

GENERALIZACIÓN DE LOS INVARIANTES INTEGRALES Y APLICACIÓN A LA GEOMETRÍA INTEGRAL EN LOS ESPACIOS DE KLEIN Y DE RIEMANN

POR

E. VIDAL ABASCAL

En este trabajo señalamos nuevas orientaciones a la geometría integral de la escuela del profesor BLASCHKE relacionándola con los invariantes integrales.

La noción clásica introducida por POINCARÉ [11]* y CARTAN [4] de invariante integral absoluto, respecto a un conjunto de curvas, solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, coincide para el conjunto de curvas con la noción introducida por CHERN [7] como una de las condiciones que ha de cumplir una medida de un conjunto de variedades determinada por una integral sobre un dominio de puntos ; esto es, que si estos puntos se desplazan, cada uno en la variedad a que pertenece, el valor de la integral no varía.

Con objeto de poder aplicar las propiedades de los invariantes integrales a las medidas de la geometría integral, era preciso generalizar esta noción respecto a un conjunto de variedades, ya que la noción de invariante integral clásica se refiere solo a conjuntos de curvas. Esto lo hemos hecho en un trabajo reciente [21]; ahora completamos algunos resultados, como los referentes a la expresión de un invariante integral relativo y la clasificación de los invariantes integrales absolutos, aplicando las nuevas nociones a la geometría integral en un espacio de KLEIN y a la medida de conjuntos de geodésicas en un espacio de RIEMANN.

Las nociones introducidas son : *a)* Establecer las medidas de figuras geométricas en un espacio de KLEIN como invariantes integrales absolutos generalizados, *b)* Demostrar que la densidad de

*) Los números entre corchetes corresponden a la bibliografía indicada al final.

un conjunto de figuras geométricas es la diferencial exterior de un invariante integral relativo sobre la frontera ; *c*) establecer la medida de conjuntos de dimensión menor que la máxima posible en el espacio considerado ; *d*) relacionar la geometría integral con el cálculo de variaciones, valiéndose de los invariantes integrales.

I. INVARIANTES INTEGRALES. RELACIONES INTEGRALES DE INVARIANCIA

1. DEFINICIÓN DE LOS INVARIANTES INTEGRALES.

Dado un sistema de PFAFF

$$(1, I) \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \dots, \omega_h = 0$$

en m parámetros ($h < m$) completamente integrable, consideremos el conjunto de variedades integrales V_{m-h} del sistema (1, I), de dimensión $m-h$, que llenan el espacio representativo R_m de m dimensiones.

Consideremos un dominio arbitrario $D_0^{(p)}$ de $p < h$ dimensiones y supongamos que desplazamos de cualquier manera los diferentes puntos de $D_0^{(p)}$ sobre las variedades integrales del sistema (1, I) hasta obtener otro dominio de p dimensiones $D_1^{(p)}$.

Designaremos por $T_0^{(p+1)}$ el dominio de $(p+1)$ dimensiones engendrado por los arcos de curvas integrales, cada una de estas curvas sobre la variedad correspondiente, limitado cada uno de estos arcos por los puntos de $D_0^{(p)}$ y $D_1^{(p)}$, y representemos por $N^{(p)}$ el dominio engendrado por la frontera de $D_0^{(p)}$ al desplazarse hasta $D_1^{(p)}$.

Sea Ω una forma diferencia exterior de grado (p) perteneciente en R_m a la clase $C^{(2)}$.

DEFINICIÓN. Diremos que $\int \Omega$ es un invariante integral absoluto para el sistema (1, I), si cualquiera que sea el dominio $D_0^{(p)}$ y el dominio $D_1^{(p)}$ que se deduce :

$$(2, I) \quad \int_{D_0^{(p)}} \Omega = \int_{D_1^{(p)}} \Omega$$

Si para que se verifique la relación (2, I) es necesario que $D_0^{(p)}$, y $D_1^{(p)}$ por lo tanto, sea cerrado, $\int \Omega$ se dirá invariante integral relativo.

2. DEFINICIÓN DE LAS RELACIONES INTEGRALES DE INVARIANCIA.

Sea Ω una forma diferencial exterior de grado $(p+1)$ perteneciente en R_m a la clase C^2 .

DEFINICIÓN. Diremos que Ω engendra para el sistema $(1, I)$ una relación integral de invariancia absoluta cuando, cualquiera que sea el dominio $D_0^{(p)}$ y el dominio $T^{(p+1)}$ que se deduce, se verifica

$$(3, I) \quad \int_{p+1} \Omega = 0$$

Ω engendra una relación integral de invariancia relativa si para que se verifique la relación $(3, I)$, el dominio $D_0^{(p)}$ ha de ser cerrado.

3. RELACIÓN INTEGRAL DE INVARIANCIA ABSOLUTA.

TEOREMA I. Para que Ω dé lugar a una relación integral de invariancia absoluta del sistema diferencial $(1, I)$, es necesario y suficiente que en la forma Ω sólo intervengan como diferenciales, diferenciales de integrales primeras de ese sistema.

DEMOSTRACIÓN: Sean

$$\varphi_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

h primeras integrales independientes de $(1, I)$; este sistema es equivalente a

$$(4, I). \quad d\xi_1 = 0, \quad d\xi_2 = 0, \dots, d\xi_h = 0$$

Consideremos un sistema de curvas sobre las variedades $m-h$ solución del sistema $(4, I)$. Un sistema de PFAFF completamente integrable correspondiente a un sistema $S_j (j = 1, 2, \dots, m-h)$ de curvas sobre esas variedades será de la forma (VID. CARTÁN [4], pág. 40).

$$(5, I) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{0} &= \frac{d\xi_2}{0} = \dots = \frac{d\xi_h}{0} = \\ &= \frac{dy_{h+1}}{0} = \dots = \frac{dy_s}{Y_s} = \dots = \frac{dy_m}{0}, \quad (s = h+1, \dots, m) \end{aligned}$$

Por el teorema demostrado por LICHNEROWICZ [10] un invariante absoluto respecto a este sistema contendrá solo diferenciales de inte-

grales primeras y por definir Ω una relación integral de invariancia respecto a todos estos sistemas de curvas contendrá solamente diferenciales comunes a todas las expresiones (5, I) para los distintos sistemas; es decir, será de la forma:

$$(6, I) \quad \Omega = \Sigma A_{i_1, \dots, i_{p+1}} d\xi_{i_1} \wedge d\xi_{i_2} \wedge \dots \wedge d\xi_{i_{p+1}}$$

Recíprocamente, la forma (6, I) satisface la relación

$$\int_{T^{p+1}} \Omega = 0$$

como se deduce fácilmente de una representación paramétrica $(v, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ del dominio T^{p+1} . Se supone que el dominio $D_0^{(p)}$ tiene por lo menos un punto común con cada variedad V_{m-h} perteneciente a un conjunto conveniente.

La variable v determina el punto en la curva descrita por esos puntos sobre las variedades integrales de (4, I) V_{m-h} . Si se pasa de la representación (6, I) de la forma Ω a la representación paramétrica $(v, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ a cada expresión

$$d\xi_{i_1} \wedge d\xi_{i_2} \wedge \dots \wedge d\xi_{i_{p+1}}$$

corresponde un determinante en que los elementos de la primera fila

$$\frac{d\xi_{i_1}}{dv}, \quad \frac{d\xi_{i_2}}{dv}, \quad \dots, \quad \frac{d\xi_{i_{p+1}}}{dv}$$

teniendo en cuenta (4, I) son todos nulos. Cada conjunto de valores $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ determina una variedad y v varía sobre cada variedad; los valores de ξ no dependen de v .

Si $D_0^{(p)}$ tuviese común con V_{m-h} más de un punto, un conjunto de dimensiones $r-1$, la representación paramétrica del dominio T^{p+1} sería $(v_1, \dots, v_r, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-r+1})$. Las variables $v_1, \dots, v_r$ sujetas a variar sobre las variedades integrables V_{m-h} . El razonamiento sería análogo, el determinante tendría varias filas de elementos nulos.

