

ESTUDIO RELATIVISTA DE UN FLUIDO PERFECTO  
TERMODINAMICO DE MASA MATERIAL VARIABLE  
EN PROCESOS REVERSIBLES

por

JOAQUÍN OLIVERT PELLICER

INTRODUCCION. — En la actual termodinámica relativista se ha llagado a un tal grado de variedad en cuanto a tendencias, teorías e hipótesis, que no es raro el hecho de encontrar en el mundo científico trabajos de aquel tipo en los que presentan diversas teorías con sus correspondientes hipótesis. Como ilustración podemos mencionar la pugna existente entre el modo según el cual se transforma la temperatura al pasar de un sistema inercial a otro.

Otra tendencia es ofrecida por investigadores, como por ejemplo TAUB, LICHNEROWICZ, PHAM MAU QUAN (de los que daremos cuenta en los epígrafes siguientes). Estos autores no se plantean tales cuestiones, sino que se limitan en sus trabajos a exponer todas sus ecuaciones en sus sistemas propios, limitándose al empleo de variables termodinámicas específicas y definiendo a su modo el concepto de temperatura.

Una de las intenciones que nos indujo a la realización del presente trabajo fue la de tratar de armonizar, en la medida de nuestras posibilidades, dos de las tendencias existentes: la teoría termodinámica inaugurada por el mismo EINSTEIN, PLANCK, pasando por MOLLER (6) y en la que actualmente trabaja GUESSOUS (18), y la teoría de TAUB-LICHNEROWICZ (5), (14).

Naturalmente se corría el riesgo de que estas teorías fuesen contradictorias y en consecuencia irreconciliables, hecho que no ha sucedido; sino que como presentaremos a continuación se complementan. Se va a analizar las propiedades termodinámicas de un fluido perfecto, en procesos reversibles, incluso cuando la materia de la sustancia no se conserve. Aunque en primera intención nos propusimos trabajar en relatividad restringida, a partir de la PARTE III apuntamos la posible validez de la ecuación fundamental (1.1.5) en relatividad generalizada.

## PARTE I

Comenzamos con la deducción de la ecuación (1.1.5), a la que llamamos «ecuación fundamental en su primera forma», la obtención de los primeros resultados que de aquella se derivan. En el epígrafe siguiente, partimos de la idea de descomponer la energía propia del sistema en suma de energía interna y de energía debida a la masa material. Después de presentar la (1.1.7) (ecuación fundamental en su segunda forma) como una generalización de la teoría termodinámica clásica, nos proponemos abordar el análisis de los procesos a entalpía constante (con ello particularizamos el discutible caso, ya presentado por Louis De Broglie, de una partícula aislada), y hemos conjeturado algunos fenómenos naturales como posibles procesos a entalpía constante. Acto seguido y en epígrafe aparte, estudiamos la relación entre temperatura global y la temperatura específica. Por último, abordamos el estudio de las funciones de estado y los teoremas de conservación.

Hemos de advertir que se ha preferido emplear letras latinas para los índices comprendidos entre 1 y 4 inclusive, y las letras griegas representarán los índices comprendidos de 1 a 3. Coincidiremos la cuarta coordenada del espacio de Minkowski con el tiempo coordinado, salvo la constante  $c$  (velocidad de la luz en el vacío) para que tenga dimensión de longitud, multiplicada por la unidad imaginaria.

Las fórmulas con que partimos en nuestra exposición son las que obedecen al modo de transformación del calor y de la temperatura al cambiar de sistema inercial; éstas son las presentadas por MOLLER (6) y GUESSOUS (18):

$$dQ = dQ^0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}; \quad dT = dT^0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

siendo  $Q, T$  el calor y la temperatura observada, y  $Q^0, T^0$  el calor y la temperatura propias del sistema termodinámico;  $u$ , la velocidad del sistema inercial.

Por otra parte, se admite en mantener, para procesos reversibles y en cualquier sistema inercial, la expresión

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

a la que GUESSOUS (véase (18), pág. 43) ha demostrado la invariabilidad de la entropía al pasar de sistema inercial, empleando métodos estadísticos.

En lo sucesivo, adoptaremos el siguiente criterio de signos:

- 1.º Diremos que el trabajo es positivo  $W > 0$  cuando es cedido al sistema, y negativo cuando es realizado por el sistema.
- 2.º Diremos que el calor es positivo  $Q > 0$  cuando es absorbido por el sistema, y será negativo en el caso de que se desprenda del sistema.

