APLICACIONES DE LA DIFERENCIACIÓN EXTERIOR A LA TEORÍA DE MEMBRANAS

POR

JUAN AUGÉ

A mi querido Maestro D. ANTONIO TORROJA, *con ocasión de su jubilación, en prueba de agradecimiento y afecto.*

1. Preliminares. La teoría de membranas ha sido desarrollada en multitud de tratados (*) de gran interés por sus aplicaciones a la construcción, especialmente en bóvedas, cúpulas y depósitos.

Una membrana (S, t) la consideramos definida, de acuerdo con aquellos autores, mediante la superficie media S, el espesor t en cada punto, que es como un escalar definido sobre la superficie, y una distribución de tensiones en el interior, que ha de cumplir con las condiciones que especificamos en el número 2, y que dependen naturalmente de las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo, que se estudia como membrana.

En definitiva, la membrana está constituida pues, por la superficie S y ciertas cantidades tensoriales definidas sobre ella : Espesor, tensiones, deformación, etc. Para desarrollar la teoría debe partirse pues, del estudio geométrico de la superficie S.

La geometría diferencial de superficies puede considerarse desde distintos puntos de vista (**) de los que quizá el más moderno y fecundo es el que fue puesto de manifiesto por CARTAN (***), y recogido y sistematizado por BLASCHKE (****) en su « Einführung in die Differentialgeometrie ».

(*) Véase FLÜGGE [1], y la lista de bibliografía en ella citada. Conviene añadirle la traducción al alemán del WLASSOW [11].
(**) Véase BLASCHKE [9] y EINSENHARD [10].
(***) Véase CARTAN [4].
(****) BLASCHKE [2].

Nos proponemos iniciar en este trabajo un esbozo de aplicación de los métodos de CARTAN y BLASCHKE a la teoría de membranas. A tal fin suponemos conocida del lector la citada obra de BLASCHKE consignada en el núm. [2] de la Bibliografía, y de la que tomamos los conceptos y proposiciones sin necesidad de nueva referencia, conservando incluso las notaciones en cuanto sea posible.

Nos ocuparemos principalmente de las propiedades del tensor de tensiones; otros capítulos de la teoría de membranas, se pueden tratar también por métodos parecidos. Después de establecer en el núm. 5, las condiciones necesarias y suficientes (*) de equilibrio para cualquier membrana, se las expresa en forma tensorial, particularmente simétrica y sencilla, en el núm. 6, y se estudian las posibles simplificaciones en el núm. 7, al tomar sistemas de referencia especiales. En el núm. 8, se estudian en particular las membranas que no tienen tensiones cortantes en su interior: es el caso de interés para aquellas aplicaciones en las que el material sólo ofrece resistencia a la compresión o a la tracción, por ej., en la tensión superficial, globos aerostáticos, muros sin argamasa, etc. Este tema había sido tratado ya por nosotros, con menor generalidad, en un trabajo anterior (**). Finalmente, en los núms. 9 al 11, mostramos cómo se pasa con facilidad de nuestras fórmulas a las usadas en la teoría de membranas y se resuelven, además, algunos problemas particulares.

2. Distribución de tensiones. Para que el cuerpo que estudiamos pueda considerarse una membrana, debe existir en su interior un estado de tensiones repartido uniformemente en todo el espesor t, y de forma que la resultante de las que actúan sobre el elemento de sección determinado por el espesor t y el elemento lineal σ de S, sea tangente a la superficie S; se expresará, pues, por un vector $\mathfrak{n}_{\tau+\frac{\pi}{2}}$ que definimos con toda precisión en la forma: $\mathfrak{n}_{\tau+\frac{\pi}{2}}$ es la tensión que actúa por unidad de sección, sobre la porción de membrana limitada por un trozo elemental σ de la curva de ecuación

$$\sigma_2^* \equiv -\sigma_1 \operatorname{sen} \tau + \sigma_2 \cos \tau = 0 \tag{2.1}$$

(*) La suficiencia se entiende desde un punto de vista puramente estático, sin tener en cuenta las posibles condiciones de compatibilidad impuestas por las deformaciones.

(**) AUGÉ [5].

y las normales a S a lo largo de esta curva, y eligiendo, además, de las dos porciones de membrana separadas por (2.1), la que está situada hacia el lado señalado por el vector

$$\mathfrak{a}_2^* = -\,\mathfrak{a}_1 \operatorname{sen} \tau + \mathfrak{a}_2 \cos \tau$$

que es normal a las curvas (2.1). El ángulo θ de este vector $\mathfrak{a}_2^*$ con el $\mathfrak{a}_1$ es $\theta = \tau + \frac{\pi}{2}$, con lo que $\mathfrak{n}_{\tau+\frac{\pi}{2}} = \mathfrak{n}_\theta$, pues nos conviene considerar la tensión interna en función de este ángulo θ, con preferencia al τ.

La dependencia de $\mathfrak{n}_\theta$ respecto del ángulo θ se obtiene con facilidad; consideremos una porción elemental de membrana, de forma triangular, limitada por las curvas de ecuaciones (2.1) correspondientes a los valores $\tau = 0$, $\tau = -\frac{\pi}{2}$, τ arbitrario, con $+\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \pi$ a los que corresponden los valores $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = 0$, $\theta = \tau + \frac{\pi}{2}$, $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ y las longitudes de los lados de este triángulo serán, $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\sigma}$, con las relaciones

$$\frac{\bar{\sigma}_1}{-\cos \tau} = \frac{\bar{\sigma}_2}{\operatorname{sen} \tau} = \bar{\sigma} \qquad (2.2)$$

Entonces la 1.ª condición de equilibrio, obliga a que la resultante de las fuerzas que actúan sobre aquel triángulo sea nula, lo que da, prescindiendo de infinitésimos de orden superior

$$\mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} \bar{\sigma}_1 + \mathfrak{n}_0 \bar{\sigma}_2 + \mathfrak{n}_\theta \bar{\sigma} = 0 \qquad (2.3)$$

de donde

$$\mathfrak{n}_\theta = \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} \cos \tau - \mathfrak{n}_0 \operatorname{sen} \tau = +\,\mathfrak{n}_0 \cos \theta + \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \theta \qquad (2.4)$$

Si expresamos ahora los vectores $+\mathfrak{n}_0$, $\mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}}$ mediante los vectores base $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$

$$+\,\mathfrak{n}_0 = N_{11}\, \mathfrak{a}_1 + N_{12}\, \mathfrak{a}_2 \qquad \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} = N_{21}\, \mathfrak{a}_1 + N_{22}\, \mathfrak{a}_2 \qquad (2.5)$$

las cuatro cantidades N_{ik}, definirán por completo la distribución de tensiones. La interpretación física, es la de siempre:

N_{ii} es la tensión normal en la dirección $\mathfrak{a}_i$, $N_{ij}\, i \neq j$ el esfuerzo cortante. $N_{ii} > 0$ en el caso de presiones; $N_{12} > 0$ cuando actúa como el par $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$.