Respecto a los sistemas de curvas (5, I) la relación integral de invariancia relativa, entraña la absoluta (LICHNEROWICZ, [10]); estas dos nociones corresponden a que la forma diferencial Ω , se expresa por diferenciales de integrales primeras, o lo que es lo mismo, que el sistema asociado de la forma Ω se satisfaga teniendo en cuenta las ecuaciones diferenciales (1, I). Puesto que definir una relación

integral de invariancia, respecto a las variedades V_{m-h} , equivale a definir $m-h$ relaciones integrales de invariancia, respecto a $m-h$ sistemas de curvas independientes sobre las variedades V_{m-h} , y respecto a estos sistemas de curvas la relación de invariancia relativa entraña la absoluta, (*) se deduce :

TEOREMA II. *Si la forma engendra una relación integral de invariancia relativa, respecto al sistema de Pfaff (1, I), engendra por este motivo también una relación integral de invariancia absoluta.*

4. RELACIONES INTEGRALES DE INVARIANCIA E INVARIANTES INTEGRALES.

Se deducen relaciones análogas a las dadas para las curvas entre la noción de relación integral de invariancia y los invariantes integrales, las cuales se precisan en los teoremas siguientes :

TEOREMA III. *Si $d\Omega$ engendra una relación integral de invariancia, respecto al sistema (1, I), $\int \Omega$ es un invariante relativo, y si Ω y $d\Omega$ engendran sendas relaciones integrales de invariancia, $\int \Omega$ es un invariante integral absoluto.*

Para demostrar la primera parte, si suponemos $D_0^{(p)}$ y $D_1^{(p)}$ cerrados, limitando el dominio T^{p+1} , Ω se supone de grado p , por el teorema de STOKES se deduce :

$$\int_{D^{(p)}} \Omega - \int_{D_0^{(p)}} \Omega = \int_{T^{(p+1)}} d\Omega = 0$$

Si Ω y $d\Omega$ engendran sendas relaciones integrales de invariancia respecto al sistema (I, 1), el sistema característico de Ω formado por la reunión de los sistemas asociados de Ω y $d\Omega$ se satisfacen por las ecuaciones (I, 1), así $\int \Omega$ es invariante respecto a este último sistema, como queríamos demostrar. Recíprocamente si $\int \Omega$ es inva-

(*) De la definición que hemos dado de invariante integral es evidente que será un invariante integral respecto a $m-h$ sistemas de curvas independientes dados sobre las variedades. El recíproco es consecuencia de ser el sistema que hemos supuesto completamente integrable. Esta propiedad facilita los resultados que hemos obtenido.

Sería importante para los problemas del cálculo de variaciones, extender la noción de invariante integral a otros sistemas de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, a los llamados en involución.

riante absoluto generalizado, es invariante absoluto en el sentido de CARTAN respecto a cualquier sistema de curvas trazadas sobre las variedades integrales de (I, 1) V_{m-h} ; como consecuencia el sistema característico de Ω se satisface por el sistema

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \dots, \omega_h = 0$$

y las variedades V_{m-h} son variedades características de la forma Ω o forman parte de variedades características

Dado el dominio $D_0^{(p)}$ si un punto describe sobre la variedad V_{m-h} la trayectoria correspondiente C , existe un sistema de curvas sobre las variedades integrales de las que C forma parte y para las que $\int \Omega$ es invariante. Dar esta curva será dar las condiciones iniciales.

TEOREMA IV. Si Ω es invariante integral absoluto de grado h respecto a un sistema de variedades de grado $m - h$ soluciones del sistema

$$(7, I) \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \dots, \omega_h = 0$$

entonces $d\Omega = 0$.

En efecto, si $\int \Omega$ es un invariante integral respecto a las variedades V_{m-h} de dimensiones $m - h$, soluciones del (7, I), $\int \Omega$ es invariante respecto a cualquier sistema de curvas trazadas sobre esas superficies correspondientes a un sistema completamente integrable. Consideremos $m - h$ sistemas de curvas sobre las variedades V_{m-h} entre sí independientes, la variación $\delta\Omega$ es nula en esas $m - h$ direcciones, y las h direcciones correspondientes a las diferenciales que entran en la forma Ω , lo cual prueba que la variación de Ω es nula en m direcciones independientes cualesquiera. Este teorema generaliza el establecido por CARTAN [4] para los invariantes absolutos de grado $m - 1$ respecto a un sistema de curvas.

TEOREMA V. Si tenemos el sistema de PFAFF completamente integrable (I, 1), la forma diferencial de grado h

$$(8, I) \quad \Omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h$$

si cumple la condición

$$(9, I) \quad d\Omega = 0$$

es un invariante integral absoluto generalizado respecto a las variedades integrales del sistema (I, 1).

En efecto, por el teorema I, bastará probar que Ω y $d\Omega$ engendran sendas relaciones integrales de invariancia. La forma diferencial Ω engendra una relación integral de invariancia, es decir

$$\int_{N^h} \Omega = 0$$

por estar engendrada por la frontera de $D_0^{(h)}$ al desplazar hasta $D_1^{(h)}$, pero la intersección $N_h \cap V_{m-h}$ son puntos que al desplazarse lo hacen sobre las variedades y sobre estas $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_h = 0$. Por la hipótesis (9, I), también $d\Omega$ engendra una relación integral de invariancia. Obsérvese que por ser Ω de grado h y las variedades de grado $m - h$, la condición $\int d\Omega = 0$ es equivalente a (9, I), tal como hemos visto en el teorema IV.

TEOREMA VI. *Un invariante integral absoluto $\int \Omega$ respecto al sistema (1, I) se expresa solamente en función de integrales primeras y de sus diferenciales y recíprocamente*

Demostración :

Hemos visto (Teorema I) que si Ω engendra una relación integral de invariancia, o sea $\int_{T^s} \Omega = 0$, en las diferenciales sólo aparecen integrales primeras.

Pero, si $\int \Omega$ es invariante integral absoluto, también $d\Omega$ engendra una relación integral de invariancia y se ha de expresar sólo por diferenciales de integrales primeras, por lo cual

$$(10, I) \quad \Omega = \sum A_{i_1 i_2 \dots i_h} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h) d\xi_{i_1} \wedge d\xi_{i_2} \wedge \dots \wedge d\xi_{i_h}$$

pues si no fuese así y los coeficientes fuesen función además de las ξ_i , de otras variables, el hallar la diferencial aparecerían términos con diferenciales distintas a las de integrales primeras.

Hemos visto (Teorema V) que

$$\Omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h$$

es un variante integral absoluto para las variedades V_{m-h} , si cumple la condición $d\Omega = 0$. Expresado en función de integrables primeras será de acuerdo con el teorema VI.

$$(11, I) \quad \Omega = f(\xi) d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_h$$

salvo una constante.

5. LA RELACIÓN INTEGRAL DE INVARIANCIA DEFINIDA POR $d\Omega$,
EXPRESADA EN FUNCIÓN DE Ω .

De acuerdo con la notación establecida (núm. 1, Cap. I), siendo las variedades V_{m-h} solución del sistema de PFAFF (1, I), dado un dominio $D_0^{(p)}$ de p dimensiones, si se desplazan los puntos de este dominio hasta otro $D_1^{(p)}$ moviéndose sus diferentes puntos sobre las variedades integrales V_{n-h} , engendran un dominio $T^{(p+1)}$ de $(p+1)$ dimensiones; sea $F^{(p)}$ la frontera de $T^{(p+1)}$. Hemos de considerar dos casos según que $D_0^{(p)}$ sea abierto o cerrado. En el primer caso, la frontera $F^{(p)}$ de $T^{(p+1)}$ estará constituida por $D_0^{(p)} - D_1^{(p)} + N^{(p)}$ esto es

$$F^{(p)} = \partial(T^{(p+1)}) = D_0^{(p)} - D_1^{(p)} + N^{(p)}$$

Siendo $N^{(p)}$ el dominio engendrado por la frontera de $D_0^{(p)}$ al desplazarse hasta $D_1^{(p)}$. En el segundo caso $F^{(p)} = \partial T^{(p+1)} = D_0^{(p)} - D_1^{(p)}$.