#### 1.1. ECUACION FUNDAMENTAL DE LA TERMODINÁMICA RELATIVISTA PARA LOS PROCESOS REVERSIBLES.

En la teoría de TAUB-LICHTNEROWICZ (14) se llega a la siguiente ecuación

$$T' ds^0 = di - \frac{dp}{r} \quad (1.1.1)$$

donde  $s^0$ ,  $i$  son la entropía y la entalpía específicas propias del sistema termodinámico,  $r$  es la densidad de materia, sin tener en cuenta la masa debida a la energía interna, a la que consideramos medida en el sistema propio;  $p$ , la presión que se la toma como invariante relativista. Finalmente,  $T'$  se considera como temperatura; pero hemos de advertir que tal como se introduce  $T'$  viene a ser el inverso de un factor integrande para que  $ds^0$  sea una diferencial exacta. (Tendremos ocasión de estudiar posible significado físico de esta magnitud).

Nuestro propósito es deducir, a continuación, una ecuación termodinámica análoga a (1.1.1); pero con variables extensivas o globales, a la que llamaremos ecuación fundamental. Para ello partiremos de la expresión de la conservación de la energía

$$dH = dQ + dW \quad (1.1.2)$$

donde  $H$  es la energía relativista

Ahora bien, MOLLER (6) ha obtenido la expresión

$$dH = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dQ^0 - p dV + \bar{u} \cdot d\bar{G} \quad (1.1.3)$$

donde  $G$  es el momento relativista,  $V$ , el volumen de la sustancia.

Por un cálculo sencillo, obtenemos

$$dH + p dV = -i c dP_4 - V d\dot{p}$$

con tal de observar la definición del cuadrivector momento del sistema termodinámico (6):

$$P_i = \frac{H^0 + \dot{p} V^0}{c} U_i$$

con

$$H + \dot{p} V = \frac{H^0 + \dot{p} V^0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Pero por la expresión del cuadrivector velocidad

$$u^i = \left( \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{i c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \quad (1.1.4)$$

y previa sustitución del resultado dado en (1.1.3), con la eliminación de  $dQ^0$  a partir de la expresión de la variación de entropía, obtenemos por un cálculo directo la fórmula

$R_n$  (1.1.1): Primera forma de la ecuación fundamental

$$u^i dP_i + T^0 dS + V^0 d\dot{p} = 0 \quad (1.1.5)$$

Consideramos esta fórmula como la ecuación fundamental para el desarrollo del presente trabajo, ya que nos relaciona magnitudes termodinámicas globales en las transformaciones reversibles

Como primer resultado tenemos el siguiente teorema:

$T_N$  (1.1.2): «En todo proceso reversible, isobárico e isoentrópico se cumple que

$$U^i dP_i = 0»$$

*Comentario 1.1.1:* Tomamos este resultado como una generalización del caso de una partícula relativista de masa propia constante. En efecto: si consideramos ésta como «un supuesto sistema termodinámico», hemos de convenir que se realiza su evolución como si fuera «a presión y entropía constante».

1.2. SIGNIFICADO FÍSICO DE  $U^i dP_i$ 

Según hemos visto en el epígrafe precedente,  $H^0$  era la energía propia del sistema. Nosotros vamos a descomponer (por un paralelismo conceptual con la hipótesis de TAUB) esta energía en dos términos: uno debido a la masa material, y otro correspondiente a su energía interna, es decir: establezcamos la relación

$$H^0 = m^0 c^2 + E^0 \quad (1.2.1)$$

donde  $E^0$  y  $m^0$  son la energía interna y la masa propia material respectivamente. Entonces

$$H^0 + pV^0 = m^0 c^2 + E^0 + pV^0 = m^0 c^2 + I \quad (1.2.2)$$

la última igualdad queda justificada con tal de tener en consideración la forma matemática con que se define la entalpía

$$I = E^0 + pV^0 \quad (1.2.3)$$

Por otra parte, de la definición del cuadvivector momento del sistema termodinámico, tenemos que

$$U^i dP_i = -d(H^0 + pV^0)$$

y debido a (1.2.2.) deducimos

$$R_N(1.2.1.): U^i dP_i = -d(m^0 c^2 + I) \quad (1.2.4)$$

lo que difiere en el término de la entalpía en este caso formado por sistemas termodinámicos de fluidos perfectos y en el caso de una partícula relativista.

