

DUÄLITÄT IN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN

von

KARLHEINZ RÜDIGER

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit einem Kegel stetiger (F) -Halbnormen (s. 1) auf topologischen Vektorräumen. Das Ziel dabei ist, Charakterisierungen von speziellen topologischen Vektorräumen mit Hilfe von Elementen dieses Kegels anzugeben. Dazu entwickeln wir zuerst eine allgemeine «Dualitätstheorie» für topologische Vektorräume (s. 2). In 3. beschäftigen wir uns mit ultratoponnelierten und quasiluatoponnelierten Räumen und zeigen, daß man für diese Raumklassen ähnliche Charakterisierungen angeben kann, wie sie für die entsprechenden lokalkonvexen Raumklassen bekannt sind. In 4. entwickeln wir eine Dualitätstheorie für lineare Abbildungen, wie man sie von G. Köthe in (5) und (9) für lokalkonvexe Räume findet. Schließlich geben wir in 5. eine Charakterisierung der nicht notwendigerweise lokalkonvexen B - und B_r -vollständigen Räume an. Bemerken möchten wir, daß alle topologischen Vektorräume separiert sein sollen, sofern es nicht anders ausdrücklich gesagt wird.

Herrn Professor Dr. N. Adasch möchte ich für die Anregung und Unterstützung zu dieser Arbeit danken.

1. (F) -HALBNORMEN AUF LINEAREN RÄUMEN

DEFINITION: E sei ein linearer Raum über dem Körper $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{C}$ oder $\mathbf{R}$). Eine Abbildung $q: E \rightarrow \mathbf{R}$ heißt (F) -Halbnorm auf E , wenn sie den folgenden Bedingungen genügt: (a) $q(x) \geq 0$, (b) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$, (c) $q(ax) \leq q(x)$ für $|a| \leq 1$, (d) $q(sx) \rightarrow 0$ für $s \rightarrow 0$. q heißt (F) -Norm, wenn aus $q(x) = 0$ stets $x = 0$ folgt.

Mit $E^\#$ bezeichnen wir die Menge aller (F) -Halbnormen auf E . $E^\#$ ist ein Kegel im reellen linearen Raum aller reellwertigen Funktionale auf E , d. h. $E^\#$ genügt den Bedingungen $E^\# + E^\# \subset E^\#$, $sE^\# \subset E^\#$ für $s > 0$, $E^\# \cap (-E^\#) = \{0\}$.

(F)-Halbnormen auf einem linearen Raum haben folgende Eigenschaften die sofort aus ihrer Definition folgen:

(1) (a) $|q(x) - q(y)| \leq q(x - y)$ (b) $q(nx) \leq nq(x)$ für $n \in \mathbf{N}$ und somit (c) $\frac{1}{n} q(x) \leq q\left(\frac{x}{n}\right)$ (d) aus $q(x) = 0$ folgt $q(x + y) = q(y)$ (e) für jedes $s \in \mathbf{R}$ gilt: $q(sx) \leq (|s| + 1) q(x)$.

$E(\mathcal{T})$ sei ein topologischer Vektorraum (Abk.: TVR). Wir wollen einen Zusammenhang zwischen stetigen (F)-Halbnormen auf E und der linearen Topologie $\mathcal{T}$ herstellen. Die folgenden Begriffe sind für die gesamte Arbeit von Bedeutung. Eine Folge (U_i) von Teilmengen des TVR heißt *Faden*, wenn jedes U_i kreisförmig ist, und wenn $U_{j+1} + U_{j+1} \subset U_j$ gilt für jedes $j \in \mathbf{N}$. Der Faden (U_i) heißt absorbierend bzw. abgeschlossen bzw. gefräßig bzw. topologisch, wenn jedes U_j absorbierend bzw. abgeschlossen bzw. alle beschränkten Mengen absorbiert bzw. Nullumgebung ist. Ein absorbierender und abgeschlossener Faden heißt Ultratonne.

(2) $E(\mathcal{T})$ sei ein TVR. Dann kann die lineare Topologie durch eine Familie $\mathcal{T}$ -stetiger (F)-Halbnormen erzeugt werden (vgl. (11), (14)).

Beweis: Sei (U_i) ein topologischer Faden und r eine positive dyadische Zahl: $r = k + a_1 2^{-1} + \dots + a_n 2^{-n} + \dots$ mit $a_i = 0$ oder 1. Man setze: $U_0^{(k)} = \bar{U}_0 + \dots + \bar{U}_0$ (k -mal). Sei $U(r) = U_0^{(k)} + \sum_i a_i \bar{U}_i$ (dabei wird unter $\sum_i a_i U_i$ stets $\bigcup_{m \in \mathbf{N}} \sum_{j=1}^m a_j U_j$ verstanden). Für $x \in E$ definieren wir $p(x) = \{\inf r : x \in \overline{U(r)}\}$

Man sieht leicht ein, daß $p(x)$ eine stetige (F)-Halbnorm auf E ist. Aus der Konstruktion dieser (F)-Halbnorm folgt:

$$\left\{ x \in E : p(x) < \frac{1}{2^j} \right\} \subset U \subset \left\{ x \in E : p(x) \leq \frac{1}{2^j} \right\} = \bar{U}_j^{\mathcal{T}}$$

Die aus einem topologischen Faden so konstruierte (F)-Halbnorm nennen wir eine (KF)-Halbnorm.

2. TOPOLOGISCHE (F) -DUALSYSTEME, POLARITÄT UND DEREN EIGENSCHAFTEN.

$E(\mathcal{T})$ sei ein TVR. Mit $E^\#(\mathcal{T})$ bezeichnen wir den Kegel aller $\mathcal{T}$ -stetigen (F) -Halbnormen auf $E(\mathcal{T})$. Das Paar $(E(\mathcal{T}), E^\#(\mathcal{T}))$ (manchmal auch nur $(E, E^\#)$) nennen wir ein topologisches (F) -Dualsystem (Abk.: TFD). Es sei mit $L(E^\#) = E^\#(\mathcal{T}) - E^\#(\mathcal{T})$ der von dem Kegel $E^\#(\mathcal{T})$ erzeugte lineare Raum bezeichnet.

Für die weiteren Betrachtungen sind Eigenschaften von verschiedenen Polaritätsbegriffen bezüglich des Paares $(E, E^\#)$ fundamental.

DEFINITION: $(E, E^\#)$ sei ein TFD.

(a) Für $M \subset E$ bezeichne $M_L^0 = \{q \in L(E^\#): |q(x)| \leq 1 \text{ für jedes } x \in M\}$ die Polare von M in $L(E^\#)$ und $M^0 = M_L^0 \cap E^\#$ die Polare von M in $E^\#$.

(b) Für $D \subset E^\#$ bezeichne $D^0 = \{x \in E: q(x) \leq 1 \text{ für jedes } q \in D\}$ die Polare von D in E .

(c) Sei $\mathcal{U} = (U_i)$ ein Faden in E . Dann bezeichne $\mathcal{U}^{0F} = \left\{q \in E^\#: q|_{U_i} \leq \frac{1}{2^i}\right\}$ die Fadenpolare von $\mathcal{U}$ in $E^\#$.

(d) Für $D \subset E^\#$ heißt der Faden $D^{0K} = (D_i^0)$ mit $D_i^0 = \left\{x \in E: q(x) \leq \frac{1}{2^i} \text{ für jedes } q \in D\right\} = (2^i D)^0$ die Kegelpolare von D in E .