La condición de engendrar $d\Omega$ una relación integral de invariancia, teniendo en cuenta el teorema de STOKES, se expresará:

$$\int_{T^{(p+1)}} d\Omega = \int_{F^{(p)}} \Omega = 0$$

Como consecuencia se deduce:

TEOREMA VII. *Para que $\int d\Omega$ engendre una relación integral de invariancia es condición necesaria y suficiente que $\int \Omega$ se anule sobre todo dominio $F^{(p)}$ frontera de un dominio $T^{(p+1)}$ engendrado por arcos sobre las variedades V_{m-h} .*

Se deduce que se podrá expresar que $\int \Omega$ es *invariante integral absoluto*, por las condiciones:

$$\int_{T^{(p)}} \Omega = 0, \quad \int_{F^{(p)}} \Omega = 0$$

La condición de ser $\int \Omega$ *invariante relativo*, se expresará:

$$\int_{F^{(p)}} \Omega = 0.$$

6. EXPRESIÓN DE UN INVARIANTE INTEGRAL RELATIVO.

Como consecuencia del teorema III, de la forma diferencial de un invariante integral relativo se obtiene por diferenciación la forma diferencial de un invariante integral absoluto. Es decir, a todo invariante integral relativo $\int \Omega$ le corresponde un invariante integral absoluto $\int d\Omega$.

Como consecuencia de lo anterior y del teorema VI se deduce que la forma diferencial de un invariante integral relativo de grado $h-1$, respecto a las variedades solución del sistema (1, I) ha de estar constituida por una parte tal que por diferenciación dé un invariante integral absoluto, más otra parte que se anule por diferenciación; es decir, se podrá escribir

$$\Omega = \Sigma (-1)^{i-1} f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h) d\xi_{i_1} \wedge d\xi_{i_2} \wedge \dots \wedge d\xi_{i_{h-1}} \wedge d\xi_{i_{h+1}} \wedge \dots \wedge d\xi_h + d\theta$$

Para $d\Omega$ se encuentra una expresión de la forma (10, I) correspondiente a un variante integral absoluto de grado h .

Un invariante integral relativo respecto a las variedades solución del sistema (4, I) de orden $s < h$ se podrá escribir en la forma

$$\int \psi = \int \Sigma f_{i_1 i_2 \dots i_s}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h) d\xi_{i_1} \wedge d\xi_{i_2} \wedge \dots \wedge d\xi_{i_s} + d\theta$$

En efecto: será $\int_{T^{(s+1)}} d\psi = 0$, pues en la expresión de $d\psi$ sólo entran diferenciales de integrales primeras y T^{s+1} de acuerdo con la definición (1, I) está engendrado por arcos de curvas sobre las variedades integrales y éstas satisfacen a las ecuaciones (4, I).

7. CLASIFICACIÓN DE LOS INVARIANTES INTEGRALES ABSOLUTOS.

De acuerdo con las dos condiciones a que ha de satisfacer un invariante integral absoluto, podemos clasificar estos invariantes integrales en dos clases; según que cumplan unas u otras de las siguientes condiciones:

$$1.^a \quad \int_{T^{(p)}} \Omega = 0, \quad \int_{T^{(p+1)}} d\Omega = 0, \quad d\Omega \neq 0$$

$$2.^a \quad \int_{T^p} \Omega = 0, \quad d\Omega = 0$$

En los de la segunda clase, existe una forma diferencial ψ , tal que $d\psi = \Omega$, $\int \psi$ es un invariante integral relativo y de acuerdo con el teorema de STOKES se verifica

$$\int_{\partial D^{(p)}} \psi = \int_{D^{(p)}} \Omega$$

En los de la primera clase, se deducen dos invariantes integrales absolutos $\int \Omega$ y $\int d\Omega$ de grados p y $p+1$ respectivamente y además

$$\int_{\partial D^{(p+1)}} \Omega = \int_{D^{(p+1)}} d\Omega.$$

8. CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE UNA MEDIDA.

Además de las condiciones exigidas a una integral sobre un dominio puntual para ser una medida en el espacio métrico que se considere, si existe una medida para un *conjunto de variedades* solución de un sistema de PFAFF completamente integrable y se pretende calcularla por una integral sobre un dominio D^p , de dimensión p , tomando un punto sobre cada variedad, esta medida ha de cumplir las dos condiciones siguientes:

1.^a Su valor no debe variar si el dominio D_0^p se desplaza hasta el dominio D_1^p , moviéndose cada punto sobre la variedad en que se encuentra.

Esta condición equivale a que la medida será un *invariante integral absoluto*, puesto que D_0^p no ha de ser necesariamente cerrado.

2.^a La existencia de la medida $\int_{D^{(p)}} \Omega$ exige que el invariante integral sea de la clase 2.^a, en la clasificación del número anterior; es decir: $d\Omega = 0$.

En efecto, si el conjunto C_s de variedades V_{m-h} que deseamos medir es de dimensión $s < h$ la medida vendrá determinada por un invariante integral absoluto $\int \Omega$ para el que se verifique $d\Omega = 0$, pues para poder establecer una medida dimensional, el conjunto C_1 de variedades V_{m-h} habrá de poderse considerar como un espacio de $m - h + s$ dimensiones. Considerando h integrales primeras del sistema (1, I).

$$\varphi_i(a_1, a_2, \dots, a_m) = \xi_i, \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

Supongamos que en el conjunto C_s , considerado como un espacio de $m - h + s$ dimensiones, pueden tomarse como coordenadas (VID. Teorema I).

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \quad y_{h+1}, y_{h+2}, \dots, y_m$$

las coordenadas $y_{h+1}, \dots, y_m$ en número de $m - h$, tomadas sobre las variedades mientras las $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ *normales* a ellas.

Un invariante integral absoluto de grado s respecto a este conjunto C_s se expresará de acuerdo con el teorema VI en función de las coordenadas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ y de sus diferenciales es decir, de la forma

$$\int \Omega = \int f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s) d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_s$$

y por tanto $d\Omega = 0$.

II. GEOMETRÍA INTEGRAL EN UN ESPACIO DE KLEIN

La geometría integral en un espacio de KLEIN, fue establecida por CHERN [7] y SANTALÓ [14]. A continuación valiéndonos de las generalizaciones dadas en la primera parte se relaciona la medida de esos espacios con un invariante integral relativo sobre la frontera del conjunto que se desea medir y el significado de esas medidas adquiere claro sentido como invariante integral absoluto.

También se introducen las medidas de conjuntos de dimensión menor que la máxima posible en el espacio considerado, modificando la definición de área p dimensional de CHERN.

9. DENSIDAD Y MEDIDA DE UN ESPACIO DE KLEIN.

Sea $E_m(x)$ un espacio m dimensional de puntos $x = (x_1, x_2 \dots x_m)$. Supongamos definido en E_m un campo de «elementos geométricos» H (VID. SANTALÓ [16]). Si E_m es, por ejemplo, el espacio euclídeo, los elementos geométricos H pueden ser puntos, rectas, planos, pares de rectas, cuádricas, etc.

Sea G_r un grupo de LIE de transformaciones en E_m con r parámetros que transforme los elementos H transitivamente. La *medida* para conjuntos de elementos H ha de cumplir la condición de ser invariante bajo el grupo G_r .

