RESOLUCIÓN MEDIANTE APROXIMACIONES SUCESIVAS DE UN PROBLEMA DE CONTORNO EN UN TIPO DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE CUARTO ORDEN CON DOS PARÁMETROS INDEPENDIENTES

POR

RAFAEL AGUILÓ FUSTER

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo trata de la resolución de un problema de contorno en un tipo de ecuaciones diferenciales lineales y homogéneas de cuarto orden, con dos parámetros independientes, en el que el coeficiente de la variable función no es constante; se determinan sus curvas de valores propios (autocurvas) y sus correspondientes funciones propias (autofunciones) mediante aproximaciones sucesivas a partir del problema correspondiente con coeficientes constantes.

En el capítulo I se estudia el problema inicial, se determinan sus autocurvas y sus correspondientes autofunciones. En el capítulo II se estudia directamente el problema propuesto, se demuestra la existencia, para valores negativos de un parámetro, de infinitas autocurvas y autofunciones. En el capítulo III se hallan las soluciones mediante aproximaciones sucesivas a partir del problema inicial, aplicando la *Transformación de* LAPLACE para obtener las soluciones iteradas, y para demostrar la convergencia del método se limita por un número arbitrario el número de las autocurvas, así como los valores de la variable independiente.

Me permito aquí expresar mi agradecimiento al Profesor doctor L. COLLATZ, de la Universidad de Hamburgo, por haberme propuesto el estudio de problemas de este tipo; al Privatdozent de la misma Universidad Dr. J. SCHRÖDER por haberme hecho algunas indicaciones, y a la ALEXANDER VON HUMBOLDT-STIFTUNG por haber sido pensionado de ella en la Universidad de Hamburgo.

I

Consideremos la ecuación diferencial

$$y^{IV} = \lambda_0 y - 2\mu y'' \tag{1}$$

con las siguientes condiciones en los puntos cero y uno

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0 \tag{2}$$

vamos ahora a estudiar sus autocurvas y sus correspondientes autofunciones.

La ecuación característica es:

$$r^4 + 2\mu r^2 - \lambda_0 = 0$$

o sea

$$r^2 = -\mu \pm \sqrt{\lambda_0 + \mu^2}$$

pongamos

$$K_1^2 = \mu + \sqrt{\lambda_0 + \mu^2}$$

$$K_2^2 = -\mu + \sqrt{\lambda_0 + \mu^2}$$

(los radicales tomados positivos), la integral general de (1) (supuesto $\lambda_0 \neq 0$ y $\lambda_0 + \mu^2 \neq 0$) es:

$$y = C_1 \cos K_1 t + C_2 \operatorname{sen} K_1 t + C_3 \operatorname{ch} K_2 t + C_4 \operatorname{sh} K_2 t$$

y por las condiciones (2)

$$\begin{aligned}
&C_1 + C_3 = 0 \\
&-K_1^2 C_1 + K_2^2 C_3 = 0 \\
&C_1 \cos K_1 + C_2 \operatorname{sen} K_1 + C_3 \operatorname{ch} K_2 + C_4 \operatorname{sh} K_2 = 0 \\
&-K_1^2 C_1 \cos K_1 - K_1^2 C_2 \operatorname{sen} K_1 + K_2^2 C_3 \operatorname{ch} K_2 + K_2^2 C_4 \operatorname{sh} K_2 = 0
\end{aligned}$$

y por tanto debe verificarse:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 \\
-K_1^2 & 0 & K_2^2 & 0 \\
\cos K_1 & \operatorname{sen} K_1 & \operatorname{ch} K_2 & \operatorname{sh} K_2 \\
-K_1^2 \cos K_1 & -K_1^2 \operatorname{sen} K_1 & K_2^2 \operatorname{ch} K_2 & K_2^2 \operatorname{sh} K_2
\end{vmatrix} = 0$$

o sea

$$(K_1^2 + K_2^2)^2 \operatorname{sen} K_1 \operatorname{sh} K_2 = 0$$

y puesto que

$$K_1^2 + K_2^2 = \lambda_0 + \mu^2 \neq 0$$

debe verificarse una de las siguientes igualdades:

$$\operatorname{sen} K_1 = 0 \qquad \text{ó} \qquad \operatorname{sh} K_2 = 0$$

a) Caso:

$$\operatorname{sen} K_1 = 0$$

o sea,

$$K_1 = n\pi$$

(n número entero distinto de cero ya que debe ser $\lambda_0 \neq 0$). Es decir:

$$\mu + \sqrt{\lambda_0 + \mu^2} = n^2\pi^2$$

o sea,

$$\sqrt{\lambda_0 + \mu^2} = n^2\pi^2 - \mu$$

y puesto que el primer miembro es positivo, debe serlo también el segundo, es decir:

(3) $$\lambda_0 + 2n^2\pi^2\mu - n^4\pi^4 = 0 \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

con

$$\mu < n^2\pi^2$$

b) Caso:

$$\operatorname{sh} K_2 = 0$$

$$\left(\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = i\,\frac{e^{-i\alpha i} - e^{i\alpha i}}{2i} = -\,i \operatorname{sen} i\alpha\right)$$

