# ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS ULTRABORNOLOGICOS

por

MANUEL LÓPEZ PELLICER *

SUMMARY

Here we give some characterizations over ultrabornological $C(X)$ spaces in terms of sequentially continuous mappings, which are not valid for general ultrabornological spaces.

---

Todos los espacios topológicos que usaremos en este trabajo serán reales localmente convexos y de Hausdorff. Por una sola letra se designará al espacio localmente convexo con su topología inicial; cualquier otra topología se indicará explícitamente. Cuando sea necesario supondremos que el cuerpo real, $R$, está provisto de la métrica ordinaria.

Si $X$ es un espacio topológico de Hausdorff completamente regular, entonces el conjunto de funciones continuas definidas en $X$ y con valores reales es un espacio vectorial, que se designa por $\mathscr{C}(X)$. La topología compacta-abierta dota a $\mathscr{C}(X)$ de una estructura de espacio vectorial topológico real, de Hausdorff y localmente convexo. El espacio localmente convexo resultante le llamaremos también $\mathscr{C}(X)$.

Designaremos por $\mathcal{U}$ a la mínima uniformidad en $X$ para la que todas las funciones de $\mathscr{C}(X)$ son uniformente continuas. Se dice que $X$ es un $Q$-espacio si el espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es completo ([4] — pag. 474 — Nota 7).

---

(*) Este trabajo ha sido hecho en el Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valencia bajo la dirección del profesor Dr. Manuel Valdivia.

Las siguientes propiedades son equivalentes:

*A)* *X es un Q-espacio*

*B)* *$\mathscr{C}(X)$ es ultrabornológico*

*C)* *$\mathscr{C}(X)$ es bornológico*

*D)* *Las aplicaciones lineales definidas en $\mathscr{C}(X)$, con valores reales y sucesionalmente continuas son continuas.*

La equivalencia de las proposiciones $A$ y $B$ es el teorema de M. DE WILDE y J. SCHMETS ([7] — pag. 120); la equivalencia de las propiedades $A$ y $C$ es el teorema de L. NACHBIN y T. SHIROTA ([4] — pag. 472 y [5] — Pag. 296); la equivalencia de $D$ con $A$ se estableció en ([3]).

Si designamos por $\mathscr{C}(X)'$ al dual topológico de $\mathscr{C}(X)$ y por $\mathscr{C}(X)_\sigma$ al espacio vectorial $\mathscr{C}(X)$ provisto de la topología débil $\sigma(\mathscr{C}(X), \mathscr{C}(X)')$ entonces podemos formular el siguiente teorema:

TEOREMA 1. — *Dado un espacio topológico de Hausdorff completamente regular, las propiedades A, B, C y D son equivalentes a la siguiente propiedad:*

*E)* *Las aplicaciones lineales de $\mathscr{C}(X)_\sigma$ en el espacio métrico real sucesionalmente continuas son continuas.*

*Demostración:*

Las observaciones previas al teorema prueban que $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$.

Toda forma lineal de $\mathscr{C}(X)_\sigma$ en $R$ sucesionalmente continua es una aplicación de $\mathscr{C}(X)$ (con su topología inicial) en $R$ también sucesionalmente continua, por lo que si se cumple la propiedad $D$ resultará que las aplicaciones lineales de $\mathscr{C}(X)_\sigma$ en $R$ sucesionalmente continuas serán aplicaciones lineales continuas de $\mathscr{C}(X)$ en $R$ y, a fortiori, por la definición de topología débil, aplicaciones lineales continuas de $\mathscr{C}(X)_\sigma$ en $R$. Queda probado que $D$ implica $E$.

Finalmente veamos que si $X$ no es un $Q$-espacio entonces existe una aplicación lineal de $\mathscr{C}(X)_\sigma$ en $R$ no continua y sucesionalmente continua:

Si identificamos el espacio topológico $X$ con un subespacio de su completación $\hat{X}$, respecto a la uniformidad $\mathcal{U}$ (= mínima uniformidad para la que todas las funciones de $\mathscr{C}(X)$ son uniformemente continuas) entonces $X \neq \hat{X}$, por no ser $X$ un $Q$-espacio. Sea $t \in \hat{X} \sim X$ y $\{x_n\, n \in D\}$ una real de Cauchy en $(X, \mathcal{U})$, que en $\hat{X}$ converge a $t$.

