TOPOLOGISCHE TENSORPRODUKTE GEWISSER TOPOLOGISCHER VEKTORRÄUME

R. HOLLSTEIN

Sind E und F (nicht unbedingt separierte) topologische Vektorräume, so gibt es auf dem Tensorprodukt $E \otimes F$ eine feinste lineare Topologie π, für die die kanonische Abbildung $\Phi : E \times F \to E \otimes F$ stetig ist (vgl. S. O. Iyahen [6]). Diese Topologie soll lineare projektive Tensorprodukttopologie und $E \otimes_\pi F$ das lineare projektive Tensorprodukt genannt werden. In der Theorie der lokalkonvexen projektiven Tensorprodukte spielen die (DF)-Räume eine bedeutende Rolle (vgl. Grothendieck [2] u. [3]). In dieser Arbeit werden wir ähnliche Eigenschaften der von B. ERNST [1] untersuchten Ultra-(DF)-Räume in bezug auf das lineare projektive Tensorprodukt nachweisen. Dabei heißt ein topologischer Vektorraum E Ultra-(DF)-Raum, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) E besitzt eine Fundamentalfolge von beschränkten Mengen

(ii) Sei $(U_n^{(0)})_n$ eine Folge von kreisförmigen abgeschlossenen Nullumgebungen in E und sei für jedes $n = 1, 2, \ldots$ $(U_n^{(j)})_j$ Folge von ebensolchen Mengen mit $U_n^{(j)} + U_n^{(j)} \subset U_n^{(j-1)}$ für $j = 1, 2, \ldots$. Absorbiert jedes $U^{(j)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^{(j)}$ $(j = 1, 2 \ldots)$ alle beschränkten Mengen von E, so ist $U^{(0)}$ Nullumgebung in E.

Bevor wir uns dem linearen projektiven Tensorprodukt zuwenden, werden wir noch einige Sätze aus der Theorie der bilinearen Abbildungen in allgemeinen topologischen Vektorräumen beweisen, die für topologische Tensorprodukte von Bedeutung sind.

Sind E und F topologische Vektorräume, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}(E, F)$ den Vektorraum aller linearen Abbildungen von E in F und mit $L(E, F)$ den Teilraum der stetigen linearen Abbildungen. $L(E, F)$, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, werde mit $L_s(E, F)$ bezeichnet. $L_b(E, F)$ sei der Vektorraum $L(E, F)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten

Mengen. Sind P und Q Teilmengen aus E bzw. F, so sei $[P, Q]_{L(E,F)}$ die Menge aller stetigen linearen Abbildungen aus $L(E, F)$, die P in Q abbilden.

Sei G ein weiterer topologischer Vektorraum. Seien $\mathfrak{U}(E)$, $\mathfrak{L}(F)$ und $\mathfrak{W}(G)$ Nullumgebungsbasen in E, F bzw. G. Es wird der Vektorraum aller bilinearen Abbildungen von $E \times F$ in G mit $\mathfrak{B}(E \times F, G)$ bezeichnet. Unter $B(E \times F, G)$ verstehen wir den Vektorraum aller stetigen bilinearen Abbildungen von $E \times F$ in G. Für $x \in E$ und $y \in F$ seien $B_x : y \to B(x, y)$ und $B_y : x \to B(x, y)$ die partiellen Abbildungen zu $B \in \mathfrak{B}(E \times F, G)$. Jede bilineare Abbildung $B \in \mathfrak{B}(E \times F, G)$ kann als lineare Abbildung $B' \in \mathfrak{L}(F, \mathfrak{L}(E, G))$ oder $B'' \in \mathfrak{L}(E, \mathfrak{L}(F, G))$ identifiziert werden, wenn man definiert $B'(y) = B_y$ für $y \in F$ und $B''(x) = B_x$ für $x \in E$.

$B(E \times F, G)$, versehen mit der Topologie der bibeschränkten Konvergenz, soll mit $B_\beta(E \times F, G)$ bezeichnet werden.