Por tanto, debe ser

$$K_2 i = n\pi$$

$$-\,K_2^2 = n^2\pi^2$$

(n número entero distinto de cero como antes), o sea:

$$\mu - \sqrt{\lambda_0 + \mu^2} = n^2\pi^2$$

$$-\sqrt{\lambda_0 + \mu^2} = n^2\pi^2 - \mu$$

y como en *a)* se llega a la misma (3) con

$$\mu > n^2\pi^2$$

Estudiemos ahora las rectas (3) ; es fácil comprobar que son tangentes a la parábola (ejes cartesianos rectangulares λ_0, μ)

$$\lambda_0 + \mu^2 = 0$$

el punto de contacto es :

$$\lambda_0 = - n^4 \pi^4$$

$$\mu = n^2 \pi^2$$

y corta el eje λ_0 en

$$\lambda_0 = n^4 \pi^4$$

y al eje μ en

$$\mu = \frac{n^2 \pi^2}{2}$$

por tanto en (3) no es nunca

$$\lambda_0 + \mu^2 < 0$$

(la raíz siempre es real).

Consideremos ahora los casos que hemos excluído, es decir :

$$\lambda_0 + \mu^2 = 0, \qquad \lambda_0 = 0$$

1) $\lambda_0 + \mu^2 = 0, \quad \lambda_0 \neq 0$

La integral general de (1) es :

$$y = (C_1 + C_2 t) \cos \sqrt{\mu}\, t + (C_3 + C_4 t) \operatorname{sen} \sqrt{\mu}\, t$$

y por las condiciones iniciales

$$\begin{gathered} C_1 = 0 \\ - \mu C_1 + 2 \mu C_4 = 0 \\ (C_1 + C_2) \cos \sqrt{\mu} + (C_3 + C_4) \operatorname{sen} \sqrt{\mu} = 0 \\ - \mu C_1 \cos \sqrt{\mu} - \sqrt{\mu}\, (\sqrt{\mu} \cos \sqrt{\mu} - 2 \operatorname{sen} \sqrt{\mu})\, C_2 - \\ - \mu C_3 \operatorname{sen} \sqrt{\mu} - \sqrt{\mu}\, (\sqrt{\mu} \operatorname{sen} \sqrt{\mu} - 2 \cos \sqrt{\mu})\, C_4 = 0 \end{gathered}$$

o sea

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 2\sqrt{\mu} \\ \cos\sqrt{\mu} & \cos\sqrt{\mu} & \operatorname{sen}\sqrt{\mu} & \operatorname{sen}\sqrt{\mu} \\ -\mu\cos\sqrt{\mu} & \begin{matrix} -\sqrt{\mu}\,(\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu} + \\ + 2\operatorname{sen}\sqrt{\mu}) \end{matrix} & -\mu\operatorname{sen}\sqrt{\mu} & \begin{matrix} -\sqrt{\mu}\,(\sqrt{\mu}\operatorname{sen}\sqrt{\mu} - \\ - 2\cos\sqrt{\mu}) \end{matrix} \end{vmatrix} = 0$$

o sea,

$$2\sqrt{\mu}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\mu}\begin{vmatrix}\cos\sqrt{\mu} & 1\\ \sqrt{\mu}\,(\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}+2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\mu}) & \mu\end{vmatrix}=0$$

$$\sqrt{\mu}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\mu}\,(\mu\cos\sqrt{\mu}-\mu\cos\sqrt{\mu}-2\sqrt{\mu}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\mu})=0$$

y puesto que

$$\mu\neq 0$$
$$\mathrm{sen}\,\sqrt{\mu}=0$$
$$\mu=n^2\pi^2$$

o sea son los puntos de contacto de (3) con la parábola $\lambda_0+\mu^2=0$.

2) $\lambda_0=0$ $(\mu\neq 0)$

La integral general de (1) es:

$$y=C_1\cos\sqrt{2\mu}\,t+C_2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2\mu}\,t+C_3t+C_4$$

y a causa de (2)

$$C_1+C_4=0$$
$$-2\mu C_1=0$$
$$C_1\cos\sqrt{2\mu}+C_2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2\mu}+C_3+C_4=0$$
$$-2\mu C_1\cos\sqrt{2\mu}-2\mu C_2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2\mu}=0$$

o sea

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ -2\mu & 0 & 0 & 0\\ \cos\sqrt{2\mu} & \mathrm{sen}\,\sqrt{2\mu} & 1 & 1\\ -2\mu\cos\sqrt{2\mu} & -2\mu\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2\mu} & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

es decir:

$$\mathrm{sen}\,\sqrt{2\mu}=0 \qquad 2\mu=n^2\pi^2$$

que son los puntos de intersección de (3) con $\lambda_0=0$

3) $\lambda_0=\mu=0$

La integral general sería:

$$y = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4$$

y por (2)

$$C_4 = 0$$
$$2\,C_2 = 0$$
$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$$
$$6\,C_1 + 2\,C_2 = 0$$

que es incompatible porque el determinante de los coeficientes es distinto de cero (Unica solución $y \equiv 0$).