Die Polaritätsbegriffe (a) und (b) haben ähnliche Eigenschaften wie die Polarenbildungen in lokalkonvexen Räumen. Für die Polaritätsbegriffe (c) und (d) wollen wir einige Eigenschaften angeben, die sofort aus ihrer Definition folgen:

(1) $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in I}$ sei eine Familie von Fäden in E und $(D_\alpha)_{\alpha \in J}$ eine Familie von Teilmengen von $E^\#$. Dann gilt:

$$(a) ((\mathcal{U}_\alpha)^{0F})^{0K} = \mathcal{U}_\alpha^{0F} \quad (b) ((D_\alpha)^{0K})^{0F} = D_\alpha^{0K}$$

$$(c) \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha^{0F} \subset \left(\bigcap_\alpha \mathcal{U}_\alpha\right)^{0F}, \quad \left(\bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha\right)^{0F} = \bigcap_\alpha \mathcal{U}_\alpha^{0F}$$

$$(d) \left(\bigcup_\alpha D_\alpha\right)^{0K} = \bigcap_\alpha D_\alpha^{0K}$$

Wir geben zwei wichtige Beispiele für die Faden und Kegelpolarbildung:

(2) $D \subset E^\#$ sei ein Teilkegel. Dann ist $D^{0K0F} = D^{\perp\perp}$.

Beweis: Da D ein Teilkegel ist, gilt:

$$D_j^0 = \bigcap_{q \in D} \left\{ x \in E : q(x) \leq \frac{1}{2^j} \right\} = D^\perp = \bigcap_{q \in D} \{x \in E : q(x)\} = \{0\}$$

Es folgt:

$$D^{0K0F} = \left\{ q \in E : q|_{D^\perp} \leq \frac{1}{2^j}, j = 0, 1, \dots \right\} = D^{\perp\perp}$$

(3) M sei ein Teilraum von E . M besitzt in natürlicher Weise einen Faden, nämlich $M_j = M, j = 0, 1, \dots$. Dann ist M^{0F0K} ein «Teilraumfaden» von E und es gilt: $(M^{0F})_j^0 = M^{\perp\perp}$.

Beweis: Es ist $M^{0F} = \left\{ q \in E^\# : q|_{M_j} \leq \frac{1}{2^j}, j = 0, 1, \dots \right\} = M^\perp$. Da $M^\perp$ ein Teilkegel von $E^\#$ ist, folgt mit (2): $(M^{0F})_j^0 = M^{\perp\perp}$.

BEMERKUNG: Ist M ein Teilraum von E , so gilt $M^\perp \subset M^0$, wobei die Inklusion echt sein kann.

Es sei $(E, E^\#)$ ein TFD. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_s(E)$ die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $L(E^\#)$. Offensichtlich gilt:

(4) $(E, E^\#)$ sei ein TFD.

(a) Für $D \subset E^\#$ ist D^{0K} ein $\mathcal{T}$ -abgeschlossener Faden.

(b) Für $M \subset E$ ist $M^0 \mathcal{T}_s(E)$ -abgeschlossen.

(c) Ist $\mathcal{U} = (U_j)$ ein Faden in E , so ist $\mathcal{U}^{0F} \mathcal{T}_s(E)$ -abgeschlossen.

Es gelten die Bipolarensätze in der folgenden Form:

(5) (a) (Fadenbipolarensatz) Für jeden Faden $\mathcal{U} = (U_j)$ in E gilt:

$$\mathcal{U}^{0F0K} = \overline{\mathcal{U}}^{\mathcal{T}}, \text{ d. h. } (\mathcal{U}^{0F})_j^0 = \overline{U_j}^{\mathcal{T}}, j = 0, 1, \dots$$

(b) Für jede Teilmenge $M \subset E$ gilt: $M^{00} = \overline{KM}^{\mathcal{T}}$. Dabei bezeichnet KM die kreisförmige Hülle von M .

Beweis: (a) Stets gilt: $\overline{U_j} \subset (\mathcal{U}^{0F})_j^0$. Angenommen es gibt ein $x \in (\mathcal{U}^{0F})_j^0 \setminus \overline{U_j}$. Dann gibt es eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebung V mit $(x + V) \cap$

$\cap ((\mathcal{U}^{0F})_i^0 + V) = \phi$. Sei $\mathcal{V} = (V_j)$ ein zu $V_0 = V$ gehörender topologischer Faden. Man setze: $W_k = (\mathcal{U}^{0F})_k^0 + V_k$, $k = 0, 1, \dots$. Sei q_w die zu dem topologischen Faden $\mathcal{W} = (W_j)$ gehörende (KF) -Halbnorm. Dann gilt wegen $(x + V_j) \cap ((\mathcal{U}^{0F})_j^0 + V_j) = \phi$: $q_w(y) \leq \frac{1}{2^k}$ für $y \in (\mathcal{U}^{0F})_k^0$, $k = 0, 1, \dots$ und $q_w(x) > \frac{1}{2^j}$. Also ist $q_w \in \mathcal{U}^{0F}$ und somit $x \notin (\mathcal{U}^{0F})_j^0$.

(b) beweist man ähnlich wie (a).

Ein einfaches Beispiel zeigt, daß der Bipolarensatz (b) (und somit auch (a)) in der obigen entsprechenden Form für Teilmengen $D \subset E^\#$ nicht gelten kann. Sei $E = \mathbf{R}^1$ und $q(x) = \frac{2}{\pi} |\operatorname{Arctan} x|$. Es ist $q \in E^\#$, $\{q\}^0 = E$ und $q \not\supset \overline{C(o \cup \{q\})}^{\mathcal{T}_s(E)}$.

Es sei M bzw. $\mathcal{U} = (U_j)$ eine absorbierende Menge bzw. ein absorbierender Faden. Dann ist M^0 bzw. $\mathcal{U}^{0F} \mathcal{T}_s(E)$ -beschränkt. Denn ist $x \in E$, so gibt es $n \in \mathbf{N}$ mit $\frac{x}{n} \in M$. Also gilt für jedes $q \in M^0$:

$q\left(\frac{x}{n}\right) \leq 1$ und daher $\frac{1}{n} q(x) \leq 1$. Es folgt: $\frac{1}{n} M^0 \in \{x\}_L^0$. Aus $\mathcal{U}^{0F} \subset U_1^0$ folgt die Aussage über absorbierende Fäden. Andererseits braucht die Polare D^0 einer $\mathcal{T}_s(E)$ -beschränkten Menge $D \subset E^\#$ nicht absorbierend zu sein, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei $E = \mathbf{R}^1$ und $D \subset E^\#$ bestehe aus den folgenden (F) -Halbnormen: $p_n(x) = \frac{1}{\pi} |\operatorname{Arctan} nx|$. Wegen $p_n(x) \leq 2$ ist D $\mathcal{T}_s(E)$ -beschränkt, aber es gilt $D^0 = \{0\}$. Um dennoch lineare Topologien auf E vermöge der Kegelpolaren erzeugen zu können, schränken wir die Klasse der $\mathcal{T}_s(E)$ -beschränkten Mengen von $E^\#$ ein:

DEFINITION: $(E, E^\#)$ sei ein TFD. Eine Menge $D \subset E^\#$ heißt $\mathcal{T}_s(E)$ -homogenbeschränkt (Abk.: $\mathcal{T}_s(E)$ -h-beschränkt), wenn für jedes $x \in E$ gilt: $\lim_{s \rightarrow 0} \sup_{q \in D} q(sx) = 0$.

Das obige Beispiel zeigt, daß eine $\mathcal{T}_s(E)$ -beschränkte Menge nicht $\mathcal{T}_s(E)$ -h-beschränkt zu sein braucht, denn dort gilt: $p_n(x) = 1$ für $x = \frac{1}{n}$. Umgekehrt ist jede $\mathcal{T}_s(E)$ -h-beschränkte Menge $\mathcal{T}_s(E)$ -be-

schränkt. Einen Zusammenhang zwischen $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkten Mengen $D \subset E^\#$ und Ultratronnen $\mathcal{U} = (U_j)$ in E gibt:

(6) Die Kegelpolare D^{0K} einer $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkten Menge $D \subset E^\#$ ist eine Ultratronne. Die Fadenpolare $\mathcal{U}^{0F}$ einer Ultratronne $\mathcal{U} = (U_j)$ ist $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt.