Eine Menge $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}(E \times F, G)$ von bilinearen Abbildungen heißt gleichgradig hypostetig, wenn jedes $B \in \mathfrak{B}$ getrennt stetig ist und die Mengen

$$\mathfrak{B}_{C_1} = \{B_x \in L(F, G) : B \in \mathfrak{B} \text{ u. } x \in C_1\} \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{B}_{C_2} = \{B_y \in L(E, G) : B \in \mathfrak{B} \text{ u. } y \in C_2\}$$

für alle beschränkten Mengen C_1 und C_2 aus E bzw. F gleichstetig sind. Entsprechend heißt eine bilineare Abbildung $B \in \mathfrak{B}(E \times F, G)$ hypostetig.

In der Klasse der lokalkonvexen Räume ist jede gleichgradig hypostetige Menge von bilinearen Abbildungen aus $\mathfrak{B}(E \times F, G)$ gleichstetig, sofern E und F (DF)-Räume sind (vgl. Grothendieck [2]) Ein entsprechender Satz gilt auch für allgemeine topologische Vektorräume.

Satz 1: *Seien E und F separierte Ultra-(DF)-Räume und G metrisierbarer Vektorraum. Dann ist jede gleichgradig hypostetige Menge von bilinearen Abbildungen von $E \times F$ in G gleichstetig.*

Beweis: Sei $\mathfrak{B}$ gleichgradig hypostetige Menge aus $\mathfrak{B}(E \times F, G)$. Sei C_2 beschränkte Menge aus F und W Nullumgebung in G. Wegen der Gleichstetigkeit von $\mathfrak{B}_{C_2}$ existiert eine Nullumgebung U aus E mit

$$\mathfrak{B}_{C_2}(U) = \mathfrak{B}(U \times C_2) = \mathfrak{B}_U(C_2) \subset W,$$

so daß für die zu $\mathfrak{B}$ assoziierte Menge $\mathfrak{B}'' \subset L(E, L(F, G))$ gilt

$$\mathfrak{B}''(U) = \mathfrak{B}_U \subset [C_2, W]_{L(F, G)}$$

Also ist $\mathfrak{B}''$ gleichstetige Menge von linearen Abbildungen aus $L(E, L_b(F, G))$. Da F separierter Ultra-(DF)-Raum und G metrisierbarer Vektorraum ist, so ist $L_b(F, G)$ metrisierbar. Nach B. Ernst [1], Satz 2.7, ist dann $\mathfrak{B}''$ gleichmäßig beschränkt, d. h. es existiert eine Nullumgebung U aus E, so daß $\mathfrak{B}''(U)$ beschränkt in $L_b(F, G)$ ist. U läßt sich als Vereinigung einer Folge von beschränkten Mengen C_i darstellen, da E als Ultra-(DF)-Raum eine Fundamentalfolge von beschränkten Mengen besitzt. Wegen der gleichgradigen Hypostetigkeit von $\mathfrak{B}$ ist für jedes C_i aus E die Menge $\mathfrak{B}_{C_i} = \mathfrak{B}''(C_i)$ aus $L(F, G)$ gleichstetig. Damit ist die beschränkte Menge $\mathfrak{B}''(U) = = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}''(C_i) \subset L_b(F, G)$ Vereinigung von gleichstetigen Mengen $\mathfrak{B}''(C_i)$, also gleichstetig, da F Ultra-(DF)-Raum ist (B. Ernst [1], Satz 3.7). Zu jedem $W \in \mathfrak{W}(G)$ existiert dann ein $V \in \mathfrak{V}(F)$, so daß

$$\mathfrak{B}(U \times V) = \mathfrak{B}''(U)(V) \subset W$$

Damit ist die Gleichstetigkeit von $\mathfrak{B}$ gezeigt.

Korollar: *Unter den Voraussetzungen von Satz* 1 *ist jede hypostetige bilineare Abbildung stetig.*

Satz 2: *Sind E und F separierte Ultra-(DF)-Räume und G metrisierbarer Vektorraum, so ist jede beschränkte Menge $\mathfrak{B}$ aus $B_\beta(E \times F, G)$, die aus der Vereinigung einer Folge von gleichstetigen Mengen $\mathfrak{B}_i \subset B(E \times F, G)$ besteht, gleichstetig.*