Todos los casos conjuntamente demuestran que (3) *son las únicas autocurvas y no hay puntos de excepción.*

Investiguemos ahora las correspondientes autofunciones.

sen $n\pi t$ es función de comparación [1], sustituyámosla en (1), tenemos:

$$(n^4 \pi^4 - 2\,n^2 \pi^2 \mu - \lambda_0) \text{ sen } n\pi t = 0$$

a causa de (3), por tanto

$$\text{sen } n\pi t$$

con las correspondientes autofunciones a (3) para el mismo valor de n.

II

Consideremos ahora el problema

$$y^{IV} = \lambda\,(1 + \varepsilon f(t))\,y - 2\,\mu\,y'' \tag{4}$$

con las condiciones (2), siendo $f(t)$ una función continua de valor absoluto menor que uno en $[0,1]$, y $|\varepsilon| < 1$.

La fórmula (4) puede ser escrita así:

$$M[y] = \lambda\,N[y]$$

donde

$$M[\varphi] = \varphi^{IV} + 2\,\mu\,\varphi''$$
$$N[\varphi] = (1 + \varepsilon f(t))\,\varphi$$

(1) Véase COLLATZ. — Eigenwertprobleme. — Chelsea Publishing Company, 1948, pág. 59 (En alemán Vergleichfunktion).

este problema es autoadjunto ([1]) y para $\mu \leq 0$ bien definido ([2]). Sean, en efecto, u, v funciones de comparación ([3]), tenemos :

$$\int_0^1 (uM[v] - vM[u])\, dt = \int_0^1 [u(v^{IV} + 2\mu v'') - v(u^{IV} + 2\mu u'')]\, dt =$$

$$= [u(v''' + 2\mu v') - v(u''' + 2\mu u')]_0^1 -$$

$$- \int_0^1 [u'(v''' + 2\mu v') - v'(u''' + 2\mu u')]\, dt =$$

$$= - [u'v'' - v'u'']_0^1 + \int_0^1 (u''v'' - v''u'')\, dt = 0$$

los términos integrados son nulos a causa de (2)

$$\int_0^1 (uN[v] - vN[u])\, dt = \int_0^1 (1 + \varepsilon f(t))(uv - vu)\, dt = 0$$

con esto queda demostrado que es autoadjunto. Demostremos ahora que es bien definido para $\mu \leq 0$. En efecto : (u función de comparación)

$$\int_0^1 uM[u]\, dt = \int_0^1 u(u^{IV} + 2\mu u'')\, dt = [u(u''' + 2\mu u')]_0^1 -$$

$$- \int_0^1 u'(u''' + 2\mu u')\, dt = - [u'u'']_0^1 + \int_0^1 (u''^2 - 2\mu u'^2)\, dt > 0 \ ([4])$$

los términos integrados son nulos a causa de (2).

$$\int_0^1 uN[u]\, dt = \int_0^1 (1 + \varepsilon f(t))\, u^2\, dt > 0$$

puesto que

$$1 + \varepsilon f(t) > 0$$

([1]) Véase Collatz. Loc. cit. pág. 59.

([2]) Idem, pág. 69 y sigs. (En alemán Volldefinit).

([3]) Idem. pág. 59.

([4]) La única función de comparación para la cual u' o u'' es idénticamente nula, es la idénticamente nula. En efecto :

$u' \equiv 0 \rightarrow u =$ constante $= 0$ a causa de (2).

$u'' \equiv 0 \rightarrow u' =$ constante $= a$, $u = at + b$ y a causa de (2) $a = b = 0$.

De ahí se deduce [1] la existencia de infinitos autovalores (para un $\mu \leq 0$ fijo), todos reales y positivos teniendo como único punto de acumulación el ∞; al variar μ serán estas λ funciones de μ que definirán las autocurvas, que más adelante conseguiremos por paso al límite. Vamos ahora a hallar unas acotaciones para dichas curvas (supuesto $\mu \leq 0$):

Sean, en efecto, M y m el máximo y el mínimo respectivamente de $f(t)$ en $[0,1]$.

Comparemos nuestro problema con los siguientes:

$$(5) \qquad \begin{aligned} y^{IV} + 2\mu y'' &= \lambda(1 + \varepsilon M)\, y \\ y^{IV} + 2\mu y'' &= \lambda(1 + \varepsilon m)\, y \end{aligned}$$

siempre con las condiciones (2). Apliquemos a (4) y (5) el teorema de comparación [2].