Para ver que estas cuatro cantidades constituyen las componentes de un tensor (*), basta ver cómo se transforman al aplicar a los vectores fundamentales $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, un giro de ángulo α:

$$\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{a}_1 \cos \alpha + \mathfrak{a}_2 \operatorname{sen} \alpha ; \qquad \mathfrak{a}_2^* = - \mathfrak{a}_1 \operatorname{sen} \alpha + \mathfrak{a}_2 \cos \alpha \tag{2.6}$$

con lo que $\mathfrak{n}_0^*$, $\mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}}^*$, se obtendrán de (2.4) haciendo $\theta = \alpha$, $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$

$$\mathfrak{n}_0^* = \mathfrak{n}_\alpha = + \mathfrak{n}_0 \cos \alpha + \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \alpha, \quad \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}}^* = \mathfrak{n}_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = - \mathfrak{n}_0 \operatorname{sen} \alpha + \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha$$

e igualando como en (2.4)

$$+ \mathfrak{n}_0^* = N_{11}^* \mathfrak{a}_1^* + N_{12}^* \mathfrak{a}_2^* ; \qquad \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}}^* = N_{21}^* \mathfrak{a}_1^* + N_{22}^* \mathfrak{a}_2^*$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
N_{11}^* &= N_{11} \cos^2\alpha + N_{21} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + N_{12} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + N_{22} \operatorname{sen}^2\alpha \\
N_{12}^* &= - N_{11} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - N_{21} \operatorname{sen}^2 \alpha + N_{12} \cos^2\alpha + N_{22} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\
N_{21}^* &= - N_{11} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + N_{21} \cos^2\alpha - N_{12} \operatorname{sen}^2 \alpha + N_{22} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\
N_{22}^* &= N_{11} \operatorname{sen}^2\alpha - N_{21} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - N_{12} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + N_{22} \cos^2 \alpha
\end{aligned} \tag{2.7}$$

fórmulas que nos indican que N_{ik} son las componentes de un tensor con dos índices covariantes.

Para ver el carácter simétrico de este tensor, basta imponer la anulación del momento resultante de las tensiones que actúan sobre el triángulo elemental antes considerado:

$$\frac{\bar{\sigma}_1}{2} \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} \bar{\sigma}_1 + \frac{\bar{\sigma}_2}{2} \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{n}_0 \bar{\sigma}_2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_1}{2} \mathfrak{a}_1 + \frac{\bar{\sigma}_2}{2} \mathfrak{a}_2 \right) \times \mathfrak{n}_\theta \bar{\sigma} = 0$$

de donde, teniendo en cuenta (2.2), obtenemos

$$- \frac{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2}{2} (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) (N_{12} - N_{21}) = 0$$

de donde la simetría del tensor N_{ik}, $N_{12} = N_{21}$. (2.8)

(*) Este carácter tensorial, va entendido aquí en sentido intrínseco. V. BLASCHKE, [2] pág. 88 § 12.

Hay que advertir que la fórmula (2.2) es válida tan sólo en el caso sen $\tau > 0$, cos $\tau < 0$, porque deben considerarse $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\sigma}$ esencialmente positivos, es decir, para $\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \pi$.

Pero las restantes conclusiones son válidas en todos los casos:

$$0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad \frac{\bar{\sigma}_1}{\cos \tau} = \frac{\bar{\sigma}_2}{\operatorname{sen} \tau} = \bar{\sigma} \tag{2.2'}$$

$$\mathfrak{n}_0 \bar{\sigma}_2 + \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} \bar{\sigma}_1 + \mathfrak{n}_\theta \bar{\sigma} = 0 \tag{2.3'}$$

$$\pi \leq \tau \leq \frac{3\pi}{2}; \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi, \quad \frac{\bar{\sigma}_1}{-\cos \tau} = \frac{\bar{\sigma}_2}{-\operatorname{sen} \tau} = \bar{\sigma} \tag{2.2''}$$

$$\mathfrak{n}_\pi \bar{\sigma}_2 + \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} \sigma_1 + \mathfrak{n}_\theta \bar{\sigma} = 0 \tag{2.3''}$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \tau \leq 2\pi; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \frac{\bar{\sigma}_1}{\cos \tau} = \frac{\bar{\sigma}_2}{-\operatorname{sen} \tau} = \bar{\sigma} \tag{2.2'''}$$

$$\mathfrak{n}_\pi \bar{\sigma}_2 + \mathfrak{n}_{\frac{3\pi}{2}} \bar{\sigma}_1 + \mathfrak{n}_\theta \bar{\sigma} = 0 \tag{2.3'''}$$

en todos los casos

$$\mathfrak{n}_\theta = \mathfrak{n}_0 \cos \theta + \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \theta \tag{2.4}$$

Consideremos ahora una curva sobre S, definida por las ecuaciones (BLASCHKE [2] § 61, pág. 86 (4)),

$$\sigma_1 = \sigma \cos \tau \qquad \sigma_2 = \sigma \operatorname{sen} \tau$$

la tensión que actúa sobre un elemento σ de la misma que limite el trozo de S hacia el que va dirigido el vector $\mathfrak{a}_2^*$, será,

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_\theta \sigma &= (-\mathfrak{n}_0 \operatorname{sen} \tau + \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} \cos \tau)\sigma = -\mathfrak{n}_0 \sigma_2 + \mathfrak{n}_{\frac{\pi}{2}} \sigma_1 = \\ &= (-N_{11}\sigma_2 + N_{21}\sigma_1)\,\mathfrak{a}_1 + (-N_{12}\sigma_2 + N_{22}\sigma_1)\,\mathfrak{a}_2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

3. Primera condición de equilibrio. Consideremos un trozo de membrana determinado por un dominio cerrado y conexo D de la superficie media S, limitado por una curva arbitraria cerrada y conexa dD, continua y con tangente continua; los segmentos de las normales a S en todos los puntos de D, de amplitud t, generarán el trozo de membrana que tomamos en consideración, y que designaremos con la misma letra D del dominio correspondiente en S. Para obtener la primera condición de equilibrio, escribiremos que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre esta porción D es nula.

De las fuerzas que actúan sobre esta porción D de membrana, las tensiones interiores estudiadas en el número anterior se equilibran mutuamente excepto las que actúan sobre el contorno dD; habrá además, las fuerzas exteriores aplicadas en los diferentes puntos de la membrana, que consideraremos medidas por unidad de área, y por tanto de la forma elemental $\mathfrak{f}\,[\sigma_1, \sigma_2]$ donde $[\sigma_1\,\sigma_2]$ es el producto alternante de los dos pfaffianos σ_1, σ_2.

De este modo la condición de equilibrio se escribe:

$$\oint_{dD} t\,\mathfrak{n}\,\sigma + \iint_{D} \mathfrak{f}\,[\sigma_1, \sigma_2] = 0$$

El primer sumando lo transformamos mediante la fórmula de Green (*)

$$\oint_{dD} t\,\mathfrak{n}\,\sigma = \iint_{D} d\,(t\,\mathfrak{n}\,\sigma)$$

con lo que la ecuación anterior se escribe

$$\iint_{D} \left\{ d\,(t\,\mathfrak{n}\,\sigma) + \mathfrak{f}\,[\sigma_1, \sigma_2] \right\} = 0$$

y como que esta condición debe satisfacerse para un dominio $\mathfrak{D}$ arbitrario, se obtiene como primera condición de equilibrio

$$\mathfrak{f}\,[\sigma_1, \sigma_2] + d\,(t\,\mathfrak{n}\,\sigma) = 0\,; \tag{3.1}$$

transformaremos el segundo sumando, calculando de acuerdo con las reglas de diferenciación exterior, con lo que se introducen de manera natural los elementos diferenciales de la superficie S.