Las transformaciones de G_r que dejan invariante un elemento fijo H forman un subgrupo g_{r-h} dependiendo de cierto número de parámetros, supongamos que $r = h$. En el espacio de los parámetros $G_r(a)$ del grupo dado G_r , el subgrupo g_{r-h} estará representado por una variedad V_{r-h} de dimensión $r = h$. Si T_s es una transformación de G_r que no pertenece a g_{r-h} , el conjunto de transformaciones $T_s g_{r-h}$ estará representado en el espacio de los parámetros por las variedades $s V_{r-h}$, transformada de V_{r-h} por la transformación s del grupo de los parámetros; las variedades sg_{r-h} (s variable) llenan el espacio de los parámetros y dos de ellas no pueden tener un punto común sin ser idénticas. Pues si $s V_{r-h}$ y $t V_{r-h}$ tienen el punto común a , existen dos puntos a_1, a_2 de g_{r-h} tal que $a = sa_1 = ta_2$ en consecuencia

$$s = t(a_2 a_1^{-1}); \quad s V_{r-h} = t(a_2 a_1^{-1}) V_{r-h} = t V_{r-h}$$

pues $a_2 a_1^{-1}$ son puntos de V_{r-h} y la transforman en sí misma; así, sg_{r-h} y tg_{r-h} son idénticos.

Esta propiedad prueba que las variedades $s V_{r-h}$ son las variedades integrales de un sistema de PFAFF completamente integrable. Se deduce, además, que estas variedades son invariantes respecto al grupo de los parámetros; esto es, que si a la variedad $s g_{r-h}$ le aplicamos la transformación t del grupo de los parámetros, se obtiene $(ts) V_{r-h}$ que es otra variedad de la familia $s g_{r-h}$ como queríamos probar.

Se deduce (VID. SANTALÓ [16], pág. 84) que los primeros miembros del sistema de PFAFF correspondiente a las variedades $s g_{r-h}$ son combinaciones lineales con coeficientes constantes de las componentes relativas $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ del grupo G_r . Puesto que las componentes relativas están determinadas salvo una transformación lineal con coeficientes constantes [16, p. 72], se puede suponer que el sistema de PFAFF integrable cuyas variedades integrales son $s V_{r-h}$ esté formado por las primeras h componentes relativos, o sea :

$$(1, \text{ II}) \quad \omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \dots, \omega_h = 0.$$

Sean

$$(2, \text{ II}) \quad \varphi_i(a_1, a_2, \dots, a_r) = \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

h primeros integrales independientes de (1. II). Esto significa que a cada conjunto de constantes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ corresponde una variedad integral $s g_{r-h}$. Pueden tomarse las ξ_i como las coordenadas de un

punto en un espacio $E_h(\xi)$, h -dimensional (el espacio homogéneo cociente G_r/g_{r-h}). A cada punto ξ de $E_h(\xi)$ le corresponderá una variedad integral (2, II) del sistema (1, II); esto es, una variedad $s g_{r-h}$ y consecuentemente un elemento geométrico H (el transformado $T_s H$ del elemento fijo H). Los parámetros $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ pueden tomarse como *coordenadas* de los elementos H de $E_m(x)$.

Conviene resumir lo que se ha hecho para establecer las nuevas coordenadas ξ para los elementos H . Consideremos el subgrupo g_{r-h} , del grupo G_r , que deja fijo un elemento H , a este subgrupo g_{r-h} corresponde en el espacio de los parámetros, considerando cada elemento $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ como un punto, una variedad V_{r-h} ; siendo $Ts \in G$, a los distintos conjuntos de transformaciones $Ts g_{r-h}$ corresponden las variedades $s V_{r-h}$, estas variedades llenan el espacio de los parámetros y dos de ellas si tienen puntos comunes coinciden, estas variedades pueden, por lo tanto, considerarse solución del sistema de PFAFF formado por las primeras h componentes relativas de G , igualadas a cero; esto es (1, II). Si se consideran las h integrales primeras (2, II), el sistema (1, II) es equivalente localmente a

$$d\xi_1 = 0, d\xi_2 = 0, \dots, d\xi_h = 0$$

Considerando las coordenadas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ de un punto ξ de un espacio de h dimensiones $E_h(\xi)$, este espacio se llama el espacio homogéneo G_r/g_{r-h} . A cada punto ξ corresponde una variedad integral $s V_{r-h}$ y en consecuencia un elemento geométrico H (el transformado $T_s H$ del elemento fijo H). Los parámetros $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ pueden tomarse como coordenadas del elemento H de $E_m(x)$.

La medida de un conjunto de elementos H de h dimensiones en $E_m(x)$ será equivalente a hallar una medida para las variedades V_{r-h} invariante respecto al grupo de los parámetros G_r , pero esta medida ha de ser un *invariante integral absoluto* respecto a estas variedades (cap. I, n.º 8).

Dado el sistema

$$(3, II) \quad d\xi_1 = 0, d\xi_2 = 0, \dots, d\xi_h = 0$$

un invariante integral absoluto de grado h , en virtud del teorema VI, será de la forma

$$(4, II) \quad \int f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h) d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_h$$

pero cada $d\xi_i$ debe ser combinación lineal, con coeficientes dependiendo en general de $a_1, a_2, \dots, a_r$, de las formas $\omega_i(a, da)$. Así será

$$d\xi_i = \sum_{l=1}^h \alpha_{il} \omega_l$$

en consecuencia

$$d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_h = \Delta(a) (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h)$$

en donde $\Delta(a)$ es el determinante $\|\alpha_{il}(a)\|$. La integral (4, II) toma la forma

$$(5, II) \quad \int_X f(\xi(a)) \Delta(a) (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h)$$

Las formas $\omega_i(a, da)$ son invariantes respecto al grupo de los parámetros; en consecuencia también lo es el producto exterior $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h$. Si (5, II) es invariante para todos los conjuntos X , el producto $f(\xi(a)) \Delta(a)$ debe ser invariante, para una transformación $a \rightarrow a'$ del grupo de los parámetros, se verificará:

$$f(\xi(a)) \Delta(a) = f(\xi(a')) \Delta(a')$$

Esto exige

$$f(\xi(a)) \Delta(a) = \text{const.} \quad \Delta(a) = \frac{\text{const.}}{f(\xi)}$$

Así, para que los elementos H poscan una medida es necesario y suficiente que la función $\Delta(a)$ sea expresable como función de $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ solamente. En este caso la medida se define salvo un factor constante por

$$(5, II) \quad \int_X \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h$$

este resultado es debido a CHERN [7].

10. CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE UNA MEDIDA.

La condición anterior relativa a $\Delta(a)$ no es fácil de aplicar, pero puede sustituirse por una condición respecto a Ω . SANTALÓ [16] deduce que es equivalente a que se verifique $d\Omega = 0$, en su razonamiento supone que la variedad V_h en el espacio de los parámetros sobre la que

se calcula la integral (5, II), es la frontera de una variedad V_{h+1} ([16], pág. 92), pero este supuesto de SANTALÓ no es necesario, pues V_h no necesita ser ni siquiera cerrada. La única condición que se ha de imponer es que al moverse cada punto de su intersección con las variedades V_{r-h} sobre ellas hasta otra nueva V_h , se verifique

$$\int_{V_h} \Omega = \int_{V'_h} \Omega$$

pero esto equivale a que $\int \Omega$ sea un *invariante integral absoluto de grado h respecto a variedades de grado $r-h$* , y por el teorema IV es condición necesaria que $d\Omega = 0$, con lo cual queda probado que ésta es la condición necesaria y suficiente para la existencia de la medida.