El máximo (mínimo) de $1 + \varepsilon f(t)$ para ε positivo (negativo) es

$$1 + \varepsilon M$$

El mínimo (máximo) de $1 + \varepsilon f(t)$ para ε positivo (negativo) es

$$1 + \varepsilon m$$

Por tanto es: (u función de comparación)

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (1 + \varepsilon M)\, u^2\, dt \gtreqless \\ \gtreqless &\int_0^1 (1 + \varepsilon f(t))\, u^2\, dt \gtreqless \int_0^1 (1 + \varepsilon m)\, u^2\, dt \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{array}{lll} > & \text{para} & \varepsilon > 0 \\ = & \text{para} & \varepsilon = 0 \\ < & \text{para} & \varepsilon < 0 \end{array} \right\}$$

las autocurvas de (5) se obtienen cambiando en (3) λ por $\lambda(1 + \varepsilon M)$, $\gamma(1 + \varepsilon m)$ respectivamente, o sea:

$$(6) \qquad \begin{aligned} (1 + \varepsilon M)\, \lambda + 2 n^2 \pi^2 \mu - n^4 \pi^4 &= 0 \\ (1 + \varepsilon m)\, \lambda + 2 n^2 \pi^2 \mu - n^4 \pi^4 &= 0 \end{aligned}$$

del mencionado teorema de comparación deducimos que las autocurvas de (4) para cada n están comprendidas entre ambas (6).

Con esto hemos hallado unas acotaciones para todas las curvas de autovalores de (4), válidas por lo menos para $\mu \leq 0$.

---

[1] Véase COLLATZ. loc. cit. pág. 69 y 126 hasta 132.

[2] Véase COLLATZ. loc. cit., pág. 134, 135.

III

Procedamos ahora a calcular las autocurvas y autofunciones mediante paso al límite.

La ecuación (4) se puede escribir en la forma

$$y^{IV} + 2\mu y'' - \lambda_0 y = [\lambda(1 + \varepsilon f(t)) - \lambda_0] y \tag{7}$$

con las condiciones (2).

Donde λ_0 es función de μ dada por (3), y λ también función de μ, de momento desconocida.

Puesto que el primer miembro de (7) es autoadjunto, debe ser el segundo miembro ortogonal en el intervalo [0,1] a $y_0 = \operatorname{sen} n\pi t$ (autofunción del problema (1) con (2)).

En efecto :

$$\int_0^1 y_0 (y^{IV} + 2\mu y'' - \lambda_0 y)\, dt = \int_0^1 y (y_0^{IV} + 2\mu y_0'' - \lambda_0 y_0)\, dt = 0$$

es decir,

$$\int_0^1 [\lambda(1 + \varepsilon f(t)) - \lambda_0] y \operatorname{sen} n\pi t\, dt = 0 \tag{8}$$

pero nosotros no conocemos la función y. Ahora bien, como para $\varepsilon = 0$ (7) se reduce a (1), la solución de (7) debe ser de la forma :

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sen} n\pi t + \varepsilon\Phi(\varepsilon, f(t)) \\ \lambda(\mu) &= \lambda_0(\mu) + \varepsilon\Psi(\varepsilon, \mu). \end{aligned} \tag{9}$$

Procederemos, mediante el método de aproximaciones sucesivas ; escribiremos :

$$y_i^{IV} + 2\mu y_i'' - \lambda_0 y_i = [\lambda_i(1 + \varepsilon f(t)) - \lambda_0] y_{i-1} \tag{10}$$

siempre verificando (2). Y el segundo miembro debe ser ortogonal a sen $n\pi t$ en [0, 1] por la misma razón que se acaba de exponer.

Empecemos, pues, con :

$$y_1^{IV} + 2\mu y_1'' - \lambda_0 y_1 = [\lambda_1(1 + \varepsilon f(t)) - \lambda_0] \operatorname{sen} n\pi t \tag{11}$$

y

$$\int_0^1 [\lambda_1 (1 + \varepsilon f(t)) - \lambda_0] \operatorname{sen}^2 n\pi t\, dt = 0 \tag{12}$$

o sea

$$\lambda_1 = \lambda_0 \frac{\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}^2 n\pi t\, dt}{\displaystyle\int_0^1 (1 + \varepsilon f(t)) \operatorname{sen}^2 n\pi t\, dt}$$

el denominador es diferente de cero, pues la función a integrar es positiva. O sea:

$$\lambda_1 = \lambda_0 \frac{1}{1 + \alpha\varepsilon} = \lambda_0 (1 - \alpha\varepsilon + (\alpha\varepsilon)^2 \ldots) \tag{13}$$

convergente si $|\alpha\varepsilon| < 1$) donde

$$\alpha = 2 \int_0^1 f(t) \operatorname{sen}^2 n\pi t\, dt \tag{14}$$

(13) determina $\lambda_1(\mu)$ que es homóloga afín ortogonal a $\lambda_0(\mu)$ respecto al eje $\lambda_0 = 0$.

De (13) resulta que $\lambda_1 - \lambda_0$ es de primer orden respecto a ε.