4. Cálculo del diferencial $d\,(t\,\mathfrak{n}\,\sigma)$. De los dos términos en que se desdobla

$$d\,(t\,\mathfrak{n}\,\sigma) = t d\,(\mathfrak{n}\,\sigma) - [\mathfrak{n}\,\sigma,\; dt] \tag{4.1}$$

(*) La operación de diferenciación d, aquí utilizada es la estudiada principalmente por E. Cartan [4].

el segundo se calcula inmediatamente ; basta expresar dt en función de los pfaffianos σ_1, σ_2,

$$dt = t_1 \sigma_1 + t_2 \sigma_2$$

y en virtud de (2.9) se obtiene

$$\begin{aligned}[\mathfrak{n}\sigma,\ dt] &= [(N_{21}\mathfrak{a}_1 + N_{22}\mathfrak{a}_2)\sigma_1 - (N_{11}\mathfrak{a}_1 + N_{12}\mathfrak{a}_2)\sigma_2,\ t_1\sigma_1 + t_2\sigma_2] = \\ &= \{(N_{21}t_2 + N_{11}t_1)\mathfrak{a}_1 + (N_{22}t_2 + N_{12}t_1)\mathfrak{a}_2\}[\sigma_1,\sigma_2] = \\ &= [\sigma_1,\ \sigma_2]\,\Sigma\, t_i N_{ij}\mathfrak{a}_j\end{aligned} \tag{4.2}$$

Para calcular el primer término de (4.1) diferenciemos externamente (2.9) :

$$\begin{aligned}d(\mathfrak{n}\sigma) = {} & [-\mathfrak{a}_1 dN_{11} - \mathfrak{a}_2 dN_{12} - N_{11} d\mathfrak{a}_1 - N_{12} d\mathfrak{a}_2,\ \sigma_2] + \\ & + [\mathfrak{a}_1 dN_{21} + \mathfrak{a}_2 dN_{22} + N_{21} d\mathfrak{a}_1 + N_{22} d\mathfrak{a}_2,\ \sigma_1] + \\ & + (N_{21}\mathfrak{a}_1 + N_{22}\mathfrak{a}_2)\, d\sigma_1 - (N_{11}\mathfrak{a}_1 + N_{12}\mathfrak{a}_2)\, d\sigma_2\end{aligned}$$

Expresemos ahora los dN_{ij} en función de los pfaffianos fundamentales σ_1, σ_2

$$dN_{ij} = N_{ij,1}\sigma_1 + N_{ij,2}\sigma_2$$

y teniendo en cuenta las fórmulas de diferenciación de los vectores fundamentales

$$d\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2\omega_3 - \mathfrak{a}_3\omega_2, \qquad d\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3\omega_1 - \mathfrak{a}_1\omega_3 \tag{4.3}$$

obtenemos :

$$\begin{aligned}d(\mathfrak{n}\sigma) = {} & \{-(N_{11,1} + N_{21,2})\mathfrak{a}_1 - (N_{12,1} + N_{22,2})\mathfrak{a}_2\}[\sigma_1\sigma_2] + \\ & + (N_{12}\mathfrak{a}_1 - N_{11}\mathfrak{a}_2)[\omega_3\sigma_2] + \mathfrak{a}_3(N_{11}[\omega_2\sigma_2] - N_{12}[\omega_1\sigma_2]) + \\ & + (-N_{22}\mathfrak{a}_1 + N_{21}\mathfrak{a}_2)[\omega_3\sigma_1] + \mathfrak{a}_3(N_{22}[\omega_1\sigma_1] - N_{21}[\omega_2\sigma_1]) + \\ & + (N_{21}\mathfrak{a}_1 + N_{22}\mathfrak{a}_2)\, d\sigma_1 - (N_{11}\mathfrak{a}_1 + N_{12}\mathfrak{a}_2)\, d\sigma_2.\end{aligned}$$

Transformemos esta expresión teniendo en cuenta las expresiones de las curvaturas geodésicas g_1, g_2, de las líneas de los haces coordenados, y las de las cantidades c_{ik} de Blaschke ([2], § 61, pág. 87).

$$\begin{aligned}& d\sigma_1 = [\omega_3,\ \sigma_2] = g_1[\sigma_1,\ \sigma_2]\ ;\quad d\sigma_2 = [\sigma_1,\ \omega_3] = g_2[\sigma_1,\ \sigma_2] \\ & \omega_2 = c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2\ ;\quad -\omega_1 = c_{21}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2\ ;\quad c_{12} = c_{21} \\ & [\sigma_2,\ \omega_2] = -c_{11}[\sigma_1,\sigma_2]\ ;\ [\sigma_1,\ \omega_1] = -c_{22}[\sigma_1,\sigma_2]\ ; \\ & [\sigma_1,\ \omega_2] = c_{12}[\sigma_1,\sigma_2] = [\sigma_2,\ \omega_1]\end{aligned} \tag{4.4}$$

Obtendremos :

$$d\,(\mathfrak{n}\,\sigma) = \{\,(-N_{11,1} - N_{21,2} + 2\,g_1 N_{12} + g_2\,(N_{22} - N_{11}))\,\mathfrak{a}_1 + \\ + (-N_{12,1} - N_{22,2} + g_1\,(N_{22} - N_{11}) - 2\,g_2 N_{21})\,\mathfrak{a}_2 + \\ + (c_{11} N_{11} + 2\,c_{12} N_{12} + c_{22} N_{22})\mathfrak{a}_3\}\,[\sigma_1, \sigma_2]$$

Substituyendo la expresión anterior y la (4.2) en (4.1) obtenemos en definitiva :

$$d(t\,\mathfrak{n}\,\sigma) = \{(-t\,(N_{11,1} + N_{21,2}) - (g_2 t + t_1)\,N_{11} + (2\,g_1 t - t_2)\,N_{12} + g_2 t N_{22})\,\mathfrak{a}_1 + \\ + (-t\,(N_{12,1} + N_{22,2}) - g_1\,t\,N_{11} - (2\,g_2 t + t_1)\,N_{12} + (g_1 t - t_2)\,N_{22})\,\mathfrak{a}_2 + \\ + t\,(c_{11} N_{11} + 2\,c_{12} N_{12} + c_{22} N_{22})\,\mathfrak{a}_3\}\,[\sigma_1, \sigma_2] \qquad (4.5)$$

5. Condiciones necesarias y suficientes de equilibrio. La ecuación de equilibrio (3.1), se transforma en virtud de la relación anterior (4.5) en la ecuación vectorial

$$\mathfrak{a}_1(-t\,(N_{11,1} + N_{21,2}) - (g_2 t + t_1)\,N_{11} + (2\,g_1 t - t_2)\,N_{12} + g_2 t N_{22}) + \\ + \mathfrak{a}_2\,(-t\,(N_{12,1} + N_{22,2}) - g_1 t N_{11} - (2 g_2 t + t_1)\,N_{12} + (g_1 t - t_2)\,N_{22}) + \\ + \mathfrak{a}_3\,t\,(c_{11} N_{11} + 2\,c_{12} N_{12} + c_{22} N_{22}) + \mathfrak{f} = 0 \qquad (5.1)$$

Si desdoblamos ahora $\mathfrak{f}$ en sus tres componentes respecto del triedro intrínseco

$$\mathfrak{f} = f_1\,\mathfrak{a}_1 + f_2\,\mathfrak{a}_2 + f_3\,\mathfrak{a}_3$$

la ecuación vectorial anterior se desdobla en las tres ecuaciones escalares en las componentes,

$$t\,(N_{11,1} + N_{21,2}) + (g_2 t + t_1)\,N_{11} - (2\,g_1 t - t_2)\,N_{12} - g_2 t N_{22} = f_1 \\ t\,(N_{21,1} + N_{22,2}) + g_1 t N_{11} + (2\,g_2 t + t_1)\,N_{12} - (g_1 t - t_2)\,N_{22} = f_2 \\ -t\,(c_{11} N_{11} + 2\,c_{12} N_{12} + c_{22} N_{22}) = f_3 \qquad (5.2)$$

Estas ecuaciones pueden escribirse también, considerando fuerzas por unidad de espesor t, es decir, dividiéndolas por t, y llamando

$$\frac{t_1}{t} = t_1^*,\ \frac{t_2}{t} = t_2^*,\ \frac{f_i}{t} = f_i^*,\ d\log t = t_1^*\,\sigma_1 + t_2^*\,\sigma_2 \qquad (5.3)$$

en la forma

$$
\begin{aligned}
N_{11,1} + N_{21,2} + (g_2 + t_1^*) N_{11} - (2g_1 - t_2^*) N_{12} - g_2 N_{22} &= f_1^* \\
N_{12,1} + N_{22,2} + g_1 N_{11} + (2 g_2 + t_1^*) N_{12} - (g_1 - t_2^*) N_{22} &= f_2^* \\
- (c_{11} N_{11} + 2 c_{12} N_{12} + c_{22} N_{22}) &= f_3^*
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

El vector $\mathfrak{f}^* (f_1^*, f_2^*, f_3^*)$ representará aquí una fuerza por unidad de volumen, del tipo de las debidas al peso propio de la membrana.