Beweis: Der algebraische Isomorphismus

$$\mathfrak{B}(E \times F, G) \cong \mathfrak{L}(E, \mathfrak{L}(F, G)) \cong \mathfrak{L}(F, \mathfrak{L}(E, G))$$

induziert einen Isomorphismus zwischen $B(E \times F, G)$ und einem Teilraum von $L(E, L_b(F, G))$ bzw. $L(F, L_b(E, G))$. Insbesondere sind für gleichstetige Mengen $\mathfrak{B} \subset B(E \times F, G)$ auch $\mathfrak{B}' \subset L(F, L_b(E, G))$ und $\mathfrak{B}'' \subset L(E, L_b(F, G))$ gleichstetig. Denn zu einem solchen $\mathfrak{B}$ gibt es zu einem $W \in \mathfrak{W}(G)$ ein $U \in \mathfrak{U}(E)$ und ein $V \in \mathfrak{V}(F)$ mit $\mathfrak{B}(U \times V) \subset W$. Zu jeder beschränkten Menge C_1 aus E existiert dann ein $\lambda > 0$ mit $\lambda C_1 \subset U$, so daß aus $\mathfrak{B}(U \times V) \subset W$ folgt

$\mathfrak{B}(C_1 \times \lambda V) \subset W$ bzw. $\mathfrak{B}'(\lambda V) \subset [C_1, W]_{L(E,G)}$. Analog zeigt man die Gleichstetigkeit von $B'' \subset L(E, L_b(F, G))$.

Ähnlich läßt sich beweisen, daß für jede beschränkte Menge $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{B}_\beta(E \times F, G)$ auch $\mathfrak{B}'$ in $L_b(F, L_b(E, G))$ und $\mathfrak{B}''$ in $L_b(E, L_b(F, G))$ beschränkt sind.

Sei nun eine beschränkte Menge $\mathfrak{A}$ aus $B_\beta(E \times F, G)$ Vereinigung einer Folge von gleichstetigen Mengen $\mathfrak{A}_i \subset B(E \times F, G)$. Dann ist $\mathfrak{A}' = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i'$ beschränkt in $L_b(F, L_b(E, G))$ und Vereinigung einer Folge von gleichstetigen Mengen $\mathfrak{A}_i'$ Da F separierter Ultra-(DF)-Raum und $L_b(E, G)$ metrisierbarer Vektorraum ist, so ist $\mathfrak{A}'$ gleichsstetig (vgl. B. Ernst [1], Satz 3.7). Analog zeigt man die Gleichstetigkeit von $\mathfrak{A}''$. Für jede beschränkte Menge C_1 und C_2 aus E bzw. F sind dann die Mengen $\mathfrak{A}_{C_1} \subset L(F, G)$ und $\mathfrak{A}_{C_2} \subset L(E, G)$ gleichsstetig. Es gibt nämlich zu jedem $W \in \mathfrak{W}(G)$ ein $U \in \mathfrak{U}(E)$ und ein $V \in \mathfrak{V}(F)$, so daß

$$\mathfrak{A}'(V) \subset [C_1, W]_{L(E,G)} \text{ bzw. } \mathfrak{A}_{C_1}(V) = \mathfrak{A}'(V)\,(C_1) \subset W$$

und analog $\mathfrak{A}_{C_2}(U) \subset W$. $\mathfrak{A}$ ist damit gleichgradig hypostetig und nach Satz 1 gleichstetig.

Mit Hilfe der oben bewiesenen Sätze können nun gewisse Eigenschaften des linearen projektiven Tensorproduktes $E \otimes_\pi F$ abgeleitet werden.

Wie bei S. O. Iyahen [6] gezeigt, induziert für jeden topologischen Vektorraum G der kanonische Isomorphismus $A \to \widetilde{A}$ zwischen $\mathfrak{B}(E \times F, G)$ und $\mathfrak{L}(E \otimes F, G)$ einen Isomorphismus zwischen $L(E \otimes_\pi F, G)$ und $B(E \times F, G)$. Für gleichstetige Mengen $\widetilde{\mathfrak{A}}$ aus $L(E \otimes_\pi F, G)$ sind die assoziierten Mengen $\mathfrak{A}$ aus $B(E \times F, G)$ gleichstetig und umgekehrt.

Nach wie vor ungelöst ist das Problem, ob das lineare projektive Tensorprodukt von zwei separierten Vektorräumen wieder separiert ist.