Una vez obtenido λ_1, procederemos a determinar y_1. Partamos de (11) que podemos escribir en la forma:

$$y_1^{IV} + 2\mu y_1'' - \lambda_0 y_1 = (\lambda_1 - \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 f(t)) \operatorname{sen} n\pi t\, dt \tag{11'}$$

donde se pone de manifiesto que se puede sacar en el segundo miembro ε factor común.

Para el cálculo de y_1 aplicaremos la transformación de LAPLACE [1], (consideremos $f(t) \equiv 0$ para $t > 1$).

La función

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 + \varepsilon f(t) & \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{para} \quad t > 1 \end{cases}$$

es una L_a-función [2], pues está acotada. Por la misma razón lo es también el segundo miembro de (11').

[1] Véase DOETSCH. — «Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation». Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften-Band XLVII. Springer-Berlin, 1937, pág. 321 y sigs.

[2] DOETSCH, loc. cit., pág. 14.

Pongamos

$$p(s) = s^4 + 2\mu s^2 - \lambda_0(\mu) \tag{15}$$

y podemos escribir (11′) en cálculo simbólico

$$p(D)\,\gamma_1 = (\lambda_1 - \lambda_0 + \varepsilon\,\lambda_1 f(t))\ \text{sen}\ n\pi t. \tag{11''}$$

Consideremos primeramente (11″) con las condiciones iniciales de Cauchy nulas en el punto $t = 0$, llamemos $\bar{\gamma}_1$ a esta solución

$$\bar{\gamma}_1^{(v)}(0) = 0 \qquad v = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \tag{16}$$

Sea $Q(t)$ la L-función correspondiente a la l-función $\dfrac{1}{p(s)}$ (15) que es [1] :

$$Q(t) = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{e^{\alpha_\nu t}}{p'(\alpha_\nu)} \qquad (\alpha_\nu \text{ las raíces de } (15)) \tag{17}$$

en el supuesto que sean distintas (véase principio del trabajo).

Considerando la ecuación

$$p(D)\,\Psi = 1 \tag{18}$$

con las condiciones iniciales para $t = 0$ nulas (16) ; se verifica en todo caso (incluso si (15) tiene raíces múltiples)

$$Q(t) = \Psi'(t). \tag{19}$$

Distinguiremos los distintos casos :

a) $\lambda_0 > 0$; $\left(\mu > \dfrac{n^2\pi^2}{2}\right)$ de (17) resulta fácilmente (teniendo en cuenta (3))

$$Q(t) = \frac{1}{2(n^2\pi^2 - \mu)}\left(\frac{\text{sh}\ \sqrt{n^2\pi^2 - 2\mu}\,t}{\sqrt{n^2\pi^2 - 2\mu}} - \frac{\text{sen}\ n\pi t}{n\pi}\right) \tag{20a}$$

b) $\lambda_0 = 0$; $\left(\mu = \dfrac{n^2\pi^2}{2}\right)$ la solución de (18) en este caso es :

$$\Psi(t) = \frac{1}{n^4\pi^4}(\cos n\pi t - 1) + \frac{1}{2\,n^2\pi^2}\,t^2 \tag{21}$$

---

(1) Doetsch., loc. cit., pág. 324.

En efecto : la integral general de (18) en el caso *b)* es :

$$C_1 \cos n\pi t + C_2 \operatorname{sen} n\pi t + C_3 t + C_4 + \frac{t^2}{2\, n^2 \pi^2}$$

e imponiendo que sean nulas las condiciones iniciales, resulta (21) ; y aplicando (19) tenemos :

$$Q(t) = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(t - \frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n\pi}\right) \tag{20^b}$$

c) $-n^4\pi^4 < \lambda_0 < 0$ $\left(\frac{n^2\pi^2}{2} < \mu < n^2\pi^2\right)$ de (17) resulta :

$$Q(t) = \frac{1}{2(n^2\pi^2 - \mu)}\left(\frac{\operatorname{sen} \sqrt{2\mu - n^2\pi^2}\, t}{\sqrt{2\mu - n^2\pi^2}} - \frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n\pi}\right) \tag{20^c}$$

d) $\lambda_0 = -n^4\pi^4$ $(\mu = n^2\pi^2)$ La solución de (18) con las condiciones iniciales nulas es :

$$\Psi(t) = \frac{1}{n^4\pi^4}(1 - \cos n\pi t) - \frac{1}{n^3\pi^3} t \operatorname{sen} n\pi_3$$

y por tanto :

$$Q(t) = \frac{1}{2\, n^2\pi^2}\left(\frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n\pi} - t \cos n\pi t\right) \tag{20^d}$$

e) $\lambda_0 < -n^4\pi^4$ $(\mu > n^2\pi^2)$ de (17)

$$Q(t) = \frac{1}{2(\mu - n^2\pi^2)}\left(\frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n\pi} - \frac{\operatorname{sen} \sqrt{2\mu - n^2\pi^2}\, t}{\sqrt{2\mu - n^2\pi^2}}\right) \tag{20^e}$$

En todos los casos se puede comprobar que $Q(t)$ es una función regular de μ, lo que, por otra parte, se deduce de (18) y (19) (Teorema de dependencia respecto a un parámetro).