Beweis: $D \subset E^\#$ sei $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt. Jedes D_j^0 ist $\mathcal{T}$ -abgeschlossen und kreisförmig. Ist $x \in E$, so gibt es $s \in \mathbf{R}$ mit $\sup_{p \in D} q(sx) \leq \frac{1}{2^j}$, also $sx \in D_j^0$. D^{0K} ist also eine Ultratronne.

Ist $\mathcal{U} = (U_j)$ eine Ultratronne in E , so gibt es zu jedem $x \in E$ $s \in \mathbf{R}$ mit $sx \in U_j$. Es folgt $q(sx) \leq \frac{1}{2^j}$ für jedes $q \in \mathcal{U}^{0F}$. Also ist $\mathcal{U}^{0F}$ $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt.

Gleichstetige Teilmengen $D \subset E^\#$ lassen sich mit Hilfe der Fadenpolaren wie folgt charakterisieren:

(7) Eine Teilmenge $D \subset E^\#$ ist genau dann gleichstetig, wenn es einen topologischen Faden $\mathcal{U}$ in E gibt mit $D \subset \mathcal{U}^{0F}$.

Beweis: $D \subset E^\#$ sei gleichstetig. Dann ist für jedes $j \in \mathbf{N}$ D_j^0 eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebung, $\mathcal{U} = (D_j^0)$ also ein topologischer Faden und es folgt: $D \subset \mathcal{U}^{0F}$. Gilt umgekehrt $D \subset \mathcal{U}^{0F}$, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $j \in \mathbf{N}$ mit $\frac{1}{2^j} < \varepsilon$ und es folgt $q(x) \leq \frac{1}{2^j} < \varepsilon$ für jedes $q \in D$ und $x \in U_j$.

Wegen (7) ist insbesondere jede gleichstetige Teilmenge $D \subset E^\#$ $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt. Also ist $p(x) = \sup_{q \in D} q(x)$ eine (F) -Halbnorm auf E . $D \subset E^\#$ ist also genau dann gleichstetig, wenn es eine stetige (F) -Halbnorm p auf E gibt mit $q(x) \leq p(x)$ für jedes $x \in E$ und $q \in D$.

Dem Satz von Alaoglu-Bourbaki entspricht in einem TFD :

(8) $\mathcal{U} = (U_j)$ sei ein topologischer Faden. Dann ist $\mathcal{U}^{0F}$ $\mathcal{T}_s(E)$ -kompakt. Insbesondere ist jede gleichstetige Teilmenge $D \subset E^\#$ $\mathcal{T}_s(E)$ -relativ kompakt.

Beweis: Da $D = \mathcal{U}^{0F}$ $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt ist, ist $p(x) = \sup_{q \in D} q(x)$ eine stetige (F) -Halbnorm auf E und es gilt:

$$\mathcal{U}^{0F} = \{q \in E: q(x) \leq p(x), x \in E\}.$$

Für $x \in E$ sei $K_x = \{y \in \mathbf{R}: |y| \leq p(x)\}$ und $K = \prod_{x \in E} K_x$. K ist kompakt in der Produkttopologie. Die Abbildung $A: \mathcal{U}^{0F} \rightarrow K$ definiert durch $(Aq)(x) = (q(x))_{x \in E}$ ist injektiv. Man sieht leicht ein, daß dann A und A^{-1} stetig sind und $A(\mathcal{U}^{0F})$ in K abgeschlossen ist.

Um eine weitere Charakterisierung der gleichstetigen Teilmengen von $E^\#$ angeben zu können, benötigen wir den Begriff der soliden Mengen in $E^\#$. Eine Teilmenge $D \subset E^\#$ heiße solide, falls

$D = \{q \in E^\#: q(x) \leq \sup q_i(x), q_i \in D, x \in E, i = 1, \dots, n, n_i \in \mathbf{N}\}$ gilt. Die Fadenpolare $\mathcal{U}^{0F}$ eines Fadens $\mathcal{U}$ in E ist z.B. eine solide Teilmenge von $E^\#$. Gleichstetige Teilmengen von $E^\#$ lassen sich dann auch wie folgt charakterisieren:

(9) $D \subset E^\#$ sei eine solide $\mathcal{T}_s(E)$ -abgeschlossene Teilmenge. Dann sind äquivalent:

- (a) D ist gleichstetig
- (b) D ist $\mathcal{T}_s(E)$ -kompakt und $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt
- (c) D ist vollständig und $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt

Beweis: Zu zeigen ist nur (b) $\Rightarrow$ (a) und (c) $\Rightarrow$ (b)

(b) $\Rightarrow$ (a) Sei $p(x) = \sup_{q \in D} q(x)$. p ist eine (F) -Halbnorm auf E , da D $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt ist. Da D solide ist, ist p schwacher Berührungspunkt von D , also $p \in D$. Wegen $q(x) \leq p(x), x \in E, q \in D$, folgt, daß D gleichstetig ist.

(c) $\Rightarrow$ (b) $(q_\alpha)_{\alpha \in I}$ sei ein gerichtetes System auf D und $p(x) = \sup_\alpha q_\alpha(x)$. Da D solide ist, ist $(q_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Cauchynetz auf D und somit konvergent.

3. ULTRATONNELIERTE UND QUASIULTRATONNELIERTE RÄUME

Ein TVR heißt ultratonneliert (quasiultratonneliert), wenn jede Ultratonne (gefräßige Ultratonne) ein topologischer Faden ist. Die Theorie dieser Räume wurde in N. Adasch (1), (3), S. O. Iyahan (6), W. Robertson (10), L. Waelbroeck (14) entwickelt. Wir wollen Charakterisierungen dieser Räume mit Hilfe des Dualkegels $E^\#$ angeben.

$\mathcal{M}$ sei eine Klasse von $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkten Teilmengen von $E^\#$ mit: Sind $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, so ist auch $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}$. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ die von $\mathcal{M}$ erzeugte polare Topologie auf E . Eine Fadenbasis für $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ wird gegeben durch $\{M^{0K}: M \in \mathcal{M}\}$. Dabei heißt ein System $\mathcal{F}$ Fadenbasis für eine lineare Topologie $\mathcal{T}_0$, wenn zu $\mathcal{U}^{(1)}, \mathcal{U}^{(2)} \in \mathcal{F}$ es ein $\mathcal{U}^{(3)} \in \mathcal{F}$ gibt mit $\mathcal{U}^{(3)} \subset \mathcal{U}^{(1)} \cap \mathcal{U}^{(2)}$. $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ braucht nicht separiert zu sein.

DEFINITION: $(E, E^\#)$ sei ein TFD .

(a) Sei $\mathcal{M}$ die Klasse aller $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkten Teilmengen von $E^\#$. Die von $\mathcal{M}$ erzeugte polare Topologie auf E heißt starke Topologie. Bez.: $\mathcal{T}_b(E^\#)$. Analog bezeichnen wir die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen beschränkten Mengen $B \subset E$ als die starke Topologie auf $L(E^\#)$. Bez.: $\mathcal{T}_b(E)$.

(b) Eine Teilmenge $D \subset E^\#$ heißt $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkt, wenn für jede $\mathcal{T}$ -beschränkte Menge $B \subset E$ gilt: $\lim_{s \rightarrow 0} \sup_{q \in D} \sup_{x \in B} q(sx) = 0$

Jede $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkte Menge ist auch $\mathcal{T}_b(E)$ -beschränkt. Die Umkehrung davon braucht aber nicht zu gelten.