Como consecuencia del teorema (1.1.2) y de la fórmula (1.2.4), obtenemos el siguiente teorema

$T_n$ ](1.2.2): «En un proceso reversible, isobárico e isoentrópico se tiene que

$$c^2 m^0 + I = \text{constante}»$$

En el caso de que las transformaciones termodinámicas se realicen a presión constante, la ecuación fundamental se reduce a

$$U^i d_i P + T^0 dS = 0$$

y por (1.2.4) junto con

$$dS = \frac{dQ^0}{T^0} \quad (1.2.5)$$

obtenemos de inmediato

$R_N$  (1.2.3): En los procesos isobáricos se cumple

$$dQ^0 = d(m^0 c^2 + I) \quad (1.2.6)$$

fórmula que generaliza la conocida expresión de la termodinámica clásica, en donde los procesos se realizan a masa material constante.

*Comentario 1.2.1:* Un parecido resultado es presentado por GUES-  
SOUS (18), págs. 91, 92. Creemos que debe tenerse en cuenta dos  
consideraciones. La primera consiste en que el citado autor no hace  
la distinción entre energía interna y la debida a la masa material,  
con lo que todas sus demostraciones las realiza con el concepto  
de masa total del sistema.

En segundo lugar, encontramos una diferencia mucho más pro-  
funda: En su demostración se fundamenta en los resultados obte-  
nidos por LOUIS DE BROGLIE, sobre la termodinámica de la par-  
tícula aislada (véase el epígrafe siguiente), y considera un sistema  
termodinámico como un conjunto de partículas, de modo que el  
resultado del sistema sea igual a la suma de los resultados par-  
ciales de las partículas integrantes del mismo. En consecuencia,  
la fórmula resultante es obtenida independientemente de que el  
sistema sea isobárico o no, pues los puntos materiales se hallan  
desprovistos de presión.

Es más, la fórmula de GUESOUS difícilmente se la puede consi-  
derar como generalización de la dada por la termodinámica clásica,  
de modo que contenga a ésta por un paso a límite, por el  
inconveniente antes citado de no imponer la condición de ser  
una transformación isobárica.

Vamos a presentar la ecuación fundamental de forma más fami-  
liar, con lo que se notará la analogía con otra fórmula clásica.

Si sustituimos la (1.2.4) en (1.1.3), resulta

$R_N$  (1.2.4): Segunda forma de la ecuación fundamental:

$$T^0 dS = d(m^0 c^2 + I) - V^0 dp \quad (1.2.7)$$

fórmula que, al ser un invariante relativista, postularemos su validez en el caso de que estudiemos en el marco de la relatividad generalizada.

### 1.3. PROCESOS A ENTALPIA CONSTANTE

En tales transformaciones, se tiene de (1.2.4) la expresión

$$U^i dP_i = -c^2 dm^0 \quad (1.3.1)$$

lo que nos indica que, para estos procesos, el término  $U^i dP_i$  expresa la desintegración o creación de materia.

Sustituyendo la (1.3.1) en (1.1.3), obtenemos

$$-c^2 dm^0 + T^0 dS + V^0 dp = 0 \quad (1.3.2)$$

Ahora bien, el término  $c^2 dm^0$  se interpreta como conversión de materia en energía; pero si queremos expresar la pérdida de masa propia (material), hemos de cambiarle su signo en todas las ecuaciones en donde aparece. Entonces la ecuación (1.3.2) queda transformada en

$$c^2 dm^0 + T^0 dS + V^0 dp = 0 \quad (1.3.2')$$

Como consecuencia de (1.3.2'), resulta que en los procesos isobáricos se cumple la relación

$$T^0 dS = -c^2 dm^0$$

es decir

$T_N(1.3.1)$ : En un proceso isobárico de un fluido perfecto (a entalpia conste), toda aniquilación de materia corresponde a un aumento de entropía, y toda creación de materia a una disminución de entropía.

*Comentario 1.3.1*: En realidad para que haya creación de materia no es necesario que disminuya siempre la entropía, sino que debe cumplirse, por (1.3.2'), que

$$T^0 dS + V^0 dp < 0$$

Una interpretación a considerar, como consecuencia de esta fórmula sería la conversión de hidrógeno en helio en las estrellas de

gran volumen, ya que basta una pequeña disminución de presión para que el término  $V^0 dp$  se haga considerablemente negativo. Esto en el supuesto de que las reacciones termonucleares de las estrellas sean reversibles y se realicen a entalpía constante, cosa muy poco plausible, sobre todo esta última condición.