Consideremos el producto de convolución [1]

$$\bar{\gamma}_1(t) = Q(t) \ast F(t) \tag{22}$$

que es : $$F_1(t) \ast F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau)\, F_2(t - \tau)\, d\tau$$

donde $F(t)$ es el segundo miembro de (11'').

---

(1) Véase DOETSCH., loc. cit., pág. 155 y sigs. (en alemán Faltung).

(22) es la solución de (11″) con las condiciones (16). $\bar{\gamma}_1(t)$ depende de μ y de ε y es de primer orden respecto a este último.

Consideremos [1]

$$U_1(t) = Q''(t) + 2\mu Q(t)$$
$$U_3(t) = Q(t) \tag{23}$$

las U_i son las soluciones de la ecuación homogénea

$$P(D)\,U = 0$$

con las condiciones iniciales

$$U_i^{(i)}(0) = 1\,; \qquad U_i^{(j)}(0) = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j \tag{24}$$

La solución de (11) con las condiciones (2) será de la forma

$$\gamma_1(t) = \bar{\gamma}_1(t) + \alpha\, U_1(t) + \beta\, U_3(t) \tag{25}$$

debiendo verificarse

$$\gamma_1(1) = \bar{\gamma}_1(1) + \alpha\, U_1(1) + \beta\, U_3(1)$$
$$\gamma_1''(1) = \bar{\gamma}_1''(1) + \alpha\, U_1''(1) + \beta\, U_3''(1) \tag{26}$$

TEOREMA. *La segunda relación* (26) *es consecuencia de la primera.*

DEMOSTRACIÓN. Como $Q(t)$ es función entero de t, podemos considerar su expresión dada por (20ª). Sustituyendo y aplicando la regla de derivación del producto de convolución [2].

$$\frac{U_1(1)}{U_1''(1)} = \frac{Q''(1) + 2\mu Q(1)}{Q^{IV}(1) + 2\mu Q''(1)} = \frac{1}{n^2\pi^2 - 2\mu}$$

$$\frac{U_3(1)}{U_3''(1)} = \frac{Q(1)}{Q''(1)} = \frac{1}{n^2\pi^2 - 2\mu}$$

$$\frac{\bar{\gamma}_1(1)}{\bar{\gamma}_1''(1)} = \frac{\displaystyle\int_0^1 F(\tau)\, Q(1-\tau)\, d\tau}{\displaystyle\int_0^1 F(\tau)\, Q''(1-\tau)\, d\tau} = \frac{1}{n^2\pi^2 - 2\mu}$$

(el resultado final se deduce fácilmente, teniendo en cuenta (12)).

---

[1] Véase DOETSCH, loc. cit., pág. 328.

[2] Véase DOETSCH, loc. cit., pág. 160. (Aquí es $Q(0) = Q'(0) = 0$).

Es decir:

$$\frac{U_1(1)}{U_1''(1)} = \frac{U_3(1)}{U_3''(1)} = \frac{\bar{\gamma}_1(1)}{\bar{\gamma}_1''(1)} \qquad \text{q. e. d.} \tag{27}$$

(también se puede ver directamente, porque en caso contrario, o bien tendría solución para todo λ_1, o sería incompatible; en ambos casos es absurdo).

Según este teorema, existen infinitos valores de α, β, es decir, infinitas funciones $\gamma_1(t)$, pero la diferencia entre dos de ellas debe ser solución de (1) con las condiciones (2), es decir, es de la forma K sen $n\pi t$ (K función de ε), lo cual se puede comprobar directamente de (26), dado (23) y (20ª).

Según (9) se debe verificar:

$$\gamma_1(t) = \text{sen } n\pi t + \varepsilon\gamma_1^*(t, \varepsilon) \tag{28}$$

donde $\gamma_1^*(t, \varepsilon)$ está determinado salvo una función aditiva de la forma k sen $n\pi t$ (k función de ε), pero prescindamos de esta indeterminación, que veremos afecta a la solución sólo en un factor multiplicativo, dependiente únicamente de ε, por tanto no la altera.

Prosigamos la iteración (10):

$$\gamma_2^{IV} + 2\mu\gamma_2'' - \gamma_0\gamma_2 = [\lambda_2(1 + \varepsilon f(t)) - \lambda_0]\gamma_1 \tag{29}$$

con

$$\int_0^1 [\lambda_2(1 + \varepsilon f(t)) - \lambda_0]\gamma_1 \text{ sen } n\pi t\, dt = 0 \tag{30}$$

o sea:

$$\lambda_2 = \lambda_0 \frac{\int_0^1 \gamma_1 \text{ sen } n\pi t\, dt}{\int_0^1 (1 + \varepsilon f(t))\gamma_1 \text{ sen } n\pi t\, dt}$$

sustituyendo γ_1, por (28)

$$\lambda_2 = \lambda_0 \frac{1 + 2\varepsilon\int_0^1 \gamma_1^* \text{ sen } n\pi t\, dt}{1 + \varepsilon a + 2\varepsilon\int_0^1 (1 + \varepsilon f(t))\gamma_1^* \text{ sen } n\pi t\, dt} \tag{31}$$

y (véase (13))