$\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkte Mengen und $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkte Mengen von $E^\#$ lassen sich wie folgt charakterisieren:

(1) (a) $D \subset E^\#$ ist genau dann $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt, wenn es eine Ultratonne $\mathcal{U}$ in E gibt mit $D \subset \mathcal{U}^{0F}$.

(b) $D \subset E^\#$ ist genau dann $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkt, wenn es eine gefräßige Ultratonne $\mathcal{U}$ in E gibt mit $D \subset \mathcal{U}^{0F}$.

Beweis: Wir zeigen nur Teil (a). Der Beweis von (b) verläuft analog. Sei $D \subset E^\#$ $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt. Nach 2. (6) ist D^{0K} eine Ultratonne und es gilt $D \subset D^{0K0F}$. Ist umgekehrt $\mathcal{U}$ eine Ultratonne in E , so folgt aus dem Fadenbipolarensatz $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{0F0K}$ und $\mathcal{U}^{0F}$ ist nach 2. (6) $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt. Aus $D \subset \mathcal{U}^{0F}$ folgt, daß D $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt ist.

Wir untersuchen nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen eine $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkte Menge auch $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkt ist. Da jeder topologische Faden auch ein gefräßiger Faden ist, ist somit jede gleichstetige Menge $D \subset E^\#$ auch $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkt.

Eine Menge $B \subset E$ heißt semikonvex, wenn es eine Zahl $k \geq 2$

gibt, so daß $B + B \subset k B$. E heißt fastkonvex, wenn jede beschränkte Menge B in einer abgeschlossen, kreisförmigen beschränkten und semikonvexen Menge liegt. Z. B. ist jeder p -konvexe Raum fastkonvex, $p \in (0, 1]$. Nach S. O. Iyahan (6) gilt:

(2) *In einem separierten TVR absorbiert eine Ultratonne jede kreisförmige, folgenvollständige, semikonvexe, beschränkte Menge.*

Damit gilt nun:

(3) *Ist E ein quasi-folgenvollständiger, fastkonvexer linearer Raum, so ist jede $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkte Menge $D \subset E^\#$ auch $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkt.*

Beweis: $D \subset E^\#$ sei $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt. Nach 1. (a) gibt es eine Ultratonne $\mathcal{U}$ in E mit $D \subset \mathcal{U}^{0F}$. Ist $B \subset E$ beschränkt, so gibt es eine abgeschlossene, semikonvexe, beschränkte Menge M mit $B \subset M$. Nach (2) gibt es eine Nullfolge (s_j) mit $s_j B \subset s_j M \subset U_j$, also $\sup_{m \in M} q(s_j m) \leq \frac{1}{2^j}$ für jedes $q \in \mathcal{U}^{0F}$. Also ist $D \mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkt.

Ultratonnelierte und quasiultratonnelierte Räume lassen sich mit Hilfe des Dualkegels wie folgt charakterisieren:

(4) *Ein TVR E ist genau dann ultratonneliert, wenn jede $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkte Menge $D \subset E^\#$ gleichstetig ist.*

Beweis: $D \subset E^\#$ sei $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt. Dann ist D^{0K} eine Ultratonne, also ein topologischer Faden und wegen $D \subset D^{0K0F}$ ist D gleichstetig. Ist umgekehrt $\mathcal{U}$ eine Ultratonne, so ist $\mathcal{U}^{0F}$ $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkt, nach Voraussetzung also gleichstetig. $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{0K0F}$ ist also ein topologischer Faden.

Als Folgerung von (4) erhalten wir:

(5) *Ist E ein ultratonnelierter Raum, so sind die folgenden Klassen von Teilmengen in $E^\#$ die gleichen:*

- (a) *die gleichstetigen*
- (b) *die relativ $\mathcal{T}_s(E)$ -kompakten und $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkten*
- (c) *die $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkten*
- (d) *die $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkten*

Wir nennen den Dualkegel $E^\#$ $\mathcal{T}_s(E)$ - h -quasi-vollständig, wenn jede $\mathcal{T}_s(E)$ -abgeschlossene, $\mathcal{T}_s(E)$ - h -beschränkte Teilmenge $D \subset E^\#$ vollständig ist. Aus (4) und 2. (9) folgt sofort:

(6) *Ein TVR E ist genau dann ultratonneliert, wenn $E^\#$ $\mathcal{T}_s(E)$ - h -vollständig ist.*

(7) *Ein TVR E ist genau dann quasiultratonneliert, wenn jede $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkte Menge $D \subset E^\#$ gleichstetig ist.*

Beweis: Ist $D \subset E^\#$ $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkt, so ist D^{0K} eine gefräßige Ultratonne, also ein topologischer Faden und wegen $D \subset D^{0K0F}$ ist D gleichstetig. Ist umgekehrt $\mathcal{U}$ eine gefräßige Ultratonne, so ist $\mathcal{U}^{0F}$ $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkt, also gleichstetig. Wegen $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{0F0K}$ ist $\mathcal{U}$ ein topologischer Faden.

Aus (2), (3) und (7) folgt nun (s. Iyahan (6)):

(8) *Jeder separierter folgenvollständiger, fastkonvexer, quasiultratonnelierter Raum ist ultratonneliert.*

Beweis: Sei $\mathcal{U} = (U_i)$ eine Ultratonne. Nach (2) absorbiert sie jede kreisförmige, folgenvollständige, semikonvexe, beschränkte Menge. Da E folgenvollständig und fastkonvex ist, ist $\mathcal{U}^{0F}$ nach (3) auch $\mathcal{T}_b(E)$ - h -beschränkt und somit gleichstetig, da E quasiultratonneliert ist. Wegen $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{0F0K}$ ist $\mathcal{U}$ ein topologischer Faden.

In (14) findet man ein Beispiel von P. Turpin eines vollständigen quasiultratonnelierten Raumes, der nicht ultratonneliert ist.

4. LINEARE ABBILDUNGEN

$(E, E^\#)$ und $(F, F^\#)$ seien TFD und $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ sei eine lineare Abbildung. Durch $(A^\# q)(x) = q(A(x))$, $q \in F^\#$, $x \in E$, wird eine Abbildung $A^\#: F^\# \rightarrow E^\#$ definiert. $A^\#$ heißt die zu A transponierte Abbildung. $A^\#$ kann zu einer linearen Abbildung $A_L^\#: L(F^\#) \rightarrow L(E^\#)$ fortgesetzt werden: Ist $q = q_1 - q_2 \in L(F^\#)$, so setzen wir: $(A_L^\# q)(x) = (q(A(x))) = q_1(A(x)) - q_2(A(x)) = A^\#(q_1(x)) - A^\#(q_2(x))$, $q_i \in F^\#$.

Die Stetigkeit einer linearen Abbildung läßt sich wie folgt charakterisieren;

(1) Eine lineare Abbildung $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ ist genau dann stetig, wenn $A^\#(F^\#) \subset E^\#$ gilt.

Beweis: A ist genau dann stetig, wenn für jedes $q \in F^\#$ $q \circ A$ stetig auf E ist, d.h. genau dann, wenn $A^\# \circ q \in E^\#$ ist.

Ähnlich wie bei (1) erhält man:

(2) $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ sei eine stetige Abbildung. Dann gilt:
 $A_L^\#(L(F^\#)) \subset L(E^\#)$

(3) $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ sei eine stetige Abbildung. Dann sind $A_L^\#$ und $A^\#$ schwach stetig. ($E^\#$ bzw. $F^\#$ versehen mit der Spurtopologie von $\mathcal{T}_s(E)$ bzw. $\mathcal{T}_s(F)$).