Cada $f \in \mathscr{C}(X)$, por ser una aplicación del espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ en $R$, puede prolongarse a una aplicación $\hat{f}$ de $\hat{X}$ en $R$, también uniformemente continua respecto a la uniformidad de la completación ([1] — § 3 — 6 Teor. 2).

La aplicación lineal $\varphi$ de $\mathscr{C}(X)$ en $R$ definida por:

$$\varphi(f) = \hat{f}(t) = \lim_{n \in D} f(x_n) \qquad \forall f \in \mathscr{C}(X) \tag{1}$$

no es continua (véase en [4] — pag. 474 y en [3]), por lo que la aplicación $\varphi$ no es continua como aplicación de $\mathscr{C}(X)_\sigma$ en $R$. No obstante, si $\{f_m\, m \in N\}$ es una sucesión convergente a cero en $\mathscr{C}(X)_\sigma$ entonces la sucesión $\{\varphi(f_m)\, m \in N\}$ converge a cero en $R$, puesto que en caso contrario se podría encontrar un número positivo $\varepsilon$ y una subsucesión $\{f_{m_n}\, n \in N\{$ tal que

$$|\varphi(f_{m_n})| = |\hat{f}_{m_n}(t)| > \varepsilon \qquad \forall n \in N \tag{2}$$

y vamos a probar que infinitas de las desigualdades dadas en (2) son contradictorias.

La sucesión

$$\left\{W_n = \left[x \in \hat{X} \quad : \quad |\hat{f}_{m_n}(x) - f_{m_n}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\right],\ n \in N\right\}$$

de entornos cerrados en $\hat{X}$ del punto $t$, tiene una intersección que contiene algún punto de $X$, ([3]). Supongamos que

$$x_0 \in [\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n] \cap X$$

Entonces para todo natural $n$ se cumple que

$$|\hat{f}_{m_n}(x_0) - \hat{f}_{m_n}(t)| = |f_{m_n}(x_0) - \hat{f}_{m_n}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

La forma lineal $x_0^*$ definida por

$$\langle x_0^*, f\rangle = f(x_0) \qquad \forall f \in \mathscr{C}(X)$$

pertenece al dual topológico de $\mathscr{C}(X)$ ([6] — pag. 266), por lo que recordando que la sucesión $\{f_{m_n} n \in N\}$ converge a cero en $\mathscr{C}(X)_\sigma$ resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_0^*, f_{m_n} \rangle = 0 \tag{4}$$

De (4) deducimos que es posible encontrar un $n_0 \in N$ tal que si $n > n_0$ entonces

$$|\langle x_0^*, f_{m_n} \rangle| = |f_{m_n}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

Para todo número natural $n$ posterior a $n_0$ se deduce de (2), (3) y (5) que

$$|\hat{f}_{m_n}(t)| > \varepsilon, \quad |f_{m_n}(x_0) - \hat{f}_{m_n}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |f_{m_n}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

lo cual es contradictorio. Queda pues probado que $E \Rightarrow A$.

*Contraejemplo.*

En general la propiedad $E$ no caracteriza ni a los espacios bornológicos ni a los espacios ultrabornológicos. Para probarlo vamos a dar un ejemplo de un espacio no bornológico (y en consecuencia no ultrabornológico) tal que las formas lineales débilmente sucesional continuas son continuas.

Consideremos los siguientes espacios de BANACH: $l^\infty$ (espacio de las sucesiones acotadas con la norma supremo), $c_0$ (subespacio de $l^\infty$ formado por las sucesiones convergentes a cero) y $l^1$ (espacio de todas las sucesiones cuya serie asociada es absolutamente convergente, tomando como norma de cada sucesión la suma de la serie asociada a la correspondiente sucesión de módulos).

El dual de $c_0$ es $l^1$ y el dual de $l^1$ es $l^\infty$ ([2] — § 14-7), por lo que el espacio de BANACH separable $c_0$ no es reflexivo.

El espacio $l^1$ con la topología de MACKEY $\tau(l^1, c_0)$, correspondiente al par dual $\langle c^0, l^1 \rangle$, es completo, por ser dual de un BANACH.

El espacio localmente convexo $(l^1, \tau(l^1, c_0))$ no es tonelado puesto que $c_0$ no es reflexivo, de lo que se deduce que $(l^1, \tau(l^1, c_0))$ no es bornológico (si fuese bornológico como es completo sería ultrabornológico).