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_1 \frac{2\varepsilon^2 \left(\alpha \int_0^1 \gamma_1^* \operatorname{sen} n\pi t\, dt - \int_0^1 f(t)\, \gamma_1^* \operatorname{sen} n\pi t\, dt\right)}{1 + \varepsilon\alpha + 2\varepsilon \int_0^1 (1 + \varepsilon f(t))\, \gamma_1^* \operatorname{sen} n\pi t\, dt} \tag{32}$$

la fórmula (29) se puede escribir:

$$\begin{aligned} &\gamma_2^{IV} + 2\mu\gamma_2'' - \lambda_0\gamma_2 = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 f(t))\, \gamma_1(t) + (\lambda_2 - \lambda_1)(1 + \varepsilon f(t))\, \gamma_1(t) = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 f(t)) \operatorname{sen} n\pi t + \varepsilon^2 \Pi(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon f(t), \gamma_1(t)) \end{aligned} \tag{33}$$

donde el segundo miembro está acotado, tomando $n \leq N$ (arbitrario) y $\mu > -H$ ($H > 0$ arbitrario), entonces tenemos que $Q(t)$ está acotado (20[a]) y por tanto también $\gamma_1(t)$ (véase (22), (23), (25) y (26), de ahí se deduce que el segundo miembro es L_a-función y procediendo análogamente que para la determinación de γ_1, tenemos de (33)

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t) + \varepsilon^2 \gamma_2^*(t, \varepsilon) \tag{34}$$

donde a $\gamma_2(t, \varepsilon)$ se le deben hacer las mismas observaciones que a $\gamma_1(t, \varepsilon)$. Y así, paso a paso, se proseguirá la iteración.

Procedamos por inducción completa. Supongamos determinados λ_{i-1} y γ_{i-1} que cumplan

$$\begin{aligned} \lambda_{i-1} - \lambda_{i-2} &= \varepsilon^{i-1} X \\ \gamma_{i-1} &= \gamma_{i-2} + \varepsilon^{i-1} \gamma_{i-1}^*(t, \varepsilon) \end{aligned} \tag{35}$$

de (10), deducimos

$$\begin{aligned} \gamma_i^{IV} + 2\mu\gamma_i'' - \lambda_0\gamma_i &= (\lambda_{i-1} - \lambda_0 + \varepsilon\lambda_{i-1} f(t))\, \gamma_{i-1} + \\ &+ (\lambda_i - \lambda_{i-1})(1 + \varepsilon f(t))\, \gamma_{i-1} = (\lambda_{i-1} - \lambda_0 + \varepsilon\lambda_{i-1} f(t))\, \gamma_{i-2} + \\ &+ \varepsilon^i \Pi_i(\lambda_0, \lambda_{i-1}, \gamma_{i-1}, \varepsilon f(t)) \end{aligned} \tag{10'}$$

de (10), tenemos:

$$\int_0^1 [\lambda_i(1 + \varepsilon f(t)) - \lambda_0]\, \gamma_{i-1} \operatorname{sen} n\pi t\, dt = 0$$

o sea :

$$(36) \qquad \lambda_i = \lambda_0 \frac{\int_0^1 \gamma_{i-1} \operatorname{sen} n\pi t\, dt}{\int^1 (1 + \varepsilon f(t))\, \gamma_{i-1} \operatorname{sen} n\pi t\, dt} =$$

$$= \lambda_0 \frac{\int_0^1 \gamma_{i-2} \operatorname{sen} n\pi t\, dt + \varepsilon^{i-1} \int_0^1 \gamma^*_{i-1} \operatorname{sen} n\pi t\, dt}{\int_0^1 (1 + \varepsilon f(t))\, \gamma_{i-2} \operatorname{sen} n\pi t\, dt + \varepsilon^{i-1} \int_0^1 (1 + \varepsilon f(t))\, \gamma^*_{i-1} \operatorname{sen} n\pi t\, dt}$$

de ahí :

$$(37) \qquad \lambda_i - \lambda_{i-1} =$$

$$= -\frac{\lambda_0 \varepsilon^i \int_0^1 \int_0^1 f(t)\, (\gamma_{i-2}(t)\, \gamma^*_{i-1}(\tau) - \gamma^*_{i-1}(t)\, \gamma_{i-2}(\tau)) \operatorname{sen} n\pi t \operatorname{sen} n\pi\tau\, dt\, d\tau}{\int_0^1 (1 + \varepsilon f(t))\, \gamma_{i-2} \operatorname{sen} n\pi t\, dt \int_0^1 (1 + \varepsilon f(t))\, \gamma_{i-1} \operatorname{sen} n\pi t\, dt}$$

y de (10')

$$(38) \qquad \gamma_i = \gamma_{i-1} + \varepsilon^i \gamma^*_1 (t,\ \varepsilon)$$

con esto queda probado que las fórmulas (35) son generales.