Der starke Dualraum des lokalkonvexen projektiven Tensorproduktes von (DF)-Räumen E und F ist isomorph dem Vektorraum der stetigen Bilinearformen $B_\beta(E \times F)$. In allgemeinen topologischen Vektorräumen gilt der Satz:

Satz 3: *Seien E und F separierte Ultra-(DF)-Räume und sei G metrisierbarer Vektorraum. Dann ist $L_b(E \otimes_\pi F, G)$ isomorph $B_\beta(E \times F, G)$*

BEWEIS: Es ist $b > \beta$, da für jede beschränkte Menge C_1 aus E und C_2 aus F auch $C_1 \otimes C_2$ beschränkt in $E \otimes_\pi F$ ist.

Zum Beweis von $\beta > b$ genügt es zu zeigen, daß für jede Nullfolge $\{A_n\}$ aus dem metrisierbaren, insbesondere ultrabornologischen Raum $B_\beta(E \times F, G)$ die Folge $\{\tilde{A}_n\}$ beschränkt in $L_b(E \otimes_\pi F, G)$ ist. $\{A_n\}$ ist als Nullfolge beschränkt in $B_\beta(E \times F, G)$ und Vereinigung einer Folge von gleichstetigen Mengen. Nach Satz 2 ist demnach $\{A_n\}$ gleichstetig. Also ist auch $\{\tilde{A}_n\}$ gleichstetige und damit beschränkte Menge aus $L_b(E \otimes_\pi F, G)$.

SATZ 4: *Unter den Voraussetzungen von Satz 3 ist jede beschränkte Menge $\tilde{\mathfrak{A}}$ aus $L_b(E \otimes_\pi F, G)$, die aus der Vereinigung von gleichstetigen Mengen $\tilde{\mathfrak{A}}_i \subset L(E \otimes_\pi F, G)$ besteht, gleichstetig.*

BEWEIS: Die zu $\tilde{\mathfrak{A}}$ assoziierte Menge $\mathfrak{A}$ ist nach Satz 3 beschränkt in $B_\beta(E \times F, G)$ und den gleichstetigen Mengen $\tilde{\mathfrak{A}}_i$ entsprechen gleichstetige Mengen $\mathfrak{A}_i$ aus $B(E \times F, G)$. Nach Anwendung von Satz 2 ist $\mathfrak{A}$ gleichstetig und damit auch $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Obwohl das lineare projektive Tensorprodukt von zwei normierten Räumen i.a. nicht metrisierbar ist (bzw. keine abzählbare Nullumgebungsbasis besitzt), wie wir in [4] zeigten, gilt der folgende Satz:

SATZ 5: *Sind E und F separierte Ultra-(DF)-Räume, so ist auch das lineare projektive Tensorprodukt $E \otimes_\pi F$ ein Ultra-(DF)-Raum.*

BEWEIS: Nach B. ERNST [1], Satz 3.7, genügt es zu zeigen, daß für jeden metrisierbaren Vektorraum G gilt:

(i) $L_b(E \otimes_\pi F, G)$ ist metrisierbar

(ii) Ist $\tilde{\mathfrak{A}}$ beschränkte Teilmenge von $L_b(E \otimes_\pi F, G)$ und ist $\tilde{\mathfrak{A}}$ Vereinigung einer Folge von gleichstetigen Mengen in $L(E \otimes_\pi F, G)$, so ist $\tilde{\mathfrak{A}}$ gleichstetig.

Ist G metrisierbarer Vektorraum, so ist $B_\beta(E \times F, G)$ metrisierbar. Nach Satz 3 ist dann auch $L_b(E \otimes_\pi F, G)$ metrisierbar. Bedingung (ii) ist nach Satz 4 ebenfalls erfüllt.