Al ser $c_0$ separable y completo resulta entonces que las formas lineales definidas en $l^1$ y sucesionalmente continuas para la topología débil $\sigma(l^1, c_0)$ son continuas ([2] § 21-9- (5)).

TEOREMA 2. — *Un espacio $\mathscr{C}(X)$ es ultrabornológico si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones:*

*F) Para todo espacio localmente convexo F se puede hallar un par de topologías localmente convexas $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$, siendo $\mathscr{E}_1$ una topología definida en $\mathscr{C}(X)$ y compatible con el par dual $\langle \mathscr{C}(X), \mathscr{C}(X)' \rangle$ y $\mathscr{E}_2$ una topología en F compatible con el par $\langle F, F' \rangle$, tales que las aplicaciones lineales sucesionalmente continuas de $(\mathscr{C}(X), \mathscr{E}_1)$ en $(F, \mathscr{E}_2)$ sean aplicaciones continuas de $\mathscr{C}(X)$ en F.*

*G) Para todo Q-espacio Y se pueden hallar un par de topologías localmente convexas $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$, siendo $\mathscr{E}_1$ una topología definida en $\mathscr{C}(X)$ y compatible con el par dual $\langle \mathscr{C}(X), \mathscr{C}(X)' \rangle$ y $\mathscr{E}_2$ una topología en $\mathscr{C}(Y)$ compatible con el par dual $\langle \mathscr{C}(Y), \mathscr{C}(Y)' \rangle$, tales que las aplicaciones lineales sucesionalmente continuas de $(\mathscr{C}(X), \mathscr{E}_1)$ en $(\mathscr{C}(Y), \mathscr{E}_2)$ sean aplicaciones continuas de $\mathscr{C}(X)$ en $\mathscr{C}(Y)$.*

*Demostración:* Para cualquier par de topologías $\mathscr{E}_1$ en $\mathscr{C}(X)$ y $\mathscr{E}_2$ en un espacio localmente convexo $F$, tales que $\mathscr{E}_1$ sea compatible se cumple que si $\mathscr{C}(X)$ es un espacio ultrabornológico entonces con el par dual $\langle \mathscr{C}(X), \mathscr{C}(X)' \rangle$ y $\mathscr{E}_2$ sea compatible con $\langle F, F' \rangle$ cualquier aplicación lineal $f$ de $(\mathscr{C}(X), \mathscr{E}_1)$ en $(F, \mathscr{E}_2)$ sucesionalmente continua transforma los conjuntos acotados de $(\mathscr{C}(X), \mathscr{E}_1)$, en conjuntos acotados de $(F, \mathscr{E}_2)$, puesto que si $A$ es un conjunto acotado en $(\mathscr{C}(X), \mathscr{E}_1)$ entonces para cualquier sucesión $\{f(a_n)\ n \in N\}$, contenida en $f(A)$ y para cualquier sucesión real $\{\alpha_n\ n \in N\}$ convergente a cero se cumple que

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n f(a_n) = f\ \ (\lim_{n \to \infty} \alpha_n a_n) = 0$$

por lo que $f(A)$ es un conjunto acotado en $(F, \mathscr{E}_2)$ ([2] § 15-6-(3)).

Teniendo en cuenta la invariacia de los conjuntos acotados en las topologías compatibles con la dualidad (teorema de MACKEY [2]

§ 20-11-(7)) resulta que la aplicación $f$ transforma los conjuntos acotados del espacio ultrabornológico $\mathscr{C}(X)$ en acotados de $F$ por lo que $f$ es continua. Queda probado que $B \Rightarrow F$.

Es evidente que la propiedad $F$ implica la $G$, puesto que $\mathscr{C}(Y)$ es un espacio localmente convexo.

Veamos que $G \Rightarrow E$. Si $Y$ es un espacio topológico formado por un solo punto ($Y = \{y\}$) con la única topología que se le puede dar, entonces $Y$ es un $Q$-espacio (puesto que todo espacio topológico compacto determina su uniformidad y respecto a ella es completo). Entre $\mathscr{C}(Y)$ y $R$ puede establecerse de forma natural un isomorfismo topológico, haciendo corresponder a la función que aplica el punto $y \in Y$ en el punto $x \in R$, el punto $x$. Si se cumple la condición $G$ y teniendo en cuenta que en $R$ la única topología compatible es la inducida por la métrica ordinaria resultará que existirá una topología $\mathscr{E}_1$ en $\mathscr{C}(X)$, compatible con el par dual $\langle \mathscr{C}(X), \mathscr{C}(X)' \rangle$ y tal que las aplicaciones lineales de $(\mathscr{C}(X), \mathscr{E}_1)$ en $R$ sucesionalmente continuas son aplicaciones continuas de $\mathscr{C}(X)$ en $R$.