Nota. Obsérvese que la condición de que el valor de la integral $\int \Omega$ no varía si los puntos de V_h se mueven cada uno sobre la variedad V_{r-h} que pasa por él hasta obtener otra variedad V'_h , y por tanto $\int_{V_h} \Omega = \int_{V'_h} \Omega$ será equivalente a la condición $d\Omega = 0$, aun cuando las formas de PFAFF del sistema

$$(6, \text{ II}) \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \dots, \omega_h = 0$$

no sean parte de las componentes relativas de un grupo, basta suponer que forman un *sistema completamente integrable*, para lo cual es condición necesaria y suficiente que se verifique

$$(7, \text{ II}) \quad \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h \wedge d\omega_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

Lo cual es equivalente a que el sistema pueda reducirse, como ya hemos visto a la forma (3, II). (*)

(*) En cada una de las formas diferenciales $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$, intervienen las r variables $a_1, a_2, \dots, a_r$ y sus diferenciales. Una cuestión de especial interés será averiguar si las transformaciones que cambian entre sí variedades V_{r-h} solución de un sistema de PFAFF completamente integrable, forman grupo.

11. LA MEDIDA COMO DIFERENCIAL EXTERIOR DE UN INVARIANTE INTEGRAL RELATIVO.

Las condiciones establecidas para que $\int \Omega$ sea una medida, equivalen a que $\int \Omega$ sea un *invariante integral absoluto* de la segunda clase (I, n.º 7); esto es:

$$(8, \text{ II}) \quad \int_{T^p} \Omega = 0, \quad d\Omega = 0$$

Estas condiciones prueban que Ω es la diferencial de otra forma π de grado $h - 1$, y ya hemos visto (I, n.º 6) que π será la suma de un invariante integral absoluto de grado $h - 1$ y de una diferencial exacta; esto es: $\pi = \alpha + d\theta$.

Si $\int \Omega$ es la medida de un conjunto C de elementos H , corresponde al valor de

$$(9, \text{ II}) \quad \int_{V_h} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h$$

sobre la variedad V_h que encuentra en un punto a cada variedad V_{r-h} . Si consideramos ∂V_h como la frontera de V_h , se obtiene:

$$(10, \text{ II}) \quad \int_{\partial V_h} \pi = \int_{V_h} \Omega,$$

$\int \pi$ será un *invariante integral relativo* para el conjunto de las variedades frontera de V_h . Se deduce que la expresión de π en función de las coordenadas ξ_1 será de la forma:

$$\pi = \sum A_i(\xi) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_{i-1} \wedge d\xi_{i+1} \wedge \dots \wedge d\xi_h + d\theta$$

de donde

$$(11, \text{ II}) \quad \Omega = \left(\frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_2} + \dots + \frac{\partial A_h}{\partial \xi_h} \right) d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_h$$

pero por ser el sistema

$$(12, \text{ II}) \quad \omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \dots, \omega_h = 0$$

equivalente al sistema

$$(13, \text{ II}) \quad d\xi_1 = 0 \quad d\xi_2 = 0, \dots, d\xi_h = 0$$

cada $d\xi_i$ debe ser combinación lineal, con coeficientes constantes dependiendo en general de $a_1, a_2, \dots, a_r$, de las formas $\omega_i(a, d_a)$; se deduce:

$$d\xi_i = \sum_{l=1}^h \alpha_{il} \omega_l$$

sustituyendo estos valores en (11, II) y representando $\Delta(a)$ el determinante $\|\alpha_{il}(a)\|$, se tiene:

$$\Omega = \left(\frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_2} + \dots + \frac{\partial A_h}{\partial \xi_h} \right) \Delta(a) (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h)$$

de donde

$$(14, \text{ II}) \quad \left(\frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_2} + \dots + \frac{\partial A_h}{\partial \xi_h} \right) \Delta(a) = \text{constante.}$$

EJEMPLOS:

1. *Densidad de conjuntos de rectas de dos dimensiones en el plano euclídeo como invariante integral absoluto.*

El grupo de los movimientos en el plano E_2 es

$$(15, \text{ II}) \quad \begin{aligned} x^* &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + a \\ y^* &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + b \end{aligned}$$

sus componentes relativas son: (VID. SANTALÓ [16], pág. 74)

$$(16, \text{ II}) \quad \begin{aligned} \omega^1 &= \cos \varphi da + \sin \varphi db \\ \omega^2 &= -\sin \varphi da + \cos \varphi db \\ \omega^{12} &= d\varphi \end{aligned}$$

En el espacio tridimensional G_3 de los parámetros (a, b, φ)

$$(17, \text{ II}) \quad \omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0$$

representan rectas paralelas al eje φ , estas rectas son las variedades correspondientes a los puntos de E_2 , para estos conjuntos de rectas

$$(18, \text{ II}) \quad \int \Omega = \int \omega^1 \wedge \omega^2$$

representa un variante integral absoluto puesto que $d\Omega = 0$, $\omega^1 \wedge \omega^2$ es así la *densidad de puntos o área*.

A las *rectas*, corresponden en G_3 las variedades integrales del sistema de PFAFF

$$(19, \text{ II}) \quad \omega^2 = 0, \quad \omega^{12} = 0$$

es decir $(a, b, \varphi, \text{ variables})$, las rectas en G_3 :

$$(20, \text{ II}) \quad \begin{aligned} a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi &= \text{const.} \\ \varphi &= \text{const.} \end{aligned}$$

Poniendo

$$\varphi = \xi_1, \quad b - a \operatorname{tg} \varphi = \xi_2 = \frac{p}{\cos \varphi}$$

el sistema (19, II), de acuerdo con (16, II) es equivalente a

$$d\varphi = 0, \quad db - \operatorname{tg} \varphi da - \frac{a}{\cos^2 \varphi} d\varphi = 0$$

o sea :

$$\begin{aligned} d\xi_1 &= \omega^{12}, \quad d\xi_2 = \frac{\omega^2}{\cos \varphi} - \frac{\alpha_1 \omega^{12}}{\cos^2 \varphi}; \quad (d\xi_2 \wedge d\xi_1) \cos \varphi = \\ &= (d\xi_2 \wedge d\varphi) \cos \varphi = \omega^2 \wedge \omega^{12} \end{aligned}$$

el invariante integral absoluto para las rectas (20, II), será

$$\int \omega^2 \wedge \omega^{12} = \int \cos \varphi (d\xi_2 \wedge d\varphi)$$

si se pone

$$p = \xi_2 \cos \varphi, \quad \varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$$

se deduce

$$d\xi_2 \wedge d\varphi = \frac{dp \wedge d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{dp \wedge d\theta}{\cos \varphi}$$

siendo p y θ las coordenadas *normales* de la recta, con lo cual las ecuaciones (20, II) se escribirán

$$a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi = p$$

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$$

para estas rectas el *invariante integral absoluto* será :

$$\int d\phi \wedge d\varphi$$

cuya forma diferencial es la derivada exterior de la forma del *invariante integral relativo*:

$$\int \phi d\varphi = \int (a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi) \omega^{12}.$$

12. MEDIDAS DE CONJUNTOS DE DIMENSIÓN $p < h$ DE ELEMENTOS H DE DIMENSIÓN $r - h$.

Análogamente a como en el espacio ordinario se consideran longitudes, áreas y volúmenes, también pueden medirse conjuntos de rectas de una dimensión, dos, tres o cuatro. Sin embargo, todos los estudios de geometría integral se refieren siempre a medidas de conjuntos de la máxima dimensión posible, excepto la consideración de CHERN [7] sobre el área p -dimensional, que introduce una condición muy restrictiva.

Si la variedad V_p , p -dimensional está constituida por elementos V_{r-h} , variedades integrales de

$$\omega_1 = 0, \dots, \omega_h = 0, \quad (p < h)$$

para la existencia de un *área p dimensional* para V_p , CHERN establece como condición que las expresiones

$$(21, \text{ II}) \quad \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$$

para $i_1, \dots, i_p$ formando todas las combinaciones entre $1, \dots, h$, *difieran unas de otras sólo por factores constantes*.