En cambio que la aniquilación de materia corresponda un aumento de entropía parece estar de acuerdo con la radiactividad natural, pues esos fenómenos son lo suficientemente lentos como para considerarlos reversibles y que su energía interna no sufra variaciones sensibles durante la citada radiación, a la par que se realizan a presión constante.

Finalmente proponemos el siguiente teorema, si bien en sucesivos epígrafes será superado por consideraciones mucho más potentes. El teorema en cuestión dice:

$T_N$  (1.3.2): Si el proceso es isoentrópico específico y conserva la masa material, es isoentrópico e isobárico.

En efecto: Al ser isoentrópico específico y conservarse la masa material resulta que es isoentrópico, y por (1.3.2) es isobárico.

Es evidente, por otra parte, que de (1.2.6) se cumple en este caso

$$dQ^0 = c^2 dm^0 \quad (1.3.3.)$$

*Comentario 1.3.2:* A parte de los posibles fenómenos naturales a entalpía contante apuntados anteriormente, hemos de considerar los casos de las partículas aisladas, pues éstas, además de estar desprovistas de presión, hemos de convenir, por la simple inspección de (1.2.4), que sus transformaciones se realizan a entalpía constante. Entonces debe cumplirse la fórmula (1.3.3), demostrada (para el caso de una partícula aislada) por DE BROGLIE (9), citada por GUESSOUS, pág. 79, y redemostrada por este mismo autor en la página siguiente de la cita anterior.

#### 1.4. RELACIÓN ENTRE LA TEMPERATURA GLOBAL, Y LA TEMPERATURA ESPECÍFICA

Como el título del epígrafe ya indica, éste está dedicado a estudiar la relación existente entre la temperatura global  $T^0$  y la temperatura específica  $T'$ , las cuales no tienen por qué coincidir debido

a que corresponden a teorías distintas. Estudiaremos además cuándo y en qué condiciones coinciden.

Empecemos observando que en los procesos reversibles y, en consecuencia, durante los mismos, el sistema va pasando por sucesivos estados de equilibrios termodinámicos, con lo que se exige que sus variables respectivas tomen los mismos valores en todo el sistema; es decir: dado un sistema (termodinámico), compuesto por una sola sustancia (como nuestro caso por ser un fluido perfecto), sea homogéneo; por lo que se cumple

$$r V^0 = m^0 \quad (1.4.1)$$

y por consiguiente, al multiplicar (1.1.1) por  $m^0$  y combinarla con (1.2.7) se obtiene después de algunos cálculos sencillos

$R_n$  (1.4.1): Relación entre la temperatura global y la temperatura específica:

$$(T' - T^0) m^0 T^0 = (T^0 s^0 - c^2 + i) dm^0 \quad (1.4.2.)$$

Vamos a proponer la siguiente definición

$D_n$  (1.4.1): Llamaremos función de Gibbs a

$$G = I - T^0 S$$

Si bien el concepto de función de Gibbs relativista se halla definido en la obra de GUESSOUS (18) pág. 63, difiere de nuestra definición en el hecho de que GUESSOUS, como ya hemos tenido ocasión de citar, no hace la distinción expresada en (1.2.1).

Pasemos a continuación a las condiciones de coincidencia:

$T_n$  (1.4.2): Si el proceso no es isoentrópico específico, la condición necesaria y suficiente para que la temperatura global y la temperatura específica coincidan es que se conserve la masa material o que la función de Gibbs valga  $-m^0 c^2$ .

Demostración: La condición necesaria y suficiente para que las dos temperaturas coincidan no la proporciona la fórmula (1.4.2) (en el caso de que el proceso no sea isoentrópico específico):

$$(T^0 s^0 - i - c^2) dm^0 = 0 \quad (1.4.3.)$$

Basta multiplicar por  $m^0$  para obtener la expresión

$$(G + m^0 c^2) dm^0 = 0$$

con tal de tener presente la definición (1.4.1)

c. s. q. d.