Beweis: Wir zeigen, daß $A_L^\#$ schwach stetig ist; entsprechend zeigt man die schwache Stetigkeit von $A^\#$.

Nach (2) gilt: $A_L^\#(L(F^\#)) \subset L(E^\#) \cdot A_L^\#(L(F^\#))$ sei mit der Spurtopologie von $\mathcal{T}_s(E)$ versehen. Seien $x_1, \dots, x_n \in E$ und $X_L^0 = \bigcap_{i=1}^n \{p \in A_L^\#(L(F^\#)) : |p(x_i)| \leq 1\}$, $y_i = A(x_i)$ und $Y_L^0 = \bigcap_{i=1}^n \{q \in L(F^\#) : |q(y_i)| \leq 1\}$. Es folgt: $A_L^\#(Y_L^0) \subset X_L^0$.

Ähnlich wie in der Theorie der lokalkonvexen Räume zeigt man, daß für die Polarenbildungen die folgenden Rechenregeln gelten (vgl. (8), (9))

(4) $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ sei eine stetige lineare Abbildung. Dann gilt:

- (a) für jede Teilmenge $M \subset E: A(M)^0 = A^{\#-1}(M^0)$
- (b) für jede Teilmenge $N \subset F^\#: (A^\#(N))^0 = A^{\#-1}(N^0)$
- (c) für jeden Faden $\mathcal{U}$ in $E: A^{\#-1}(\mathcal{U}^{0F}) = (A(\mathcal{U}))^{0F}$
- (d) für jede Teilmenge D in $F^\#: A^{-1}(D^{0K}) = (A^\#(D))^{0K}$

Für die Kerne und Bildräume einer stetigen linearen Abbildung $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ und ihrer Transponierten gelten die Beziehungen:

(5) (a) $\text{Ker } A^\# = (A(E))^\perp$ (b) $(A^\#(F^\#))^\perp = \text{Ker } A = (A^\#(F^\#))_j^0$,
 $j = 0, 1, \dots$

Beweis: (a) $(A(E))^{\perp} = \{q \in F^{\#} : q(A(x)) = 0 \text{ f. jedes } x \in E\} =$
 $= \{q \in F^{\#} : (A^{\#} q)(x) = 0 \text{ f. jedes } x \in E\} = \text{Ker } A^{\#}$
 (b) $(A^{\#}(F^{\#}))^{\perp} = \{x \in E : (A^{\#} q)(x) = 0 \text{ f. jedes } q \in F^{\#}\} =$
 $= \{x \in E : q(A(x)) = 0 \text{ f. jedes } q \in F^{\#}\} = \text{Ker } A =$
 $= (A^{\#}(F^{\#}))_j^0, j = 0, 1, \dots \text{ nach 2. (2).}$

Aus (5) folgt nun sofort:

- (6) (a) A ist genau dann injektiv, wenn $A^{\#}(F^{\#})^{\perp\perp} = E^{\#}$ ist.
 (b) $A^{\#}$ ist genau dann injektiv, wenn $A(E)^{\perp\perp} = F$ ist.
 (c) $(\text{Ker } A)^{\perp} = (A^{\#}(F^{\#}))^{0K0F}$ (nach 2. (2))

Die Aussage 6 (b) können wir wie folgt verschärfen:

- (7) $A^{\#}$ ist genau dann injektiv, wenn $A(E)$ dicht in F liegt.

Beweis: Es gelte $\overline{A(E)} = F$. Wegen $A(E)^{\perp} \subset A(E)^0$ folgt, da $A(E)^{\perp}$ ein Teilkegel von F ist: $A(E)^{\perp\perp} = A(E)^{\perp 0} \supset A(E)^{00} = \overline{A(E)} = F$, also $F = A(E)^{\perp\perp}$. Aus 6 (b) folgt, daß $A^{\#}$ injektiv ist. Angenommen $A(E)$ liegt nicht dicht in F . Dann ist $F/\overline{A(E)}$ ein separierter TVR . Sei $\hat{q} \neq 0$ eine stetige (F) -Halbnorm auf $F/\overline{A(E)}$ und $K: F \rightarrow F/\overline{A(E)}$ der kanonische Epimorphismus.

Dann ist $q = \hat{q} \circ K \in F^{\#}$ und $q \neq 0$, aber $q \in A(E)^{\perp} = \text{Ker } A^{\#}$.

Für monomorphe Abbildungen gilt:

- (8) Eine stetige lineare Abbildung $A: E(\mathcal{I}_1) \rightarrow F(\mathcal{I}_2)$ ist genau dann ein Monomorphismus mit dichtem Bildraum, wenn $A^{\#}$ bijektiv ist.

Beweis: A sei ein Monomorphismus mit dichtem Bildraum. Nach (7) ist dann $A^{\#}$ injektiv. Sei $p \in E^{\#}$. Die Abbildung $q: A(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ definiert durch $q(A(x)) = p(x)$ ist eine stetige (F) -Halbnorm auf $A(E)$, da A offen ist. Da $A(E)$ dicht in F liegt, läßt sich q eindeutig auf F fortsetzen und es gilt $p = A^{\#} q$. — Ist $A^{\#}$ bijektiv, so liegt $A(E)$ nach (7) dicht in F . Da $A^{\#}$ surjektiv ist, gibt es zu $p \in E^{\#}$ ein $q \in F^{\#}$ mit $p = A^{\#} q$. Man setze:

$$U_j = \left\{ x \in E : p(x) \leq \frac{1}{2^j} \right\} \text{ und } V_j = \left\{ y \in F : q(y) \leq \frac{1}{2^j} \right\}. \text{ Es folgt: } A(U_j) =$$

$A(E) \cap V_j$, also ist A offen. Seien $x_1, x_2 \in E$ mit $A(x_1 - x_2) = 0$. Für jedes $p \in F^{\#}$ gilt: $p(A(x_1 - x_2)) = 0$, also $(A^{\#} p)(x_1 - x_2) = 0$.

Da $A^\#$ surjektiv ist, folgt $q(x_1 - x_2) = 0$ für jedes $q \in E^\#$. Aus der Separiertheit von E folgt $x_1 = x_2$.

Als Folgerung von (8) erhalten wir, daß E und die vollständige Hülle $\overline{E(\mathcal{T})}$ von E den gleichen Dualkegel besitzen.

Für den Dualkegel von Quotientenräumen von E gilt:

(9) $E(\mathcal{T})$ sei ein TVR, M ein abgeschlossener Unterraum von E und $K: E \rightarrow E/M$ der kanonische Epimorphismus.

(a) Die Abbildung $K^\#: (E/M)^\# \rightarrow E^\#$ ist injektiv und es gilt: $K^\#((E/M)^\#) = M^\perp$. Identifiziert man $(E/M)^\#$ mit $M^\perp$, so ist die Transponierte $K^\#$ die Einbettung $j: M^\perp \rightarrow E^\#$.

(b) Die gleichstetigen Teilmengen von $(E/M)^\#$ entsprechen den in $M^\perp$ gelegenen $\mathcal{T}$ -gleichstetigen Teilmengen von $E^\#$.

Beweis (a) Es folgt aus (7), daß $K^\#$ injektiv ist. Nach Definition der Quotientenraumtopologie ist eine (F) -Halbnorm q auf E/M genau dann stetig, wenn $q \circ K = K^\#(q)$ stetig auf E ist. Daraus folgt aber $K^\#(q) \in M^\perp$. Seien umgekehrt $\hat{q} \in M^\perp$, $x, y \in E$ mit $x - y \in M$. Es folgt $\hat{q}(x - y) = 0$ und somit $\hat{q}(x) = \hat{q}(y)$. Also ist $\hat{q}$ auf den Restklassen von M konstant. Also ist die (F) -Halbnorm $q(x + M) = \hat{q}(y)$ ($y \in x + M$) auf E/M wohldefiniert und stetig und es gilt: $q \circ K = \hat{q}$, also $\hat{q} = K^\#(q)$.