Es de notar también que todas las magnitudes que figuran en las dos primeras ecuaciones de (5.4) tienen carácter intrínseco respecto de la superficie S, salvo t_1^* t_2^* ; pero puede considerarse log t como un escalar función de la posición del punto variable sobre S, con lo que en virtud de (5.3) también t_i^* poseen tal carácter intrínseco. En cambio la tercera y última ecuación de (5.4) no tiene tal carácter puesto que en ella figuran las magnitudes c_{ik}, que se relacionan con la curvatura de las líneas de la superficie.

Las ecuaciones (5.4) se han obtenido por anulación de la resultante de las fuerzas que actúan sobre una porción D arbitraria de la membrana ; las condiciones necesarias y suficientes se obtendrán añadiendo a las (5.4) las de anulación del momento resultante. Pero es fácil ver que estas condiciones no aportan ninguna nueva ecuación, y que son consecuencia de las (5.4) y (2.8).

En efecto, llamando $\mathfrak{r}$ al vector de posición tomado desde un origen fijo, la anulación del momento resultante se escribe

$$
\iint_D (\mathfrak{r} \times \mathfrak{f}) [\sigma_1, \sigma_2] + \oint_{dD} \mathfrak{r} \times t\,\mathfrak{n}\,\sigma = 0 \tag{5.5}
$$

transformemos el segundo término por la fórmula de GREEN, teniendo en cuenta que

$$
d (\mathfrak{r} \times t\,\mathfrak{n}\,\sigma) = \mathfrak{r} \times d (t\,\mathfrak{n}\,\sigma) + [d\,\mathfrak{r} \times t\,\mathfrak{n}\,\sigma]
$$

donde el segundo sumando es una notación abreviada que designa un vector análogo al obtenido por producto vectorial pero en el que hay que cambiar los productos ordinarios de pfaffianos por productos alternantes ; obtendremos :

$$
\iint_D \{\mathfrak{r} \times (\mathfrak{f} [\sigma_1, \sigma_2] + d (t\,\mathfrak{n}\,\sigma)) + [d\,\mathfrak{r} \times t\,\mathfrak{n}\,\sigma]\} = 0
$$

de donde por la arbitrariedad del dominio D y en virtud de (3.1) y de $t \neq 0$,

$$[d\mathfrak{r} \times \mathfrak{n}\sigma] = 0 \tag{5.6}$$

condición que en virtud de

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_1 \sigma_1 + \mathfrak{a}_2 \sigma_2$$

y de (2.8) y (2.9), es fácil ver que queda idénticamente satisfecha.

Con esto *las condiciones* (5.4) *quedan como necesarias y suficientes de equilibrio.*

NOTA. Para estudiar la distribución de esfuerzos en el interior de la membrana mediante los vectores $\mathfrak{n}$ aquí considerados, podría haberse tomado el vector $\mathfrak{m} = t\mathfrak{n}$, que representaría tensión total por unidad de longitud, vector que es proporcional al $\mathfrak{n}$ en cada punto, pero nos ha parecido mejor considerar siempre explícitamente el espesor t de la membrana.

6. Forma tensorial de las condiciones de equilibrio. Las ecuaciones (5.2) pueden escribirse también en la forma equivalente

$$\begin{aligned} (tN_{11})_{,1} + (tN_{12})_{,2} + g_2(tN_{11}) - 2g_1(tN_{12}) - g_2(tN_{22}) &= f_1 \\ (tN_{12})_{,1} + (tN_{22})_{,2} + g_1(tN_{11}) + 2g_2(tN_{12}) - g_1(tN_{22}) &= f_2 \\ c_{11}(tN_{11}) + 2c_{12}(tN_{12}) + c_{22}(tN_{22}) &= -f_3 \end{aligned} \tag{6.1}$$

si convenimos en que subíndices detrás de una coma, representen para cualquier función F,

$$\begin{aligned} dF &= F_{,1}\sigma_1 + F_{,2}\sigma_2 \\ dF_{,i} &= F_{,i1}\sigma_1 + F_{,i2}\sigma_2 \\ dF_{,ik} &= F_{,ik1}\sigma_1 + F_{,ik2}\sigma_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6.2}$$

En esta forma, el carácter tensorial de las dos primeras ecuaciones se revela con claridad, introduciendo las derivadas absolutas o invariantes de CRISTOFFEL (*) A_{jkl} de un tensor A_{jk}, cuyas expresiones son

$$\begin{aligned} A_{jkl} &= A_{jk,l} + \sum_s A_{sk}\, a_{sjl} + \sum A_{js}\, a_{skl} \\ d\mathfrak{a}_j &= \sum_k \mathfrak{a}_k \tau_{jk}; \quad \tau_{jk} = a_{jkl}\sigma_l; \quad \tau_{jk} + \tau_{kj} = 0; \quad a_{jkl} + a_{kjl} = 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

(*) Véase BLASCHKE [3], pág. 89.

y que en nuestro caso, las cantidades τ_{jk}, a_{jkl}, tomarán los valores

$$\tau_{11} = \tau_{22} = 0\,; \ \tau_{12} = -\,\tau_{21} = \omega_3 = g_1\sigma_1 + g_2\sigma_2 \tag{6.4}$$

$$a_{111} = a_{112} = a_{221} = a_{222} = 0; \ \ a_{121} = -\,a_{211} = g_1; \ \ a_{122} = -\,a_{212} = g_2$$

con lo que las ecuaciones (6.2) se escriben en nuestro caso aplicadas al tensor $A_{jk} = tN_{ik}$

$$\begin{aligned} (t\,N_{11})_{\bar{1}} &= (t\,N_{11})_{,1} - 2g_1\,t\,N_{21} \\ (t\,N_{12})_{\bar{1}} &= (t\,N_{12})_{,1} - g_1\,t\,N_{22} + g_1\,t\,N_{11} \\ (t\,N_{12})_{\bar{2}} &= (t\,N_{12})_{,2} - g_2\,t\,N_{22} + g_2\,t\,N_{11} \\ (t\,N_{22})_{\bar{2}} &= (t\,N_{22})_{,2} + 2\,g_2\,t\,N_{12} \end{aligned} \tag{6.5}$$

donde los índices sobrerrayados indican derivadas absolutas; con esto las dos primeras ecuaciones de equilibrio se escriben

$$\begin{aligned} (t\,N_{11})_{\bar{1}} + (t\,N_{12})_{\bar{2}} &= f_1 \\ (t\,N_{21})_{\bar{1}} + (t\,N_{22})_{\bar{2}} &= f_2 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Todavía, introduciendo el operador *divergencia* (*)

$$\mathrm{Div}_i\ A_{ik} = \textstyle\sum_i A_{ik\bar{i}}$$

las ecuaciones anteriores pueden escribirse en la forma

$$\mathrm{Div}_i\ (tN_{ik}) = f_k, \qquad k = 1{,}2 \tag{6.7}$$

Con esto queda claro el carácter intrínseco de estas dos primeras condiciones de equilibrio, que son una perfecta generalización de las ecuaciones de equilibrio de la teoría de la elasticidad plana o de dos dimensiones(**).