Esto está sugerido por lo siguiente : por la condición de que V_p tiene p dimensiones, se pueden tomar p parámetros $u^1, \dots, u^p$; y sobre V_p , $\omega_1, \dots, \omega_h$ serán combinaciones lineales de $du^1, \dots, du^p$, eliminando estas du^i , se podrán expresar $\omega_{p+1}, \dots, \omega_h$ como combinaciones lineales de $\omega_1, \dots, \omega_p$ en la forma

$$\omega_\alpha = \sum_{k=1}^p \xi_k^\alpha \omega_k, \quad \alpha = p+1, \dots, h$$

las ξ_k^α serán función de los parámetros del grupo $a^1, \dots, a^r$ y de $u^1, \dots, u^p$. Se deduce que por el método de la referencia móvil de CARTÁN se podrá lograr que las ξ_k^α , o sean constantes todas o algunas, o bien sean funciones de los parámetros $u^1, \dots, u^p$; tal que su determinación sea invariante bajo el grupo de transformaciones G_r .

Obsérvese que aún obtenido lo anterior, no se deduce que todos los productos (21, II) sean iguales, puesto que difieren en las ξ_k^α ; por esto nosotros *definimos como medida la expresión*:

$$(22, \text{ II}) \quad \int \Omega = \int \Sigma A_{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$$

con la condición $d\Omega = 0$.

EJEMPLOS:

1. *Densidad para un conjunto de rectas de una dimensión en el plano euclídeo.*

Las rectas de E_2 corresponden en G_3 a las variedades integrales del sistema (19, II). Integrales primeras de estas ecuaciones son:

$$\varphi = \xi_1, \alpha_2 - \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi = \xi_2,$$

así la medida buscada será de la forma

$$\int \Omega = \int A d\xi_1 + B d\xi_2 = \int M \omega^2 + N \omega^{12}$$

pero

$$d\xi_1 = \omega^{12}, \quad d\xi_2 = \frac{\omega^2}{\cos \varphi} - \frac{\alpha_1 \omega^{12}}{\cos^2 \varphi}$$

se deduce

$$\int \Omega = \int \left(A + \frac{B}{\cos \varphi} \right) \omega^2 - \frac{B \alpha_1}{\cos^2 \varphi} \omega^{12} = \int M \omega^2 + N \omega^{12}$$

Si se hace una transformación de parámetros, el valor debe permanecer invariante, pero siendo ω^2, ω^{12} también invariantes, se deduce que M y N deben ser constantes. De la condición $d\Omega = 0$, se obtiene

$$\left(A + \frac{B}{\cos \varphi} \right) d\omega^2 = 0, \quad \text{si } d\omega^2 \neq 0, \quad A + \frac{B}{\cos \varphi} = 0$$

por lo cual, la medida, salvo una constante será

$$(23, \text{ II}) \quad \int \omega^{12} = \int d\varphi.$$

Si se trata de un conjunto de rectas paralelas $\varphi = \text{const.}$, $\omega^{12} = 0$
 $d\omega^2 = 0$, en este caso, la medida es $\int \omega^2 = \int \cos \varphi d\xi_2 = \int dp$.

De acuerdo con (23, II) *la medida del conjunto de rectas tangentes a un arco de curva convexa, coincide con la integral de la curvatura.*

2. *Medida en el espacio euclídeo E_3 de un conjunto de planos de dos dimensiones.*

El grupo de los movimientos en E_3 es un grupo de seis parámetros G_6 , sus componentes relativos pueden representarse por

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \omega_{23}, \quad \omega_{31}, \quad \omega_{12},$$

representando las tres traslaciones infinitesimales en las direcciones de los ejes, y las tres últimas rotaciones infinitesimales sobre cada uno de los ejes. A los planos en E_3 corresponden las variedades solución en G_6 del sistema de PFAFF :

$$\omega_{23} = 0, \quad \omega_{31} = 0, \quad \omega_3 = 0$$

la medida de un conjunto de planos de tres dimensiones será

$$\int \omega_{23} \wedge \omega_{31} \wedge \omega_3$$

La medida de un conjunto de planos de dos dimensiones, por ejemplo, los planos tangentes a una superficie, vendrá determinada por una forma diferencial Ω cuya expresión será :

$$(24, \text{ II}) \quad \Omega = A_1 \omega_{23} \wedge \omega_{31} + A_2 \omega_{23} \wedge \omega_3 + A_3 \omega_{31} \wedge \omega_3$$

con la condición $d\Omega = 0$.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de estructura

$$(25, \text{ II}) \quad \begin{aligned} d\omega_i &= \sum_{k=1}^3 \omega_k \wedge \omega_{ki} \\ d\omega_{ij} &= \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \end{aligned}$$

se deduce que ha de ser

$$dA_2 = A_3 \omega_{21}$$

$$dA_3 = A_2 \omega_{21}$$

$$dA_1 = A_2 \omega_1$$

las que se satisfacen tomando $A_2 = A_3 = 0$, $A_1 = 1$, con lo cual tenemos como *invariante integral absoluto*, la expresión

$$(26, II) \quad \Omega = \omega_{23} \wedge \omega_{31}$$

que corresponde a considerar como medida de un conjunto de planos de dos dimensiones, el *área esférica* determinada trazando por el centro de la esfera radios perpendiculares a los planos dados; resulta así que *la curvatura total de una superficie convexa es la medida del conjunto de planos tangentes*.

Puesto que

$$\Omega = d\omega_{12}$$

el *invariante integral relativo* para el conjunto de planos de una dimensión, será $\int \omega_{12}$.

3. Medida de conjuntos de planos de tres dimensiones.

La medida de conjuntos de planos de tres dimensiones viene dada por

$$\int \omega_3 \wedge \omega_{13} \wedge \omega_{23}$$

o también, por la expresión

$$\frac{1}{3} \int \Omega = \frac{1}{3} \int (\omega_1 \wedge \omega_{31} \wedge \omega_{12} + \omega_2 \wedge \omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_3 \wedge \omega_{23} \wedge \omega_{31})$$

Este invariante integral absoluto, se deduce del invariante integral relativo

$$\frac{1}{3} \int \pi = \frac{1}{3} \int (\omega_1 \wedge \omega_{23} + \omega_2 \wedge \omega_{31} + \omega_3 \wedge \omega_{12})$$

En efecto:

$$d\pi = d\omega_1 \wedge \omega_{23} - \omega_1 \wedge d\omega_{23} + d\omega_2 \wedge \omega_{31} - \omega_2 \wedge d\omega_{31} + d\omega_3 \wedge \omega_{12} - \omega_3 \wedge d\omega_{12}$$

teniendo en cuenta las ecuaciones de estructura (25, II), se deduce

$$d\pi = \omega_1 \wedge \omega_{31} \wedge \omega_{12} + \omega_2 \wedge \omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_3 \wedge \omega_{23} \wedge \omega_{31}$$

como queríamos demostrar.

Estas fórmulas se pueden generalizar al espacio euclídeo de n dimensiones (VID. BLASCHKE [2]).

III. GEOMETRÍA INTEGRAL EN LOS ESPACIOS DE RIEMANN

13. LOS PROBLEMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO DE VARIACIONES Y LOS INVARIANTES INTEGRALES.

En un espacio $E_n(x^1, x^2, \dots, x^n)$, consideremos una función cualquiera positiva homogénea de primer grado respecto a las dx^i

$$(1, \text{III}) \quad L(x^1, x^2, \dots, x^n, dx^1, dx^2, \dots, dx^n) = L(x, dx)$$

se llaman curvas *extremales*, las que anulan la primera variación de la integral

$$(2, \text{III}) \quad \int L(x, dx)$$

Si se considera un arco AB de extremal y se hacen variar infinitamente poco las extremidades de este arco de manera de obtener un nuevo arco de extremal infinitamente próximo $A'B'$. La variación sufrida por la integral (2, III) es igual a : (VID. CARTÁN [5])

$$(3, \text{III}) \quad \left[\Sigma \frac{\partial L}{\partial x'^i} \delta x^i \right]_B^{B'} - \left[\Sigma \frac{\partial L}{\partial x'^i} \delta x^i \right]_A^{A'}$$

x'^i son los parámetros directores de la tangente a la extremal, en B y en A (de los que sólo interesan las razones a uno de ellos); δx^i designan en el primer término, las variaciones elementales sufridas por las coordenadas x^i al ir de B a B' , y al ir de A a A' , en el segundo término.