(b) Sei H eine $\hat{\mathcal{T}}$ -gleichstetige Teilmenge von $(E/M)^\#$. Es gibt einen topologischen Faden $\mathcal{U} = (U_i)$ in E , so daß $\sup_{q \in H} q(x) \leq \frac{1}{2^j}$ ist für $x \in K(U_j)$.

Es folgt: $\sup_{q \in H} (K^\# q)(x) \leq \frac{1}{2^j}$ für alle $x \in U_j + M$. Also ist $K^\# q \in (\mathcal{U} + M)^{0F} = U^{0F} \cap M^\perp$. Umgekehrt folgt für ein $H \subset (E/M)^\#$ mit $K^\#(H) \subset \mathcal{U}^{0F} \cap M^\perp = (\mathcal{U} + M)^{0F}$, daß $H \subset (K(\mathcal{U}))^{0F}$ gilt.

Mit (9) können wir nun zeigen:

(10) Eine stetige, lineare und surjektive Abbildung $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn $A^\#(F^\#) = A^\#(F^\#)^{0K0F} = (Ker A)^\perp$ gilt.

Beweis: Es ist $A = \check{A} \circ K$, wobei $K: E \rightarrow E/Ker A$ und $\check{A}: E/Ker A \rightarrow F$ bedeuten. Wegen (6) (c) gilt im allgemeinen $A^\#(F^\#) \subset (Ker A)^\perp$

$= \text{Im } K^\#$. Wegen $A^\# = K^\# \circ \check{A}^\#$ und da $K^\#$ injektiv ist, ist $A^\#(F^\#) = (\text{Ker } A)^\perp$ genau dann, wenn $A^\#$ surjektiv ist. Wegen $\check{A}(E|_{\text{Ker } A}) = F$ ist $\check{A}^\#$ injektiv. Nach (8) ist $\check{A}^\#$ genau dann bijektiv, wenn $\check{A}$ ein topologischer Isomorphismus ist, wenn A also ein Homomorphismus ist.

Bevor wir die faststetigen und fastoffenen linearen Abbildungen charakterisieren können, benötigen wir den Begriff des *Definitionsbereichs* der transponierten Abbildung $A^\#$ (vgl. Köthe (9)):

$A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ sei eine lineare Abbildung. Ist A nicht stetig, so wird zwar der Kegel $F^\#$ auf einen Teilkegel aller (F) -Halbnormen auf E durch $A^\#$ abgebildet, aber nach (1) $F^\#$ nicht in $E^\#$ abgebildet. Die Menge derjenigen $q \in F^\#$ mit $A^\# q \in E^\#$ bildet einen Teilkegel von $F^\#$, der der Definitionsbereich von $A^\#$ heißt. Man kann ihn wie folgt charakterisieren:

(11) Für den Definitionsbereich $D(A^\#)$ von $A^\#$ gilt: $D(A^\#) = \bigcup (A(\mathcal{U}))^{0F}$. Dabei durchläuft $\mathcal{U}$ eine Fadenbasis von E .

Beweis: $q \in \bigcup (A(\mathcal{U}))^{0F}$ ist äquivalent mit $q|_{A(\mathcal{U}_j)} \leq \frac{1}{2^j}$ für einen geeigneten topologischen Faden $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_j)$ in E . Das ist äquivalent mit $(A^\# q)|_{\mathcal{U}_j} \leq \frac{1}{2^j}$ und dieses ist äquivalent mit $A^\# q \in E^\#$.

Im folgenden bezeichnen wir mit H den Definitionsbereich von $A^\#$. Die Abgeschlossenheit des Graphen einer linearen Abbildung läßt sich wie folgt charakterisieren:

(12) Eine lineare Abbildung $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ hat genau dann einen abgeschlossenen Graphen, wenn $H^{0K0F} = F^\#$ gilt.

Beweis: Es ist $H^{0K0F} = F^\#$ genau dann, wenn $H^{0K0F0K} = H^{0K} = (\{0\})$ der Nullfaden ist. Aus (11) folgt:

$H^{0K} = (\bigcup A(\mathcal{U})^{0F})^{0K} = \bigcap A(\mathcal{U})^{0F0K} = \bigcap \overline{A(\mathcal{U})}$. Nach N. Adasch (1) ist $\bigcap \overline{A(\mathcal{U})} = (\{0\})$ genau dann, wenn A einen abgeschlossenen Graphen hat. Wir benötigen noch das folgende Lemma:

(13) $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ sei eine lineare Abbildung mit dichtem Bildraum. Dann gilt für jeden topologischen Faden $\mathcal{U}$ in F :

$$(A^{-1}(\mathcal{U}))^{0F} = A^\#(H \cap \mathcal{U}^{0F}).$$

Beweis: Sei $q \in H \cap \mathcal{U}^{0F}$ und $p = A^\# q$. Für $x \in U_j$ gilt: $p(A^{-1}(x)) = (A^\# q)(A^{-1}(x)) = q(x) \leq \frac{1}{2^j}$, also $A^\#(H \cap \mathcal{U}^{0F}) \subset (A^{-1}(\mathcal{U}))^{0F}$. Umgekehrt sei O.B.d.A. $\mathcal{U} = (U_j)$ ein offener Faden und $p \in (A^{-1}(\mathcal{U}))^{0F}$ d.h. $p(A^{-1}(x)) \leq \frac{1}{2^j}$ für $x \in U_j \cap A(E)$. Durch $q(y) = p(A^{-1}(y))$ ist auf $A(E)$ eindeutig eine stetige (F) -Halbnorm definiert, da p auf $\text{Ker } A$ verschwindet. Da $A(E)$ in F dicht liegt, kann q eindeutig auf F fortgesetzt werden und es gilt: $q|_{U_j} \leq \frac{1}{2^j}$.

Wegen $q(A(x)) = q(y) = p(A^{-1}(y)) = p(x)$ für $x \in E$, folgt $p = A^\# q$ und $q \in H \cap \mathcal{U}^{0F}$ also $p \in A^\#(H \cap \mathcal{U}^{0F})$.

Speziell folgt aus (13):

(14) Ist A eine stetige Abbildung mit dichtem Bildraum, so gilt für jeden topologischen Faden $\mathcal{U}$ in F : $(A^{-1}(\mathcal{U}))^{0F} = A^\#(\mathcal{U}^{0F})$.

Faststetige Abbildungen mit dichtem Bildraum lassen sich wie folgt charakterisieren:

(15) Eine lineare Abbildung $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ mit dichtem Bildraum ist genau dann faststetig, wenn $A^\#(H \cap \mathcal{M}_2) \subset \mathcal{M}_1$ gilt, $\mathcal{M}_1$ bzw. $\mathcal{M}_2$ die Klassen der gleichstetigen Teilmengen von $E^\#$ bzw. $F^\#$.

Beweis: Die Faststetigkeit von A ist äquivalent damit, daß es zu jedem topologischen Faden $\mathcal{U}$ in F einen topologischen Faden $\mathcal{V}$ in E gibt mit $\mathcal{V} \subset \overline{A^{-1}(\mathcal{U})}$. Das ist wegen (13) äquivalent mit: $\mathcal{V}^{0F} \supset (A^{-1}(\mathcal{U}))^{0F} = A^\#(H \cap \mathcal{U}^{0F})$.

Als Folgerung zu (15) erhält man:

(16) Eine faststetige Abbildung A mit dichtem Bildraum ist genau dann stetig, wenn $D(A^\#) = F^\#$ ist.