Für die von W. ROBERTSON [7] und S. O. IYAHEN [5], [6] eingeführten Klassen der ultratonnelierten, abzählbar ultratonnelierten, ultrabornologischen, quasiultratonnelierten und abzählbar quasiultratonnelierten Räume werden nun Permanenzeigenschaften in bezug auf das lineare projektive Tensorprodukt nachgewiesen. Zuvor noch das

LEMMA: *Seien E und F ultratonnelierte Räume. Dann ist jede getrennt gleichstetige Menge von stetigen bilinearen Abbildungen von $E \times F$ in einen topologischen Vektorraum G gleichgradig hypostetig.*

BEWEIS: Ist $\mathfrak{A} \subset B(E \times F, G)$ getrennt gleichstetig, so sind für jede beschränkte Menge $C_1 \subset E$ und $C_2 \subset F$ die Mengen $\mathfrak{A}_{C_1} \subset L(F, G)$ und $\mathfrak{A}_{C_2} \subset L(E, G)$ punktweise beschränkt. Denn für eine Nullumgebung $W \in \mathfrak{W}(G)$ und für jedes $x \in E$ und jedes $y \in F$ existieren ein $U \in \mathfrak{U}(E)$ und ein $V \in \mathfrak{V}(F)$ mit $\mathfrak{A}_x(V) \subset W$ und $\mathfrak{A}_y(U) \subset W$. Für $\alpha_1 U \supset C_1$ und $\alpha_2 V \supset C_2$, α_1 *u.* $\alpha_2 > 0$ gilt dann

$$\mathfrak{A}_{C_2}(x) = \mathfrak{A}_x(C_2) \subset \alpha_2 W \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_{C_1}(y) = \mathfrak{A}_y(C_1) \subset \alpha_1 W.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (vgl. W. ROBERTSON [7]) sind dann die punktweise beschränkten Mengen $\mathfrak{A}_{C_1}$ und $\mathfrak{A}_{C_2}$ gleichstetig, womit die gleichgradige Hypostetigkeit von A gezeigt ist.

SATZ 6: *Seien E und F separierte Ultra-(DF)-Räume. Dann gilt:*

(1) E u. F *ultrabornologisch* $\Rightarrow$ $E \otimes_\pi F$ *ultrabornologisch*
(2) E u. F *ultratonneliert* $\Rightarrow$ $E \otimes_\pi F$ *ultratonneliert*
(3) E u. F *abzählbar ultrat.* $\Rightarrow$ $E \otimes_\pi F$ *abzählbar ultrat.*
(4) E u. F *quasiultratonneliert* $\Rightarrow$ $E \otimes_\pi F$ *quasiultratonneliert*
(5) $E \otimes_\pi F$ *ist abzählbar quasiultratonneliert.*

BEWEIS: (1) Seien E und F separierte ultrabornologische Ultra-(DF)-Räume. $E \otimes_\pi F$ ist ultrabornologisch, wenn jede beschränkte lineare Abbildung von $E \otimes_\pi F$ in einen metrisierbaren Vektorraum G stetig ist (vgl. IYAHEN [5]). Sei also $\widetilde{A} \in \mathfrak{L}(E \otimes_\pi F, G)$ eine beschränkte lineare Abbildung. Dann ist die zu $\widetilde{A}$ assoziierte bilineare Abbildung $A \in \mathfrak{B}(E \times F, G)$ ebenfalls beschränkt, insbesondere auch die partiellen Abbildungen $A_x \in \mathfrak{L}(F, G)$ und $A_y \in \mathfrak{L}(E, G)$. Da E und F ultrabornologisch sind, so ist jede lineare Abbildung A_x, $x \in E$, und A_y, $y \in F$ stetig. Für jede beschränkte Menge C_1 aus E und C_2 aus F ist A_{C_1} und A_{C_2} beschränkt in $L_b(F, G)$ bzw. $L_b(E, G)$ und damit gleichstetig, da E und F als ultrabornologische Räume quasiultratonneliert sind. Also ist A hypostetig und nach Satz 1 stetig. Damit ist auch die Stetigkeit von $\widetilde{A}$ gezeigt.

(2) Nach WAELBROEK [9] können die ultratonnelierten Räume wie folgt charakterisiert werden: Ein topologischer Vektorraum H ist

genau dann ultratonneliert, wenn jede punktweise beschränkte Menge von stetigen linearen Abbildungen von H in einen metrisierbaren Vektorraum gleichstetig ist.