Si se considera un tubo de trayectorias, esto es una serie lineal continua y cerrada, la forma

$$(4, \text{III}) \quad \omega = \Sigma \frac{\partial L}{\partial x'^i} \delta x^i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

define, por tanto, un *invariante integral relativo*, puesto que si consideremos dos curvas cualesquiera C y D que den la vuelta al tubo, como la variación de la integral (1, III) al dar la vuelta completa será nula, de (3, III) se deduce

$$\int_C \omega = \int_D \omega$$

El teorema de DIXON-CARTÁN [4] establece que el problema variacional correspondiente a hallar las curvas extremales de la función (2, III) en el espacio E_n , tienen por imagen en el espacio

$$E_{2n-1}(x^1, x^2, \dots, x^n, x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$$

(De las variables x'^i , sólo interesan las razones respecto una de ellas), el problema de hallar las extremales de $\int \omega$, estas curvas cumplen la condición necesaria y suficiente de admitir $\int \omega$ como *invariante integral relativo*. (VID. DEDECKER [8]). Esta expresión es así invariante integral relativo en E_{2n-1} para las curvas extremales de $\int \omega$, imágenes de las curvas extremales en E_n de $\int L(x, dx)$.

En E_{2n-1} , $\int d\omega$ nos dará un *invariante integral absoluto*. Si representamos $\frac{\partial L}{\partial x'^i} = p_i$, se tiene

$$(5, \text{III}) \quad d\omega = \Sigma dp_i \wedge dx^i$$

En el espacio de FINSLER en que

$$(6, \text{III}) \quad ds = L(x^1, x^2, \dots, x^n, dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$$

la densidad de geodésicas de un conjunto de dos dimensiones vendrá representada por

$$dG = \Sigma dp_i \wedge dx^i.$$

14. DENSIDAD DE GEODÉSICAS EN UN ESPACIO DE RIEMANN.

Supongamos un espacio de RIEMANN en que

$$(7, \text{III}) \quad ds^2 = \Sigma g_{ik} dx^i \wedge dx^k$$

de acuerdo con la teoría anterior, las geodésicas son curvas extremales de la función

$$(8, \text{III}) \quad I = \int \sqrt{\Sigma g_{ik} dx^i dx^k}$$

Las curvas imágenes en E_{2n-1} , admiten como invariante integral relativo

$$(9, \text{III}) \quad \int \frac{\Sigma g_{ik} dx^i}{\sqrt{\Sigma g_{ik} dx^i dx^k}} \delta x^k = \int \Sigma p_k \delta x^k$$

del que se deduce el invariante integral absoluto

$$(10, \text{III}) \quad \int \Sigma dp_k \wedge \delta x^k$$

que representará la medida de geodésicas para conjuntos de dos dimensiones.

Obsérvese que el paso al espacio E_{2n-1} , es análogo al paso al espacio de los parámetros en los espacios de Klein.

Para la forma diferencial del invariante integral relativo (9, III) puede encontrarse otra expresión. En efecto, se tiene (VID. CARTÁN [6], p. 32).

$$(11, \text{III}) \quad \int_C \frac{\Sigma g_{ik} dx^i \delta x^k}{\sqrt{\Sigma g_{ik} dx^i dx^k}} = \\ = \int_C \frac{\Sigma g_{ik} dx^i \delta x^k}{\sqrt{\Sigma g_{ik} dx^i dx^k} \sqrt{\Sigma g_{ik} \delta x^i \delta x^k}} \sqrt{\Sigma g_{ik} \delta x^i \delta x^k} = \int_C \cos \alpha dS$$

siendo α el ángulo formado por las geodésicas con la curva C , sobre la que se integra, y dS el elemento de arco de la curva C .

La expresión $\int \cos \alpha dS$ para el *invariante integral relativo* respecto a un tubo de geodésicas de una dimensión, fue hallado por nosotros [20] como caso particular sobre una superficie; ahora se deduce que la fórmula es válida para un conjunto de geodésicas frontera de un conjunto de dos dimensiones, en un espacio de cualquier número de dimensiones.

Análogamente se encuentra como densidad de geodésicas para un conjunto de dos dimensiones

$$(12, \text{III}) \quad dG = |\sin \alpha| d\alpha \wedge dS$$

se toma $|\sin \alpha|$, por considerar positivas las densidades. Para un conjunto de geodésicas de dimensión $2(n-1)$ la medida vendrá dada por el *invariante integral absoluto* (SANTALÓ [15]).

$$(13, \text{III}) \quad dG = \sum_{i=1}^n dp_1 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \\ \wedge dp_{i-1} \wedge dx^{i-1} \wedge dp_{i+1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dx^n$$

Esta expresión se deduce del *invariante integral relativo* $\int \beta$, siendo

$$(14, \text{III}) \quad \beta = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n p_k dx^k \sum_{i=1}^n dp_1 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \\ \wedge dp_{k-1} \wedge dx^{k-1} \wedge dp_{k+1} \wedge dx^{k+1} \wedge \dots \wedge \\ \wedge dp_{i-1} \wedge dx^{i-1} \wedge dp_{i+1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dx^n.$$

La densidad (13, III) es la potencia $(n-1)$ de la forma diferencial $\sum dp_i \wedge dx^i$, que hemos encontrado para conjuntos de dos dimensiones y que constituye el invariante integral de POINCARÉ de la dinámica [4].

A la expresión (13, III) puede dársele una forma análoga a (12, III) para esto (VID. SANTALÓ [17]) consideremos una hipersuperficie fija S^{n-1} y un conjunto de geodésicas que corten a S^{n-1} . Sea G una de ellas y P su punto de intersección con S^{n-1} . En un entorno de P podemos suponer que la ecuación de S^{n-1} es $x^n = 0$ y que el sistema de coordenadas es ortogonal, tal que

$$(15, \text{III}) \quad ds^2 = \sum g_{ii} (dx^i)^2$$

en este caso será

$$L(x, x') = \sqrt{\sum g_{ii} (x'^i)^2}$$

de donde

$$(16, \text{III}) \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial x'^i} = \sum g_{ii} \frac{dx^i}{ds}$$

Si α^i representa el coseno del ángulo entre G y la curva coordenada x^i en P , se tiene

$$\alpha^i = \sqrt{g_{ii}} \frac{dx^i}{ds}$$

de donde

$$(17, \text{III}) \quad p_i = \sqrt{g_{ii}} \alpha^i, \quad dp_i = \sqrt{g_{ii}} d\alpha^i + \frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial x^k} \alpha^i dx^k$$

Para determinar G consideramos su punto de intersección P con S^{n-1} . Pero en este punto P es $x^n = 0$, $dx^n = 0$ y en consecuencia se tiene

$$\beta = \frac{1}{h-1} \sum_{i=1}^{n-1} dp_1 \wedge dx^1 \wedge dp_2 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge p_i dx^i \wedge \dots \wedge dp_{n-1} \wedge dx^{n-1}$$

$$d\beta = dG = dp_1 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dp_{n-1} \wedge dx^{n-1}$$

y de acuerdo con (17, III)

$$dG = (g_{11} g_{22} \dots g_{n-1, n-1})^{1/2} (d\alpha^1 \wedge d\alpha^2 \wedge \dots \wedge d\alpha^{n-1} \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1})$$

Representando por $d\sigma$ el elemento de área $(n-1)$ dimensional de S^{n-1} , se tiene:

$$d\sigma = (g_{11} g_{22} \dots g_{n-1, n-1})^{1/2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

El área de la $(n-1)$ dimensional esfera de centro P que corresponde a las direcciones de las tangentes a las G en P , tiene por valor

$$d\omega_{n-1} = \frac{d\alpha^1 \wedge \dots \wedge d\alpha^{n-1}}{|\alpha^n|}$$

De donde

$$(18, \text{III}) \quad dG = |\alpha|^n d\omega_{n-1} \wedge d\sigma = |\cos \varphi| d\omega_{n-1} \wedge d\sigma$$

siendo $\alpha^n = \cos \varphi$ el coseno del ángulo φ entre la tangente a G y la normal a S^{n-1} en el punto P .