(17) $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ sei eine lineare faststetige Abbildung mit dichtem Bildraum. Dann gilt für jeden topologischen Faden $\mathcal{U}$ in F : $H \cap \mathcal{U}^{0F} = (H \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F}$, d.h. der Definitionsbereich H von $A^\#$ ist «fastabgeschlossen».

Beweis: Da A faststetig ist, folgt mit (15): $A^\#(H \cap \mathcal{U}^{0F}) \subset \mathcal{V}^{0F}$ $\mathcal{V}$ geeigneter topologischer Faden in E . Mit (11) folgt:

$H \cap \mathcal{U}^{0F} \subset A^{\#-1}(\mathcal{V}^{0F}) = (A(\mathcal{V}))^{0F} \subset H$, also
 $H \cap \mathcal{U}^{0F} \subset (H \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F} \subset (A(\mathcal{V}))^{0F} \subset H$. Hieraus folgt
 $H \cap \mathcal{U}^{0F} \subset \mathcal{U}^{0F} \cap (H \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F} \subset H \cap \mathcal{U}^{0F}$. Wegen $H \cap \mathcal{U}^{0F} \subset \mathcal{U}^{0F}$
 gilt auch $(H \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F} \subset \mathcal{U}^{0F}$ und somit $H \cap \mathcal{U}^{0F} = (H \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F}$.

Fastoffene Abbildungen mit dichtem Bildraum lassen sich wie folgt charakterisieren:

(18) Eine stetige lineare Abbildung $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ mit dichtem Bildraum ist genau dann fastoffen, wenn $\mathcal{M}_1 \cap L \subset A^{\#}(\mathcal{M}_2)$ gilt, $\mathcal{M}_1$ bzw. $\mathcal{M}_2$ die Klassen der gleichstetigen Mengen von $E^{\#}$ bzw. $F^{\#}$ und $L = A^{\#}(F^{\#})$.

Beweis: Sei A fastoffen und $M_1 \in \mathcal{M}_1 \cap L$. Es gibt ein $M_2 \in \mathcal{M}_2$ mit $M_2^{0K} \subset \overline{A(M_1^{0K})}$. Es folgt: $A(M_1^{0K})^{0F} = A^{\#-1}(M_1^{0K0F}) \subset M_2^{0K0F} \in \mathcal{M}_2$, also $M_1 \subset A^{\#}(M_2^{0K0F}) \in A^{\#}(\mathcal{M}_2)$. Gelte umgekehrt $\mathcal{M}_1 \cap L \subset A^{\#}(\mathcal{M}_2)$ und sei $\mathcal{U}$ ein topologischer Faden in E . Es folgt: $A(\mathcal{U})^{0F} = A^{\#-1}(\mathcal{U}^{0F}) = A^{\#-1}(\mathcal{U}^{0F} \cap L) \subset A^{\#-1}(A^{\#}(M_2))$, M_2 geeignet aus $\mathcal{M}_2$. Da $A(E)$ dicht in F liegt, ist $A^{\#}$ injektiv, also $A^{\#-1}(A^{\#}(M_2)) = M_2$. Es folgt: $A(\mathcal{U}) = A(\mathcal{U})^{0F0K} \supset M_2^{0K}$, also die Fastoffenheit von A .

(19) $A: E(\mathcal{T}_1) \rightarrow F(\mathcal{T}_2)$ sei eine stetige fastoffene lineare Abbildung und $\mathcal{U}$ ein topologischer Faden in E . Dann gilt für den Teilkegel $L = A^{\#}(F^{\#})$ von $E^{\#}$:

(a) $L \cap \mathcal{U}^{0K} = A^{\#}(A(\mathcal{U})^{0F})$ (b) $L \cap \mathcal{U}^{0F}$ ist $\mathcal{T}_s(E)$ -abgeschlossen
 (c) Ist $A(E)$ dicht in F , so gilt sogar:
 $L \cap \mathcal{U}^{0F} = (L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F}$.

Beweis: (a) Sei $q \in L \cap \mathcal{U}^{0F} \Leftrightarrow q = A^{\#}p$ und $q|_{U_j} \leq \frac{1}{2^j}$, $p \in F^{\#} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (A^{\#}p)|_{U_j} \leq \frac{1}{2^j} \Leftrightarrow p \in (A(\mathcal{U}))^{0F} \Leftrightarrow q \in A^{\#}(A(\mathcal{U})^{0F})$.

(b) Nach Voraussetzung ist $\overline{A(\mathcal{U})}$ ein topologischer Faden in $F^{\#}$, also ist $A(\mathcal{U})^{0F} \mathcal{T}_s(F)$ -kompakt. Da $A_L^{\#}$ schwach stetig ist, ist $A_L^{\#}(A(\mathcal{U})^{0F}) \mathcal{T}_s(E)$ -kompakt und somit $L \cap \mathcal{U}^{0F} = A^{\#}(A(\mathcal{U})^{0F}) \mathcal{T}_s(E)$ -abgeschlossen.

(c) Mit (a) gilt: $L \cap \mathcal{U}^{0F} = A^{\#}(A(\mathcal{U})^{0F}) \subset (L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F} = (A^{\#}(A(\mathcal{U})^{0F})^{0K0F})$. Wegen $A^{\#}(A(\mathcal{U})^{0F})^{0K} = A^{-1}(A(\mathcal{U})^{0F0K})$ folgt mit (14)

$$A^\# (A (\mathcal{U})^{0F})^{0K0F} = A^{-1} (A (\mathcal{U})^{0F0K})^{0F} = A^\# (A (\mathcal{U})^{0F0K0F}) = A^\# (A (\mathcal{U})^{0F}). \text{ Es folgt: } L \cap \mathcal{U}^{0F} = A^\# (A (\mathcal{U})^{0F}) \subset (L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F} = A^\# (A (\mathcal{U})^{0F}) \subset (L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F} = A^\# (A (\mathcal{U})^{0F}).$$

5. B_r -UND B - VOLLSTÄNDIGE RÄUME

In (1) führt N. Adasch in der Kategorie der topologischen Vektorräume die Klasse der B_r -und B - vollständigen Räume ein. Wir benutzen eine Charakterisierung dieser Räume zu ihrer Definition:

DEFINITION: Ein $TVR E(\mathcal{T}_0)$ heißt B_r -vollständig, wenn jede eindeutige faststetige abgeschlossene lineare Abbildung A von einem $TVR F(\mathcal{T})$ auf $E(\mathcal{T}_0)$ stetig ist.

B_r -vollständige Räume können wir wie folgt charakterisieren:

(1) Ein $TVR E(\mathcal{T}_0)$ ist genau dann B_r -vollständig, wenn für jeden Teilkegel $H \subset E^\#$ mit den Eigenschaften:

(i) $H^{0K0F} = E^\#$ sowie (ii) $H \cap \mathcal{U}^{0F} = (H \cap \mathcal{U}^{0F})^{0F0K}$ für jeden topologischen Faden $\mathcal{U}$ in $E(\mathcal{T}_0)$ folgt: $H = E^\#$.

Beweis: $A : F(\mathcal{T}) \rightarrow E(\mathcal{T}_0)$ sei eine eindeutige, faststetige abgeschlossene surjektive lineare Abbildung. Nach 4. (12) und 4. (17) genügt der Definitionsbereich $D(A^\#)$ von $A^\#$ den Bedingungen (i) und (ii). Also folgt $D(A^\#) = E^\#$. Aus 4. (16) folgt, daß A stetig ist.

Sei umgekehrt $E(\mathcal{T}_0)$ B_r -vollständig und H ein Teilkegel von $E^\#$, der den Bedingungen (i) und (ii) genügt.