Seien nun E und F separierte ultratonnelierte Ultra-(DF)-Räume und sei $\tilde{\mathfrak{A}}$ punktweise beschränkte Menge von stetigen linearen Abbildungen von $E \otimes_\pi F$ in einen metrisierbaren Vektorraum G. $\tilde{\mathfrak{A}}$ kann dann als Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $B(E \times F, G)$ aufgefaßt werden, die beschränkt ist auf den endlichen Teilmengen von $E \times F$. Für jedes $x \in E$ und $y \in F$ sind demnach $\mathfrak{A}_x$ und $\mathfrak{A}_y$ beschränkt in $L_s(F, G)$ bzw. $L_s(E, G)$ und damit gleichstetig, da E und F ultratonnelierte Räume sind. $\mathfrak{A}$ ist somit getrennt gleichstetig und nach dem Lemma gleichgradig hypostetig. Nach Anwendung des Satzes 1 ist $\mathfrak{A}$ und damit $\tilde{\mathfrak{A}}$ gleichstetig.

(3) Ein topologischer Vektorraum H ist genau dann abzählbar ultratonneliert, wenn für jeden metrisierbaren Vektorraum G gilt: Ist $\mathfrak{C}$ beschränkt in $L_s(H, G)$ und ist $\mathfrak{C}$ Vereinigung von abzählbar vielen gleichstetigen Mengen $\mathfrak{C}_i$ aus $L(H, G)$, so ist $\mathfrak{C}$ gleichstetig.

Seien also E und F separierte abzählbar ultratonnelierte Ultra-(DF)-Räume, G metrisierbarer Vektorraum und sei $\tilde{\mathfrak{A}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{\mathfrak{A}}_i$ beschränkt in $L_s(E \otimes_\pi F, G)$, wobei jedes $\tilde{\mathfrak{A}}_i$ gleichstetig in $L(E \otimes_\pi F, G)$ ist. Dann ist $\mathfrak{A} \subset B(E \times F, G)$ punktweise beschränkt und ist die Vereinigung der gleichstetigen Mengen $\mathfrak{A}_i$. Damit sind die Mengen $\mathfrak{A}_x$ und $\mathfrak{A}_y$ für jedes $x \in E$ und $y \in F$ beschränkt in $L_s(F, G)$ bzw. $L_s(E, G)$ und sind als Vereinigung der gleichstetigen Mengen $(\mathfrak{A}_i)_x = \{A_x \in L(F, G) : A \in \mathfrak{A}_i\}$ bzw. $(\mathfrak{A}_i)_y = \{A_y \in L(E, G) : A \in \mathfrak{A}_i\}$ darstellbar. Da E und F abzählbar ultratonneliert sind, sind die Mengen $\mathfrak{A}_x$, $x \in E$, und $\mathfrak{A}_y$, $y \in F$, gleichstetig. Daraus folgt, daß für jede beschränkte Menge $C_1 \subset E$ und $C_2 \subset F$ die Mengen $\mathfrak{A}_{C_1}$ und $\mathfrak{A}_{C_2}$ beschränkt in $L_s(F, G)$ bzw. $L_s(E, G)$ sind. Weiterhin sind die Mengen $(\mathfrak{A}_i)_{C_1}$ und $(\mathfrak{A}_i)_{C_2}$ gleichstetig, woraus die Gleichstetigkeit von $\mathfrak{A}_{C_1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{A}_i)_{C_1}$ und $\mathfrak{A}_{C_2} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{A}_i)_{C_2}$ und damit die gleichgradige Hypostetigkeit von $\mathfrak{A}$ folgt. Also ist $\mathfrak{A}$ gleichstetig.

(4) Nach Iyahen [5] ist ein topologischer Vektorraum H genau dann quasiultratonneliert, wenn jede abgeschlossene beschränkte lineare Abbildung von H in einen metrisierbaren Vektorraum G stetig ist. Ist $\tilde{A} \in \mathfrak{L}(E \otimes_\pi F, G)$ abgeschlossen und beschränkt, so ist $A \in \mathfrak{B}(E \times F, G)$ ebenfalls abgeschlossen. Denn die Abbildung

$B : E \times F \times G \to (E \otimes_\pi F) \times G$ mit $B(u, v, w) = (u \otimes v, w)$ ist stetig und der Graph von A ist gerade das Urbild des Graphen von $\tilde{A}$ bzgl. der Abbildung B. Die partiellen Abbildungen A_x, $x \in E$ und A_y, $y \in F$, sind demnach abgeschlossen und außerdem beschränkt, da $\tilde{A}$ bzw. A beschränkt ist. A ist somit getrennt stetig, weil E und F quasiultratonneliert sind. Wie im Beweis von (1) folgt dann die Stetigkeit von A und damit auch von $\tilde{A}$.