En cuanto a la tercera ecuación de (6.1), se puede ver que tiene también carácter tensorial, sin más que observar que al cambiar el haz fundamental de líneas coordenadas sobre la superficie S, mediante el giro (2.6), con lo que se cambian los pfaffianos fundamentales

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= \sigma_1 \cos\alpha + \sigma_2 \operatorname{sen}\alpha & \omega_1^* &= \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \operatorname{sen}\alpha \\ \sigma_2^* &= -\,\sigma_1 \operatorname{sen}\alpha + \sigma_2 \cos\alpha & \omega_2^* &= -\,\omega_1 \operatorname{sen}\alpha + \omega_2 \cos\alpha \end{aligned} \tag{6.8}$$

(*) Véase BRILLOUIN [6], pág. 115.
(**) Véase TIMOSCHENKO [7], pág. 22; TORROJA, [8] pág. 93.

las cantidades c_{ik}, experimentarán, en virtud de (4.4) el cambio

$$
\begin{aligned}
c^*_{11} &= c_{11} \cos^2\alpha + 2\,c_{12} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + c_{22} \operatorname{sen}^2\alpha \\
c^*_{21} = c^*_{12} &= -\,c_{11} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + c_{12}\,(-\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + c_{22} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \\
c^*_{22} &= c_{11} \operatorname{sen}^2\alpha - 2\,c_{12} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + c_{22} \cos^2\alpha \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

lo que prueba que tales cantidades c_{ik}, constituyen las componentes de un tensor simétrico.

Con esto la tercera ecuación de (6.1) puede escribirse en la forma

$$\Sigma_{ik}\, c_{ik}\,(t\,N_{ik}) = -\,f_3 \qquad (6.10)$$

y el primer miembro es propiamente un producto contractado de tensores. Pero al revés de lo que ocurre con las (6.7) esta ecuación tiene carácter extrínseco, puesto que el tensor de BLASCHKE c_{ik}, equivale según (4.4) al par de pfaffianos ω_1, ω_2, y caracteriza por tanto la forma de la superficie S en el espacio, independientemente de su posición en él, entre todas las posibles superficies que posean idéntica métrica de RIEMANN definida por los pfaffianos fundamentales σ_1, σ_2. Es de notar también que la componente normal f_3, se comporta como un escalar desde el punto de vista de la geometría intrínseca a la superficie S.

En el caso en que el tensor c_{ik} sea idénticamente nulo, es decir, $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv 0$; $d\,\mathfrak{a}_3 = 0$, por tanto, la superficie S es un plano, y para que pueda existir un estado de tensiones de membrana debe ser $f_3 = 0$, es decir, las fuerzas exteriores han de ser paralelas al plano S. Caso de que así suceda las ecuaciones coinciden con las de elasticidad plana.

7. Sistemas de referencia particulares. Membranas desarrollables. Las condiciones de equilibrio (5.4), pueden simplificarse algo mediante elección conveniente del sistema de curvas fundamentales $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, sobre la superficie S. Si uno de los haces, p. ej., $\sigma_1 = 0$, está formado por curvas geodésicas, entonces la curvatura geodésica de las mismas es nula $g_2 = 0$.

En cambio si se elige como sistema de referencia, el de las líneas de curvatura de la superficie, entonces las cantidades c_{ik} toman los valores

$$c_{11} = -\frac{1}{r_1}\,; \qquad c_{12} = c_{21} = 0\,; \qquad c_{22} = -\frac{1}{r_2} \qquad (7.1)$$

donde r_1, r_2 son los radios de curvatura de las secciones normales tangentes a aquellas líneas; entonces, la tercera ecuación de (5.2) se escribe

$$t\left(\frac{N_{11}}{r_1} + \frac{N_{22}}{r_2}\right) = f_3 \tag{7.2}$$

de fácil interpretación: la componente normal de la fuerza exterior ha de equilibrarse con las tensiones que actúan dentro de la membrana perpendicularmente a las líneas de curvatura, y proporcionalmente a las curvaturas de la membrana en la dirección de estas líneas; lo que concuerda con la idea intuitiva de que cuanto mayor sea la curvatura de la membrana, menores serán las tensiones internas que corresponden a iguales fuerzas exteriores normales.

La mayor simplificación se consigue tomando los dos haces fundamentales $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, ambos formados por curvas geodésicas; pero esto puede conseguirse tan sólo en el caso de superficies desarrollables (*); en una tal superficie podemos tomar como haz $\sigma_2 = 0$ el de las generatrices, y el $\sigma_1 = 0$ será el de sus trayectorias ortogonales; ambos haces son de curvas geodésicas, pues son rectas después del desarrollo; pero además en este caso son las líneas de curvatura de la superficie S; además $\frac{1}{r_1} = 0$, puesto que el haz $\sigma_2 = 0$ está formado por rectas; en definitiva, con estas simplificaciones el sistema (5.2) se escribe

$$\begin{aligned} t\,(N_{11,1} + N_{21,2}) + t_1 N_{11} + t_2 N_{12} &= f_1 \\ t\,(N_{12,1} + N_{22,2}) + t_1 N_{12} + t_2 N_{22} &= f_2 \\ \frac{t\,N_{22}}{r_2} &= f_3 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Todavía se pueden abreviar las notaciones, teniendo en cuenta (6.2) con lo que las ecuaciones (7.3) pueden escribirse

$$\begin{aligned} (t\,N_{11})_{,1} + (t\,N_{12})_{,2} &= f_1 \\ (t\,N_{12})_{,1} + (t\,N_{22})_{,2} &= f_2 \\ \frac{t\,N_{22}}{r_2} &= f_3 \end{aligned} \tag{7.4}$$

(*) Ver BLASCHKE [2], § 51, pág. 63.

Todavía multiplicando la primera por σ_2, la 2.ª por σ_1, y sumando

$$d\,(t\,N_{12}) = (f_1 - (tN_{11})_{,1})\,\sigma_2 + (f_2 - (t\,N_{22})_{,2})\,\sigma_1 \tag{7.5}$$

y por diferenciación exterior de los dos miembros, teniendo en cuenta (4.3) y $g_1 = g_2 = 0$

$$[df_1 - d\,(t\,N_{11})_{,1},\ \sigma_2] + [df_2 - d\,(t\,N_{22})_{,2},\ \sigma_1] = 0 \tag{7.6}$$

y en virtud de (6.3),

$$(t\,N_{11})_{,11} - (t\,N_{22})_{,22} = f_{1,1} - f_{2,2} \tag{7.7}$$

Recíprocamente, verificada esta condición, o su equivalente (7.6), el 2.º miembro de (7.5) será una diferencial exacta, y esta ecuación permite determinar N_{12}; en definitiva el sistema (7.4) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} N_{22} &= \frac{r_2\,f_3}{t}; \\ (t\,N_{11})_{,11} &= f_{1,1} - f_{2,2} + \left(\frac{r_2\,f_3}{t}\right)_{,22} \\ d\,(t\,N_{12}) &= (f_1 - (t\,N_{11})_{,1})\,\sigma_2 + (f_2 - (t\,N_{22})_{,2})\,\sigma_1 \end{aligned} \tag{7.8}$$

8. Membranas con solo presiones en su interior. Consideremos ahora el caso particular de una membrana en la que los esfuerzos cortantes interiores sean nulos en cualquier dirección y en todos los puntos de S. Deberá verificarse $N_{12} = N_{21} = 0$ cualquiera que sea el sistema de referencia, es decir, en (2.7) deberá verificarse cualquiera que sea el ángulo α

$$N_{12} = N_{21} = N^*_{12} = N^*_{21} = 0$$

luego como consecuencia

$$N_{11} = N_{22} = \Phi$$

será una función que dependerá solamente del punto considerado. El tensor de tensiones es ahora

$$\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12} & N_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}$$

que viene definido por la magnitud Φ que puede ahora considerarse como un escalar.