Sei $\mathcal{M} = \{H \cap \mathcal{U}^{0F}, \mathcal{U} : \text{topologischer Faden in } E(\mathcal{T}_0)\}$ und $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ die polare Topologie auf E . $\mathcal{T}_1$ ist wegen $H^{0K0F} = E^\#$ eine separierte Topologie. Denn sei $\mathcal{B} = \bigcap (H \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K}$. Es folgt: $\mathcal{B} = (\bigcup (H \cap \mathcal{U}^{0F}))^{0K} = (H \cap \bigcup \mathcal{U}^{0F})^{0K} = (H \cap E^\#)^{0K} = H^{0K} = (H^{0K0F})^{0K} = (E^\#)^{0K} = (\{0\})$. (Es gilt $E^\# = \bigcup \mathcal{U}^{0F}$, wobei $\mathcal{U}$ alle topologischen Fäden von E durchläuft). Der Dualkegel von $E(\mathcal{T}_1)$ ist H . Nach Konstruktion von $\mathcal{T}_1$ gilt: $H \subset E^\#(\mathcal{T}_1)$. Sei $q \in E^\#(\mathcal{T}_1)$. Es gibt einen topologischen Faden $\mathcal{U}$ in $E(\mathcal{T}_0)$ mit $q(x) \leq \frac{1}{2}$ für $x \in (H \cap \mathcal{U}^{0F})_j^0$ also $q \in (H \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F}$

$= H \cap \mathcal{U}^{0F}$ und somit $q \in H$. Wegen $\mathcal{U}^{0F0K} \subset (H \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K}$ ist $\mathcal{T}_1$ gröber als $\mathcal{T}_0$. Sei $\text{Id} : E(\mathcal{T}_0) \rightarrow E(\mathcal{T}_1)$ die identische Abbildung. Id ist stetig und fastoffen, da für jeden topologischen Faden $\mathcal{U}$ in $E(\mathcal{T}_0)$ gilt: $\overline{\text{Id}(\mathcal{U})} = \overline{\mathcal{U}}^{\mathcal{T}_1} = (H \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K}$. Also ist Id^{-1} faststetig und abgeschlossen.

sen. Da $E(\mathcal{T}_0)$ B_r -vollständig ist, ist Id^{-1} stetig und somit $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1$. Es folgt: $H = E^\#$.

DEFINITION: Ein $TVR E(\mathcal{T})$ heißt B -vollständig, wenn jede stetige, fastoffene, lineare Abbildung A von $E(\mathcal{T})$ auf einen $TVR F(\mathcal{T}_1)$ offen ist.

(2) Ein $TVR E(\mathcal{T})$ ist genau dann B -vollständig, wenn für jeden Teilkegel L von $E^\#$ mit $L \cap \mathcal{U}^{0F} = (L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F}$ für jeden topologischen Faden $\mathcal{U}$ in $E(\mathcal{T})$ folgt: $L = L^{0K0F}$.

Beweis: $A: E(\mathcal{T}) \rightarrow F(\mathcal{T}_1)$ sei eine stetige, fastoffene, surjektive, lineare Abbildung. Nach 4. (19) (c) gilt für $L = A^\#(F^\#): L \cap \mathcal{U}^{0F} = (L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F}$, also folgt nach Voraussetzung $L = L^{0K0F}$. Nach 4. (10) folgt, daß A offen ist. Also ist $E(\mathcal{T})$ B -vollständig.

Sei umgekehrt $E(\mathcal{T})$ B -vollständig und L ein Teilkegel von $E^\#$ mit $L \cap \mathcal{U}^{0F} = (L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F}$. Sei $F = E|_{K^\# L^{0K}} = E|_{L^\perp}$. F werde mit der Topologie $\mathcal{T}_1$ versehen, die eine Fadenbasis aus den Mengensystemen $K((L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K})$ besitzt, wobei $K: E \rightarrow E|_{L^\perp}$ und $\mathcal{U}$ die topologischen Fäden von $E(\mathcal{T})$ durchläuft. $\mathcal{T}_1$ ist separiert, da gilt: $\cap (L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K} = (\cup (L \cap \mathcal{U}^{0F}))^{0K} = (L \cap \cup \mathcal{U}^{0F})^{0K} = L^{0K} = (L^\perp)^\perp$, da L Teilkegel von $E^\#$ ist. Der stetige Dualkegel von F ist dann L . Denn ist q eine $\mathcal{T}_1$ -stetige (F) -Halbnorm auf F , so gibt es einen topologischen Faden $\mathcal{U}$ in E mit $q|_{(L \cap \mathcal{U}^{0F})^0} \leq \frac{1}{2^j}$. Es folgt: $q \in (L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K0F} = L \cap \mathcal{U}^{0F}$, also $q \in L$. Ist umgekehrt $q \in L$, so folgt wegen $L = \cup (L \cap \mathcal{U}^{0F})$, $q \in L \cap \mathcal{U}^{0F}$ für einen geeigneten topologischen Faden $\mathcal{U}$ in $E(\mathcal{T})$ und somit $q|_{(L \cap \mathcal{U}^{0F})^0} \leq \frac{1}{2^j}$. Also ist q eine $\mathcal{T}_1$ stetige (F) -Halbnorm auf F . K ist wegen $K^{-1}(K((L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K})) \supset (L \cap \mathcal{U}^{0F})^{0K} \supset \mathcal{U}^{0F0K} \supset \mathcal{U}$ stetig und wegen der Charakterisierung 4. (18) fastoffen, da $K^\#(L) \cap \mathcal{M}_1 = L \cap \mathcal{M}_1$ gilt, $\mathcal{M}_1$ die Klasse der $\mathcal{T}$ -gleichstetigen Teilmengen von $E^\#$. Also ist K offen und somit $\mathcal{T}_1$ die Quotientenraumtopologie auf F . Nach 4. (9) (a) ist der Dualkegel von F aber $L^{\perp\perp} = L^{0K0F}$. Es folgt $L = L^{0K0F}$.

LITERATUR

- (1) ADASCH, N. *Der Graphensatz in topologischen Vektorräumen* Math. Zeitschrift 119 (1971).
- (2) ADASCH, N. *Lokalkonvexe Räume mit einer Fundamentalfolge beschränkter Teilmengen*, Math. Ann. 199 (1972).
- (3) ADASCH, N. *Topologische Produkte gewisser topologischer Vektorräume* Math. Ann. 189 (1970).
- (4) HORVATH, I. *Topological Vectorspaces and Distributions*, Vol. 1 Adison Wesley 1966.
- (5) HORVATH, I. *Locally convex spaces in «Summer school of topological vector spaces»*, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York Lecture Note 331 (1973).
- (6) IYAHEN, S. O. *On certain classes of linear topological vector spaces*, Proc. London M.S. (3) (1968).
- (7) KELLEY, J. L. *Hypercomplete linear topological spaces*, Michigan Math. Journal 5 (1968).
- (8) KÖTHE, G. *Topologische lineare Räume I*, 2. Auflage, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1966).
- (9) KÖTHE, G. *General linear transformations of locally convex spaces*, Math. Ann. 159 (1965).
- (10) ROBERTSON, W. *Completion of topological vector spaces*, Proc. London M.S. (3), 8 (1958).
- (11) ROLEWICZ, S. *Metric linear spaces*, Warszawa 1972.
- (12) RUESS, W. *Ein Dualkegel für p -konvexe Räume*, Dissertation Bonn 1971.
- (13) TREVES, F. *Locally convex spaces and partial differential equations*, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1967).
- (14) WAELBROECK, L. *Topological vector spaces and algebras Lecture Notes in Mathematics 230* Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1971).
- (15) WONG, Y. C. and NG, F. G. *Partially ordered topological vector spaces* Oxford Mathematical Monographs (1973).

Karlheinz Rüdiger

Fachbereich Mathematik der
Technischen Universität Berlin
1 Berlin 12
Straße des 17. Juni 134

*