Podemos escribir

$$\lambda_i = \lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) + \ldots + (\lambda_i - \lambda_{i-1})$$
$$\gamma_i = \gamma_0 + (\gamma_1 - \gamma_0) + \ldots + (\gamma_i - \gamma_{i-1})$$

y haciendo crecer i indefinidamente

$$(39) \qquad \begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) + \ldots + (\lambda_i - \lambda_{i-1}) + \ldots \\ \gamma &= \gamma_0 + (\gamma_1 - \gamma_0) + \ldots + (\gamma_i - \gamma_{i-1}) + \ldots \end{aligned}$$

supongamos que ambas series y las obtenidas de la segunda derivando respecto a t término a término, hasta el cuarto orden inclusive, sean uniformemente convergentes. Entonces pasando al límite en (10) obtendremos (7), es decir : la solución del problema.

Sólo falta, por tanto, probar la convergencia uniforme de las series (39).

De (39), aplicando al denominador el primer teorema de la media (pues $1 + \varepsilon f(t)$ es positivo), tenemos : [1]

$$\lambda_i = \frac{\lambda_0}{1 + \varepsilon f(\theta)}$$

donde $0 < \theta < 1$. Y si tomamos $|\varepsilon| \leq h < 1$, se deduce :

$$(40) \qquad |\lambda_i| \leq \frac{|\lambda_0|}{1 - hM} \qquad (M < 1)$$

por tanto

$$|\lambda_i - \lambda_{i-1}| \leq \frac{2\,|\lambda_0|}{1 - hM}$$

y para $|\varepsilon| < h$, se deduce de (37)

$$(41) \qquad |\lambda_i - \lambda_{i-1}| < \left|\frac{\varepsilon}{h}\right|^i \frac{2\,|\lambda_0|}{1 - hM}$$

y resulta que la serie de módulos de la primera (39) se puede comparar con una geométrica de razón menor que la unidad, por tanto ésta es uniformemente convergente para estos valores de ε.

En cuanto a las otras (39), por la limitación $n \leq N$, $|\mu| \leq H$ resulta que $Q, Q' \dots Q^{IV}$ están acotadas; sea $M \geq 1$ una cota superior de sus valores absolutos. Supongamos que

$$(42) \qquad |\gamma_{i-1}| < M^{i-1} K$$

de (40) y (22) (cambiando $F(t)$ por el 2.º miembro de (10) que llamaremos $F_{i-1}(t)$) resulta (tomando K suficientemente grande) que γ_1 y sus derivadas hasta el cuarto orden inclusive son en valor absoluto menores que $M^i K$, puesto que podemos considerar también

$$|F_{i-1}(t)| < M^{i-1} K$$

y de

$$\bar{\gamma}_i + F_{i-1}(t) \ast Q(t)$$

resulta

$$|\bar{\gamma}| < M^i K$$

[1] El razonamiento caería en defecto si la integral

$$\int_0^1 \gamma_{i-1} \operatorname{sen} n \pi t \, dt$$

fuese idénticamente nula, pero ésta es función regular de ε y para $\varepsilon = 0$ distinta de cero.

debiendo sumársele una expresión del tipo

$$\alpha_i U_1(t) + \beta_i U_3(t)$$

(cfr. (25)), donde las U_i están acotadas, y tomando K suficientemente grande, podremos llegar a

$$|\gamma_i| < M^i K \tag{43}$$

y por tanto

$$|\gamma_i - \gamma_{i-1}| = |\gamma_i^*| < M^{i-1}(M+1)K \tag{44}$$

de ahí resulta que siempre que

$$|M\varepsilon| < h < 1$$

la segunda serie (39) será uniformemente convergente.

Análogamente para las series de las derivadas. De la regla de derivación del producto de convolución (cfr. 2.ª nota de la página 167)

$$[F_1(t) * F_2(t)]' = F_1(t) * F_2'(t) + F_1(t) F_2(0)$$

(sabemos que $Q(0) = Q'(0) = Q''(0) = 0$, $Q'''(0) = 1$ (23)), resulta la convergencia sin más dificultad.

Así se ha probado la legitimidad del método para valores pequeños de ε, de la obtención de las N primeras autocurvas, limitadas por $|\mu| \leq H$, y de las correspondientes autofunciones válidas por lo menos, para los valores de ε que satisfagan (45), pero como éstas son funciones analíticas de ε se podrán prolongar analíticamente.

BIBLIOGRAFÍA

L. COLLATZ. — *Eigenwertprobleme.* — Chelsea Publishing Company. — New York (1948).

G. DOETSCH. — *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.* — Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. — Band XLVII. — Springer. — Berlín (1937).

G. SANSONE. — *Equazioni differenziali nel campo reale.* — Parte prima e parte seconda. — Nicola Zanichelli. — Bologna (1948, 1949).