Las ecuaciones de equilibrio (5.2) se escribirán ahora

$$\begin{aligned} t\,\Phi_1 + t_1\,\Phi &= f_1 \\ t\,\Phi_2 + t_2\,\Phi &= f_2 \\ -\,t\,(c_{11} + c_{22})\,\Phi &= f_3 \end{aligned} \tag{8.1}$$

en las que se ha designado

$$d\,\Phi = \Phi_1\,\sigma_1 + \Phi_2\,\sigma_2 \tag{8.2}$$

Las dos primeras ecuaciones de (8.1) pueden resumirse en una sola de fácil interpretación: multiplicando la primera por σ_1 la segunda por σ_2 y sumando

$$d\,(t\,\Phi) = f_1\,\sigma_1 + f_2\,\sigma_2 = (\mathfrak{f},\, d\,\mathfrak{x})\,; \tag{8.3}$$

aquí el primer miembro es una diferencial exacta, luego también ha de serlo el segundo

$$(\mathfrak{f},\, d\,\mathfrak{x}) = d\,U \tag{8.4}$$

Esta expresión tiene una clara interpretación física, es el trabajo elemental de las fuerzas exteriores, que según lo visto ha de ser una diferencial exacta; o lo que es lo mismo, *sobre la superficie S existe una función de fuerzas U, cuyo gradiente coincide con la componente tangencial de la fuerza exterior; este potencial es el producto del espesor t por el escalar Φ antes definido*, salvo claro está, la constante aditiva que siempre figura indeterminada en todo potencial.

Las curvas equipotenciales $U =$ constante, serán precisamente las $\Phi\,t =$ constante; la componente tangencial de la fuerza exterior irá siempre dirigida normalmente a estas curvas. En el caso en que no existe componente tangencial de la fuerza exterior, entonces el trabajo elemental es constantemente nulo $d\,U = 0$, y como consecuencia $t\,\Phi =$ constante. Este es el caso, por ej., de la pared de un depósito de almacenaje de fluidos en el que se considere despreciable el peso propio.

En cuanto a la tercera ecuación de (8,1), introduciendo la curvatura media de S

$$2\,H = -\,(c_{11} + c_{22})$$

puede escribirse

$$2\,H t = f_3 \tag{8.5}$$

De la relación (8.3) se deduce inmediatamente una condición de compatibilidad necesaria para que pueda producirse en la membrana un estado de tensiones del tipo que ahora venimos considerando ($N_{12} = 0$). En efecto, diferenciando externamente (8.3), y expresando

$$df_i = f_{i,1}\sigma_1 + f_{i,2}\sigma_2 \tag{8.6}$$

obtenemos

$$(f_{1,2} - f_{2,1})\,[\sigma_1, \sigma_2] + f_1\,d\sigma_1 + f_2\,d\sigma_2 = 0$$

y en virtud de (4.4)

$$f_{1,2} - f_{2,1} + f_1 g_1 + f_2 g_2 = 0 \tag{8.7}$$

condición en la que solo intervienen las fuerzas exteriores y la forma de la superficie a través de g_1, g_2.

Otras dos condiciones de compatibilidad, pueden obtenerse inmediatamente diferenciando (8.5).

$$2\,t\Phi\,dH + 2\,H\,d\,(t\Phi) = df_3$$

y en virtud de (7.3), (7.6) y expresando

$$dH = H_{,1}\sigma_1 + H_{,2}\sigma_2 \tag{8.8}$$

se obtiene

$$(2\,t\Phi\,H_{,1} + 2\,Hf_1)\,\sigma_1 + (2\,t\Phi\,H_{,2} + 2\,Hf_2)\,\sigma_2 = f_{3,1}\sigma_1 + f_{3,2}\sigma_2$$

y en virtud de la independencia de σ_1, σ_2, y de (8.5)

$$f_{3,1}H = f_3 H_{,1} + 2\,H^2 f_1, \qquad f_{3,2}H = f_3 H_{,2} + 2\,H^2 f_2 \tag{8.9}$$

La obtención de estas condiciones de compatibilidad (8.7), (8.9), puede deducirse de la teoría general de los sistemas diferenciales (*), en la forma usual en aquella teoría. El sistema diferencial del estado de tensiones puede resumirse

$$\begin{aligned} d\,(t\Phi) &= f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 \\ 2\,Ht\Phi &= f_3 \end{aligned} \tag{8.10}$$

(*) Véase Cartan [4], págs. 50 y sig.

sistema al que hay que añadir, según aquella teoría, las ecuaciones obtenidas de éstas por diferenciación exterior

$$0 = (f_{1,2} - f_{2,1} + f_1 g_1 + f_2 g_2)\,[\sigma_1, \sigma_2]$$
$$(2\,t\Phi\, H_{,1} + Hf_1)\,\sigma_1 + (2\,t\Phi\, H_{,2} + 2\,Hf_2)\,\sigma_2 = f_{3,1}\sigma_1 + f_{3,2}\sigma_2 \qquad (8.11)$$

ecuaciones que coinciden con las obtenidas anteriormente. El sistema formado por las ecuaciones (8.10), (8.11) será un sistema cerrado, al que se le puede aplicar la teoría general en el caso de que las funciones sean analíticas. En especial, las condiciones de compatibilidad (8.11) además de necesarias son suficientes, y caso de quedar satisfechas se pueden aplicar los teoremas de existencia de CARTAN y concluir por tanto la existencia de un estado de tensiones en las condiciones exigidas.

Estos resultados de carácter general en el caso de funciones analíticas, se pueden demostrar aquí con facilidad directamente, y substituyendo además la condición de ser analíticas las funciones que intervienen por la menos restrictiva de que sean diferenciables por tratarse de un caso particular sumamente sencillo.

En efecto, supuestas verificadas las condiciones (8.11) la segunda de ellas implica la coincidencia del $d(t\Phi)$ deducido de la segunda ecuación de (8.10) con el dado por la primera de allí (8.10) con lo que ésta

$$t\,\Phi = \frac{f_3}{2\,H} \qquad (8.12)$$

satisface a todas las condiciones del problema. En conclusión (8.7) y (8.9) *expresan las condiciones necesarias y suficientes, para que las tensiones interiores sean sólo presiones o tracciones, es decir* $N_{12} = 0$. En este caso, el estado de tensiones Φ y el espesor t vienen ligados por la sola condición (8.12).

El caso particular en que se desee que la función Φ se reduzca a una constante, como ocurre en multitud de aplicaciones (tensión superficial en los líquidos, estructuras de cemento delgadas y por tanto débiles frente a esfuerzos cortantes), ha sido estudiado por nosotros en un trabajo anterior (*). La mayoría de resultados allí obtenidos están generalizados en este número al caso en que se prescinde de la hipótesis de que Φ sea constante. Añadiendo esta con-

(*) Véase AUGÉ [5].

dición, se obtienen los resultados allí consignados, salvo cambios de notación:

$$\Phi = \text{constante}, \qquad \Phi_1 = \Phi_2 = 0$$

$$t_1\Phi = f_1, \quad t_2\Phi = f_2, \quad 2\,Ht\Phi = f_3, \quad \Phi\,dt = dU \tag{8,13}$$

En particular si $f_3 = 0$, es decir, las fuerzas exteriores no tienen componente normal a la membrana, el equilibrio exige $H = 0$, es decir, la anulación de la curvatura media, por lo cual la superficie S de la membrana será una superficie mínima, de acuerdo con la idea intuitiva de lo que sucede en las membranas de jabón, o en general en las debidas a la tensión superficial de los líquidos.