Al ser la topología $\mathscr{E}_1$ más fina que la débil, $\sigma(\mathscr{C}(X), \mathscr{C}(X)')$) resulta que se cumple la condición $E$, puesto que las formas lineales de $\mathscr{C}(X)_\sigma$ en $R$ sucesionalmente continuas, serán sucesionalmente continuas como aplicaciones de $(\mathscr{C}(X), \mathscr{E}_1)$ en $R$ y la condición $G$ nos asegura la continuidad de dichas aplicaciones. Puesto que el teorema 1 aseguraba que la propiedad $E$ implica a la $B$ queda probado este teorema.

Si $E$ y $F$ son dos espacios localmente convexos designaremos por $\mathfrak{L}(F, F)$ a la familia de aplicaciones lineales continuas de $E$ en $F$ y por $\mathfrak{L}^s(E, F)$ a la familia de aplicaciones lineales sucesionalmente continuas de $E$ en $F$.

COROLARIO 1-2. — *Un espacio $\mathscr{C}(X)$ es ultrabornológico si y sólo si cumple la siguiente propiedad:*

*H)* Para todo espacio localmente convexo $F$ se cumple que

$$\mathfrak{L}^s(\mathscr{C}(X)_\sigma, F\tau(F F')) \subset \mathfrak{L}(\mathscr{C}(X), F).$$

*Demostración:*

Si $\mathscr{C}(X)$ es ultrabornológico entonces toda aplicación lineal de $\mathscr{C}(X)_\sigma$ en $(F, \tau(F F'))$ sucesionalmente continua es continua al transformar los acotados de $\mathscr{C}(X)$ en acotados de $F$.

El cumplimiento de la propiedad $H$ nos asegura que se cumple la propiedad $F$, tomando $\mathscr{E}_1 = \sigma(\mathscr{C}(X)\ \mathscr{C}(X)')$ y $\mathscr{E}_2 = \tau(F, F')$, por lo que entonces $\mathscr{C}(X)$ es ultrabornológico.

COROLARIO 2-2. — *Un espacio $\mathscr{C}(X)$ es ultrabornológico si y sólo se cumple la siguiente propiedad:*

I) *Para todo Q-espacio Y se cumple que* $\mathcal{L}^s(\mathscr{C}(X)_\sigma, \mathscr{C}(Y)) \subset \subset \mathcal{L}(\mathscr{C}(X), \mathscr{C}(Y))$.

*Demostración:*

Si $\mathscr{C}(X)$ es ultrabornológico entonces si $f \in \mathcal{L}^s(\mathscr{C}(X)_\sigma, \mathscr{C}(Y))$ resulta que $f$ transforma los acotados de $\mathscr{C}(X)$ en acotados de $\mathscr{C}(Y)$, por lo que $f \in \mathcal{L}(\mathscr{C}(X), \mathscr{C}(Y))$.

El recíproco es evidente puesto que la propiedad $I$ implica la propiedad $G$.

Queda probada la equivalencia de las propiedades $A, B, C, D, E, F, G, H$ e $I$.

Universidad de Valencia
Facultad de Ciencias
9 de octubre de 1973

## BIBLIOGRAFÍA


1 N. BOURBAKI. *Elements of Mathematics.* General Topology. Addison-Wesley (1.966).

2 G. KÖETHE. *Topological Vector Spaces I.* Springer-Verlag (1.969).

3 M. LÓPEZ PELLICER. *Una caracterización sucesional de los espacios C (X) ultrabornológicos.* Rev. Acad. Ciencias de Madrid T. LXVII (1973) 485-503

4 L. NACHBIN. *Topological vector spaces of continuous functions.* Proc. Nat. Acd. of Sc. *40* (1.954) 471-474.

5 T. SHIROTA. *On locally convex vector spaces of continuous functions.* Proc. Japan Acd. *30* (1.954) 294-298.

6 S. WARNER. *The topology of compact convergence on continuous function spaces.* Duke Math. J. *25* (1958) 265-282.

7 M. DE WILDE ET J. SCHMETS. *Caracterisation des espaces C (X) ultrabornologiques.* Bull Soc. des Sc. de Liége *40* (1971) 119-121.