(5) Da jeder Ultra-(DF)-Raum abzählbar quasiultratonneliert ist, so ist nach Satz 5 $E \otimes_\pi F$ ebenfalls von dieser Art.

Von Satz 5 und Satz 6 gelten nun die folgenden Umkehrungen:

Satz 7: *Sind E und F separierte topologische Vektorräume, auf denen jeweils mindestens ein stetiges lineares Funktional existiert, und ist $E \otimes_\pi F$ ultrabornologisch [(abzählbar-) ultratonneliert, (abzählbar-) quasiultratonneliert, Ultra-(DF)-Raum], so ist auch E und F von der gleichen Art.*

Beweis: Da nach Voraussetzung auf F ein stetiges lineares Funktional existiert, gibt es ein $y_0 \in F$ und eine stetige Projektion P von F auf den von y_0 aufgespannten Teilraum $[y_0]$ von F. Sei I die identische Abbildung auf E. Da die Abbildungen I und P auf E bzw. F stetig sind, so ist nach S. Tomášek [8], Prop. 2, die Projektion $I \otimes P$ von $E \otimes_\pi F$ auf $E \otimes_\pi [y_0]$ mit $I \otimes P(x \otimes y) = I(x) \otimes P(y)$ für $x \in E$ und $y \in F$ ebenfalls stetig. $E \otimes [y_0]$, versehen mit der von $E \otimes_\pi F$ induzierten Topologie $\hat{\pi}$, ist isomorph $E \otimes_\pi [y_0]$. Denn einmal ist wegen der Stetigkeit der Einschränkung von $I \otimes P$ auf $E \otimes_{\hat{\pi}} [y_0]$ $\hat{\pi}$ feiner als π. Andrerseits ist $\hat{\pi}$ gröber als π, da für die kanonischen Einbettungen $I : E \to E$ und $J : [y_0] \to F$ die Einbettung $I \otimes J : E \otimes_\pi [y_0] \to E \otimes_\pi F$ stetig ist. Als stetig projezierbarer Teilraum ist $E \otimes_\pi [y_0]$ isomorph einem Quotientenraum von $E \otimes_\pi F$ nach einem Teilraum. Damit ist aufgrund der von S. O. Iyahen [5] u. [6] und B. Ernst [1] nachgewiesenen Permanenzeigenschaften $E \otimes_\pi [y_0]$ ultrabornologisch [(abzählbar-) ultratonneliert, (abzählbar-) quasiultratonneliert, Ultra-(DF)-Raum], sofern $E \otimes_\pi F$ von dieser Art ist. Dies gilt dann auch für den zu $E \otimes_\pi [y_0]$ isomorphen topologischen Vektorraum E. Analog beweist man die Behauptung für F.

LITERATUR

[1] B. ERNST, *Ultra-(DF)-Räume*, J. reine u. angew. Math. *258*, 87-102 (1973)

[2] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces (F) et (DF)*, Summa Brasil. Math. 3 (1954), 57-123

[3] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955)

[4] R. HOLLSTEIN, *Über die Metrisierbarkeit von projektiven Tensorprodukten*, manuscripta math. 9, 201-209 (1973)

[5] S. O. IYAHEN, *On certain classes of linear topological spaces I*, Proc. London Math. Soc. (3) 18, 285-307 (1968)

[6] S. O. IYAHEN, *On certain classes of linear topological spaces II*, Journal London Math. Soc. (2) 3 (1971), 609-617

[7] W. ROBERTSON, *Completions of topological vector spaces*, Proc. London Math. Soc. 8 (1958) 242-257

[8] S. TOMÁSEK, *Some remarks on tensor products*, Comm. Math. Carolinae 6 (1965), 73-83

[9] L. WAELBROEK, *Topological vector spaces and algebras*, Lecture Notes - Springer 230 (1971)

Ralf Hollstein
Math. Seminar der
J. W. Goethe - Universität
6 Frankfurt a. M. 1