9. Forma paramétrica de las ecuaciones de equilibrio. Cuando la superficie S está dada en forma paramétrica $\mathfrak{y}\,(u,\ v)$, es decir, dada por un vector dependiente de los dos parámetros u, v, es fácil expresar las condiciones de equilibrio tomando como variables independientes a estos dos parámetros. Basta para ello, partir de las expresiones de los dos pfaffianos fundamentales σ_1, σ_2:

$$\sigma_i = p_i\,(u,\ v)\,du + q_i\,(u,\ v)\,dv\,; \tag{9.1}$$

entonces, de la relación

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv = F_{,1}\sigma_1 + F_{,2}\sigma_2$$

se deducen las fórmulas de cambio

$$\frac{\partial F}{\partial u} = F_{,1}\,p_1 + F_{,2}\,p_2 \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = F_{,1}\,q_1 + F_{,2}\,q_2 \tag{9.2}$$

y las inversas

$$F_{,1} = \frac{1}{\Delta}\,(F_u\,q_2 - F_v\,p_2), \qquad F_{,2} = \frac{1}{\Delta}\,(-\,q_1\,F_u + p_1\,F_v),$$
$$\Delta = p_1\,q_2 - p_2\,q_1 \tag{9.3}$$

También estas fórmulas de cambio pueden escribirse de otro modo equivalente, teniendo en cuenta (6.2) :

$$\begin{aligned} &du = u_{,1}\sigma_1 + u_{,2}\sigma_2, \qquad dv = v_{,1}\sigma_1 + v_{,2}c_2 \\ &F_{,i} = F_u u_{,i} + F_v v_{,i}, \qquad i = 1,2 \\ &u_{,1} = \frac{q_2}{\Delta}, \quad u_{,2} = -\frac{q_1}{\Delta}, \quad v_{,1} = -\frac{p_2}{\Delta}, \quad v_{,2} = \frac{p_1}{\Delta} \end{aligned} \tag{9.4}$$

De manera parecida podrían obtenerse las expresiones de las derivadas de orden superior $F_{,ik}$, $F_{,ikj}$, ... en función de las F_{uu}, F_{uv}, ..., que no escribimos porque no hemos de hacer uso de las mismas en el presente trabajo.

Aplicando estos cambios a las dos primeras ecuaciones de equilibrio (6.1), nos adoptarán la forma

$$\begin{aligned} &(tN_{11})_u u_{,1} + (tN_{11})_v v_{,1} + (tN_{12})_u u_{,2} + (tN_{12})_v v_{,2} + \\ &\quad + g_2 t(N_{11} - N_{22}) - 2g_1 tN_{12} = f_1 \\ &(tN_{12})_u u_{,1} + (tN_{12})_v v_{,1} + (tN_{22})_u u_{,2} + (tN_{22})_v v_{,2} + \\ &\quad + g_1 t(N_{11} - N_{22}) + 2g_2 tN_{12} = f_2 \\ &c_{11}(tN_{11}) + 2c_{12}(tN_{12}) + c_{22}(tN_{22}) = -f_3 \end{aligned} \tag{9.5}$$

También la última ecuación puede transformarse expresando las componentes del tensor c_{ik} en función de los parámetros u, v, cosa que no podrá ahora conseguirse con las expresiones solas de σ_1, σ_2, por no tener la tercera ecuación carácter intrínseco. No especificamos más por no tenernos utilidad para los casos a los que haremos aplicación.

En el caso particular de una membrana desarrollable, tomando como haz $\sigma_2 = 0$ el de las generatrices, las ecuaciones (7.4) se transforman en

$$\begin{aligned} &(tN_{11})_u u_{,1} + (tN_{11})_v v_{,1} + (tN_{12})_u u_{,2} + (tN_{12})_v v_{,2} = f_1 \\ &(tN_{12})_u u_{,1} + (tN_{12})_v v_{,1} + (tN_{22})_u u_{,2} + (tN_{22})_v v_{,2} = f_2 \\ &tN_{22} = r_2 f_3 \end{aligned} \tag{9.6}$$

Veamos ahora como de estas fórmulas se obtienen en particular las consignadas en los tratados para los casos más extensamente estudiados.

10. Membranas cilíndricas. Suponemos ahora que la superficie media S de la membrana es un cilindro; elegimos como líneas coordenadas, de acuerdo con la teoría del n.º 7, las generatrices como curvas

$\sigma_2 = 0$, y las directrices normales a ellas como curvas $\sigma_1 = 0$. Tomamos como parámetros, el ángulo φ del plano tangente con uno fijo (en muchos casos el horizontal), que será también el ángulo de las normales, y la distancia x a una directriz fija, tomada sobre las generatrices.

Con estos parámetros φ, x, el elemento lineal se expresa

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_1\,dx + \mathfrak{a}_2\,r\,d\varphi, \qquad \sigma_1 = dx, \qquad \sigma_2 = r\,d\varphi \tag{10.1}$$

con lo que se calculan las cantidades de (9.3), (9.4), llamando ahora, además, $r_2 = r$, puesto que $r_1 = \infty$ y no hay confusión:

$$u = x\,; \quad v = \varphi, \quad p_1 = 1, \quad q_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad q_2 = r, \quad \Delta = r$$
$$u_{,1} = 1, \quad u_{,2} = 0, \quad v_{,1} = 0, \quad v_{,2} = \frac{1}{r} \tag{10.2}$$

con lo cual, las ecuaciones de equilibrio (9.6) se escriben

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(t N_{11}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(t N_{12}) &= f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x}(t N_{12}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(t N_{22}) &= f_1 \\ \frac{t N_{22}}{r} &= f_3 \end{aligned} \tag{10.3}$$

que coinciden con las ecuaciones más frecuentemente usadas en los tratados, siempre que se tenga en cuenta el signo de las tensiones N_{ik}, que puede o no coincidir con el que hemos dado en el n.º 2.

Estudiemos en particular el caso tratado en el n.º 8, en el que no existen esfuerzos cortantes en ninguna dirección, $N_{12} = N_{12}^* = 0$, $N_{11} = N_{22} = \Phi$. Las ecuaciones (8.10), (8.11), se escriben, teniendo en cuenta (10.2), (9.4), $2H = \frac{1}{r}$, $2H_1 = 0$, $2H_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{1}{r}$

$$\begin{aligned} d(t\Phi) &= f_1\,dx + f_2\,r\,d\varphi \\ t\Phi &= r f_3 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} &= \frac{1}{r} f_1 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f_3}{\partial \varphi} &= f_3 \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{1}{r} + f_2 \frac{1}{r} \end{aligned} \tag{10.4}$$

Las dos primeras ecuaciones son las que sustituyen ahora a las (10.3) ; *las tres últimas* son las condiciones de compatibilidad, que no afectan a la presión Φ ni al espesor t : *dan las condiciones necesarias y suficientes para que bajo las fuerzas f_i el estado de tensiones generado, contenga solo presiones.*

Consideremos en particular, el caso de mayor interés en las membranas cilíndricas : las fuerzas exteriores no dependen de x

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{10.5}$$

entonces la penúltima ecuación obliga a $f_1 = 0$, y el sistema (10.4) se reduce a

$$\begin{aligned} t\Phi &= rf_3 \\ \frac{d}{d\varphi}(rf_3) &= rf_2 \end{aligned} \tag{10.6}$$

Aquí la segunda ecuación es la de compatibilidad ; la primera determina el estado de tensiones.