Se deduce también para el *invariante integral relativo*

$$(19, \text{III}) \quad \int \beta = \int \frac{|\sin \varphi|}{n-1} d\omega_{n-2} d\sigma.$$

Si consideramos el conjunto C frontera del conjunto de geodésicas que cortan a S^{n-1} , esto es las *geodésicas tangentes* a S^{n-1} para ellas $\sin \varphi = 1$ y se deduce por tanto:

$$(20, \text{III}) \quad \int_C n dG = \int_C \beta = \int_{S^{n-1}} \int_{\frac{1}{2}\omega_{n-2}} \frac{1}{n-1} d\omega_{n-2} d\sigma = \chi_{n-2} F$$

siendo χ_{n-2} el volumen limitado por la $n - 2$ dimensional esfera unidad, puesto que siendo ω_{n-2} el área de esa esfera, se tiene

$$\omega_i = \frac{2 \pi^{(i+1)/2}}{\Gamma(i+1)/2}, \quad \chi_i = \frac{2 \pi^{(i+1)/2}}{(i+1) \Gamma(i+1)/2}$$

y siendo el m el número de puntos de intersección de G con S^{n-1} .

EJEMPLO 1. En un espacio euclídeo E_3 , consideremos una superficie S cerrada, cuya área sea F ; supongamos que se traza por cada punto un haz cerrado, continuo lineal de rectas; la expresión

$$(21, \text{III}) \quad I = \int \beta = \int |\sin \varphi| d\theta d\sigma$$

siendo $d\sigma$ elemento de área de la superficie, representa un *invariante relativo* del conjunto de rectas de tres dimensiones, frontera del conjunto de rectas de 4 dimensiones considerando todas las rectas interiores al cono determinado en cada punto. Siendo θ el ángulo formado por la proyección de la geodésica sobre el plano tangente, con una dirección fija en ese plano.

De (21, III) se deduce el *invariante integral absoluto*

$$\int d\beta = \int |\cos \varphi| d\varphi d\theta d\sigma = \int |\cos \varphi| d\omega_2 d\sigma$$

Si como haz de rectas en cada punto P de la superficie S se consideran las rectas tangentes, como conjunto de cuatro dimensiones encontramos todas las rectas que cortan a S ; en este caso, de (21, III), teniendo en cuenta que $\varphi = \frac{\pi}{2}$, se deduce:

$$I = \int d\varphi d\sigma = \pi F$$

de donde se obtiene (SANTALÓ [16])

$$\int_{S \cap G \neq \emptyset} m dG = \int \cos \varphi d\omega_2 d\sigma = \pi F,$$

siendo m el número de puntos de intersección de cada recta con la superficie S .

EJEMPLO 2. *Medida de trayectorias.*

En un medio continuo en movimiento, la trayectoria de cada molécula puede considerarse como la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$(22, \text{III}) \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

como consecuencia del teorema V, establecido en el cap. I, la expresión

$$\int (dx - udt) \wedge (dy - vdt) \wedge (dz - wdt)$$

será un invariante absoluto que representa la *medida* del conjunto de trayectorias.

La medida de un conjunto de trayectorias de dos dimensiones, que atraviesa un área dada, será, de acuerdo con la fórmula (22, II) :

$$(22, \text{III}) \quad \int [\xi (dx - udt) \wedge (dy - vdt) + \eta (dx - udt) \wedge (dz - wdt) + \zeta (dy - vdt) \wedge (dz - wdt)] = \int \Omega$$

para calcular ξ , η , ζ basta establecer la condición de $d\Omega = 0$. En efecto, podemos considerar $t = \text{const.}$, se encuentra

$$\Omega = \xi dy \wedge dz + \eta dz \wedge dx + \zeta dx \wedge dy$$

de donde, si ha de ser

$$d\Omega = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = 0$$

se deduce

$$\xi_x + \eta_y + \zeta_z = 0$$

cuya solución es

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

que son las condiciones obtenidas por CARTÁN [4] por otras consideraciones.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

BIBLIOGRAFÍA

- [1]. W. BLASCHKE: *Vorlesungen über integralgeometrie*, I, II, B. Teubner, Leipzig. Berlín (1936-1937).
- [2]. W. BLASCHKE: *Integralgeometrie*. I, Hermann, París (1935).
- [3]. E. CARTAN: *La theorie des groupes finis et continus et la geometrie differentiel*. Gauthiers-Villars, París (1937).
- [4]. E. CARTAN: *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, París (1922).
- [5]. E. CARTAN: *Les Espaces de Finsler*. Act. scient. et ind. 79, Hermann, París (1934).
- [6]. E. CARTAN: *Leçons sur la geometrie des spaces de Riemann*. 2. ed. París (1946).
- [7]. S. S. CHERN: *On Integral geometry in Klein spaces*. Annals. of Math. Vol. 43 (1942), pp. 178-189.
- [8]. P. DEDECKER: *Sur le theoreme de la circulation de V. Bjerknes et la theorie des invariants integraux*. Inst. Royal Metéorológico de Belgique, Miscellanées. Fasc. XXXVI, (1951).
- [9]. P. DEDECKER: *Sur les intégrales multiples du Calcul des Variations*. III Congres National des Sciences, Bruxelles (1950), pp. 29-35.
- [10]. A. LICHNEROWICZ: *Les relations intégrales d'invariance et leurs applications a la dynamique*. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2.^a s., t. LXX (1946).
- [11]. H. POINCARÉ: *Les méthodes nouvelles de la mecanique céleste*, t. III, París, Gauthiers-Villars (1899).
- [12]. G. DE RHAM: *Sur un procede de formation d'invariants integraux*. Jber. Deutsch Math. Verein, 49, pp. 156-161.
- [13]. H. SAMELSON: *Topology of Lie Groups*. Bull. of the A. Math. v. 50 (1952), pp. 1-37.
- [14]. L. A. SANTALÓ: *Integral geometry in projective and affine spaces*. Annals of Mathe. (1950), v. 51, pp. 739-755.
- [15]. L. A. SANTALÓ: *Integral geometry in General spaces*. Proceedings of the Int. Congress, Cambridge (1950), pp. 483-489.
- [16]. L. A. SANTALÓ: *Introduction to Integral Geometry*. Act. scient. et ind. n.º 1198, Hermann, París (1953).

- [17]. L. A. SANTALÓ : *Measure of sets of geodesics in a Riemannian space and applications to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces*. Summa brasiliensis mathematicae. Vol. 3 fasc. 1, Río de Janeiro (1952).
- [18]. E. VIDAL ABASCAL : *Extensión del concepto de curvas paralelas sobre una superficie. Longitud y área correspondientes a una curva así deducida de otra dada*. Rev. Mat. Hisp. Amer., T. VII, núm. 6 (1947).
- [19]. E. VIDAL ABASCAL : *A Generalization of Steiner's formulae*, Bulletin of the American Math. Society., v. 53 (1947), pp. 841-844.
- [20]. E. VIDAL ABASCAL : *Geometría integral sobre las superficies curvas*, Pub. del Observatorio de Santiago, núm. VII, Santiago de Compostela (1950).
- [21]. E. VIDAL ABASCAL : *A Generalization of integrals Invariants*, Proceedings of the Amer. Math Society, V. 10 (1959) pp. 721-727.