J. (1962). 120-167.
- 3 R. H. FOX: «Construction of simply connected 3-manifolds» *Topology of 3-manifolds and related topics*, Englewood Cliffs (1962) 213-216.
- 4 R. H. FOX: «A note on branched cyclic coverings of spheres» *Revista Mat. Hisp.-Amer.* 4.º serie 32 (1972) 158-166.
- 5 J. M. MONTESINOS: «Reducción de la Conjetura de Poincaré a otras conjeturas geométricas» *Revista Mat. Hisp.-Amer.* 4.º serie 32 (1972) 33-51.
- 6 J. M. MONTESINOS: «Una familia infinita de nudos representados no separables» *Revista Mat. Hisp.-Amer.* 4.º serie 33 (1973) 32-35.
- 7 J. M. MONTESINOS: «Variedades de Seifert que son recubridores cíclicos ramificados de dos hojas» *Bol. Soc. mat. Mexicana.* 18 (1973) 1-32.
- 8 H. SCHUBERT: «Knoten mit zwei Brücken» *Math. Z.* 65 (1956) 133-170.
- 9 F. WALDHAUSEN: «Über Involutionen der 3-Sphäre» *Topology* 8 (1969) 81-91.

Universidad Complutense  
Facultad de Ciencias  
Sección de Matemáticas  
Madrid