Veamos, por ejemplo, con detalle el caso en que la sola fuerza exterior es el peso propio, siendo la membrana de material homogéneo y con las generatrices horizontales :

$$f_3 = -kt \cos \varphi \qquad f_2 = kt \operatorname{sen} \varphi \tag{10.7}$$

donde k es el peso específico constante del material ; la 2.ª ecuación de (10.6)

$$\frac{d}{d\varphi}(-ktr \cos \varphi) = krt \operatorname{sen} \varphi$$

se reduce a

$$\frac{d}{d\varphi}(tr) = 0$$

o bien

$$tr = c \quad \text{(constante)} \tag{10.8}$$

y la primera ecuación de (10.6) nos da

$$\Phi = -rk \cos \varphi \tag{10.9}$$

que define completamente la distribución de tensiones en el interior de la membrana.

En el caso en que se desee obtener una distribución de presiones $\Phi(\varphi)$ prefijada de antemano, la última ecuación (10.9) nos da la ecuación intrínseca de la curva directriz; para obtener su ecuación cartesiana, basta sustituir el valor del radio de curvatura r y del ángulo φ

$$r = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

con lo que se obtiene la ecuación diferencial de la curva meridiana

$$y'' + \frac{k}{\Phi}(1+y'^2) = 0 \tag{10.10}$$

Integrando esta ecuación, y tomando como condiciones iniciales

$$y(0) = y'(0) = 0$$

se obtiene para la ecuación de la curva meridiana

$$y(x) = -\int_0^x \operatorname{tg}\left(k\int_0^x \frac{dx}{\Phi}\right)dx \tag{10.11}$$

En particular, si se desea una presión uniforme en toda la membrana (*), determinada por la resistencia del material a la compresión, entonces Φ debe tomarse constante igual a esta resistencia, y la curva meridiana será

$$y = \frac{\Phi}{k}\log\cos\frac{kx}{\Phi}$$

El espesor t, viene dado entonces por (10.8), de la que se deduce

$$t = -\frac{ck}{\Phi}\cos\varphi = -\frac{ck}{\Phi}e^{\frac{ky}{\Phi}} \qquad c = -\frac{t_0\Phi}{k}$$

donde t_0 es el espesor en el origen de coordenadas, y en definitiva

$$t = t_0 e^{\frac{ky}{\Phi}}$$

es decir, t sigue una ley exponencial en función de la altura.

(*) Véase Augé [5].

La anchura máxima L cubierta por una bóveda continua de la forma que estudiamos, vendrá dada por

$$\frac{kL}{\Phi} < \pi$$

es decir

$$L < \frac{\pi \Phi}{k}$$

siendo Φ la resistencia del material a la compresión.

11. Membranas de revolución. Como segundo caso particular estudiemos aquel en que la superficie S es de revolución. Tomaremos como haz fundamental de curvas coordenadas, el formado por los meridianos ($\sigma_2 = 0$) y paralelos ($\sigma_1 = 0$). La curvatura geodésica g_1 será nula, porque los meridianos son geodésicas, y por ser meridianos y paralelos las líneas de curvatura de la superficie S, se verificará (7.1)

$$c_{11} = -\frac{1}{r_1}, \qquad c_{12} = c_{21} = 0, \qquad c_{22} = -\frac{1}{r_2} \tag{11.1}$$

donde r_1 es el radio de curvatura del meridiano, y r_2 el segmento de normal limitado por el eje de rotación. Entonces las ecuaciones (6.1) se escriben:

$$\begin{aligned} (t N_{11})_1 + (t N_{12})_2 + g_2 t (N_{11} - N_{22}) &= f_1 \\ (t N_{12})_1 + (t N_{22})_2 + 2 g_2 t N_{12} \qquad &= f_2 \\ \frac{t N_{11}}{r_1} + \frac{t N_{22}}{r_2} &= f_3 \end{aligned} \tag{11.2}$$

Tomemos, además, como parámetro u la longitud de arco S de meridiano, y como v el ángulo θ del plano meridiano respecto de otro plano meridiano fijo. Las relaciones (9.1) se escriben ahora

$$\sigma_1 = ds, \qquad \sigma_2 = r d\theta \tag{11.3}$$

donde r es el radio del paralelo; llamando φ al ángulo de la normal con el eje de rotación

$$r = r_2 \operatorname{sen} \varphi, \quad \frac{1}{g_2} = r_2 \operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{\cos \varphi}, \quad \frac{dr}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{\partial r_1}{\partial \theta} = \frac{\partial r_2}{\partial \theta} = 0 \tag{11.4}$$

Las cantidades (9.4) valdrán ahora

$$\begin{array}{lllll} p_1 = 1, & q_1 = 0, & p_2 = 0, & q_2 = r, & \Delta = r \\ u_{,1} = 1, & u_{,2} = 0, & v_{,1} = 0, & v_{,2} = \dfrac{1}{r} & \end{array} \qquad (11.4)$$

con lo cual las ecuaciones (11.2) toman la forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s}(tN_{11}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(tN_{12}) + \frac{t\cos\varphi}{r}(N_{11} - N_{22}) = f_1 \\ &\frac{\partial}{\partial s}(tN_{12}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(tN_{22}) + \frac{2t\cos\varphi}{r}N_{12} = f_2 \\ &\qquad\qquad \frac{tN_{11}}{r_1} + \frac{tN_{22}}{r_2} = f_3 \end{aligned} \qquad (11.5)$$

o bien multiplicando por r, teniendo en cuenta (11.4), las dos primeras pueden sustituirse por

$$\frac{\partial}{\partial s}(rtN_{11}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(tN_{12}) - tN_{22}\cos\varphi = rf_1$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(rtN_{12}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(tN_{22}) + tN_{12}\cos\varphi = rf_2$$

que es la forma usual contenida en los tratados, siempre que el signo de las tensiones sea el que hemos elegido en el n.º 2.

No continuamos tratando estos casos contenidos en los tratados siendo suficientes estos ejemplos para ver cómo pueden aplicarse estos métodos a los problemas clásicos de membranas.

SEMINARIO MATEMÁTICO DE BARCELONA

BIBLIOGRAFÍA

[1] FLÜGGE, W., *Statik und Dynamik der Schalen.* Zweite Auflage. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1957.

[2] BLASCHKE, W., *Einführung in die Differentialgeometrie.* Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1950.

[3] BLASCHKE, W., *Über Riemanngeometrie,* Col-lectanea Mathematica, V. III, Fasc. 1. Barcelona, 1950, págs. 73-104.

[4] CARTAN, E., *Les systémes differentielles exterieures et leurs applications geometriques.* Actualités Scientifiques et Industrielles. Paris, 1945.

[5] AUGÉ, J., *Membranas elásticas con solo presiones en su interior.* Informes de la construcción n.º 54,445-3. Madrid, 1953.

[6] BRILLOUIN, L., *Les tenseurs en Mécanique et en Élasticité.* Cours de Phisyque Théorique, 2.ª ed. Masson et C.ie París, 1949.

[7] TIMOSCHENKO. *Théorie de l'Elasticité.* Traducción de la 1.ª edición inglesa. París et Liége, 1936.

[8] TORROJA, E., *Lecciones elementales de Elasticidad con aplicación a la Técnica de la construcción.* 2.ª edición. Madrid, 1951.

[9] BLASCHKE, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie I,* dritte Auflage. Berlin, 1930.

[10] EINSENHARD, L. P. *An Introduction to differential Geometry with use of the tensor Calculus.* Princeton, 1947.

[11] WLASSOW, W. S., *Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik* (Traducción del Ruso), Akademie-Verlag. Berlin, 1958.