En la obra de LICHTNEROWICZ (14), se introduce la temperatura  $T'$  como el inverso del factor integrante de la ecuación diferencial (1.1.1). Ahora bien: en los procesos a entropía específica constante, la temperatura específica  $T'$  quedará indeterminada. En tales casos vamos a convenir que  $T' = T^0$

CONVENIO (1.4.1): En los procesos isoentrópicos específicos,  
 $T' = T_0$

Y en consecuencia el teorema (1.4.2) quedará modificado del siguiente modo:

$T_n$  (1.4.2'): La condición necesaria y suficiente para que la temperatura global y la temperatura específica coincidan es que se conserve la masa material o que la función de Gibbs valga  $-m^0 c^2$ .

Además es inmediato demostrar que las fórmulas (1.1.1) y (1.2.7) son dependientes si, y sólo si, las temperaturas coinciden.

Ante estos resultados, vemos que en los casos de que no haya creación ni desintegración de materia, es decir que la masa material se conserve, sólo tiene sentido hablar de una única temperatura, como ocurre en termodinámica clásica. En cambio, en los procesos donde aparezca creación o desintegración de materia, es preciso introducir dos clases de temperaturas en las ecuaciones termodinámicas para poder describir dichos fenómenos.

Como último resultado del presente epígrafe diremos que

$R_n$  (1.4.3): En los procesos tales que en ellos se conserve la masa material, las dos temperaturas coinciden.

## 1.5. FUNCIONES DE ESTADO

Son muchos los trabajos que, consagrados a la termodinámica relativista, introducen funciones de estado para sus ulteriores desarrollos físico-matemáticos. Por tal motivo, hemos creído oportuno

presentar una síntesis de algunos resultados que tradicionalmente se exponen de manera informal. El motivo del presente compendio es para poder contrastar con las funciones de estado de las variables globales o extensivas (las cuales nos disponemos a introducir en este epígrafe), y proponer una nueva HIPÓTESIS DE TRABAJO. Los resultados que vamos a obtener deben coincidir con los tradicionales en el caso de que la masa material se conserve, pues estos últimos se limitan, como nos disponemos a ver a continuación, a las variables específicas o intensivas.

Como sus demostraciones son prácticamente las mismas que las realizadas por PHAM MAU QUAN (16) las omitiremos en el presente artículo. Sólo diremos que de la (1.1.1) puede deducirse que las magnitudes termodinámicas  $p, r, T', i, \epsilon$  (energía interna específica),  $f$  (índice del fluido),  $\pi$  (potencial termodinámico) son funciones de estado.

Hemos de advertir que

$$f = 1 + \frac{i}{c^2}; \quad (1.5.1) \quad \pi = c^2 f - T' s^0 \quad (1.5.2)$$

Pasemos ahora al estudio de las funciones de estado de variables extensivas. Para ello hemos de admitir una nueva variable termodinámica: la masa propia material. Esta variable resulta innecesaria siempre y cuando se conserve la masa (material), como es el caso de la termodinámica clásica; pero en una teoría general, en donde puede haber procesos de desintegración o creación de materia, nos vemos precisados a admitirla, si bien en procesos isoentrópicos no actúa como variable independiente, como haremos patente en el presente artículo.

He aquí algunas de las variables extensivas que, con la consideración precedente, serán funciones de estado:

Energía interna	$E = m^0 \epsilon$
Entalpía	$I = m^0 i$
Entropía	$S = m^0 s^0$
Volumen propio	$V^0 = \frac{r}{m^0}$

En esta tabla se observa que una variable de estado global es siempre producto de la masa material y de una variable intensiva. Esta observación la vamos a generalizar con la siguiente hipótesis:

$H_*$  (1.5.1): Una función de estado extensiva no puede depender exclusivamente de variables específicas, a no ser que la masa material se conserve.

Para terminar este epígrafe, tratamos de dar significado físico a las temperaturas introducidas, concretamente la temperatura específica.

Recordemos que en los procesos en que se conserve la masa material las temperaturas global y específica coinciden; entonces  $T^0$  será función de estado, por lo que tal temperatura es considerada como la del sistema termodinámico.

En cuanto a la temperatura específica diremos que resulta ser un parámetro de tipo térmico que hace las veces de temperatura en las funciones de estado. Con ello, se ha extendido el conjunto de tales funciones de estado para los casos de no conservación de materia, de la misma forma con que se tiene en la termodinámica clásica.

## 1.6. TEOREMAS DE CONSERVACIÓN

Nos disponemos a dar un teorema, el cual nos permitirá conocer en lo sucesivo los procesos en que exige conservación de masa material de los sistemas termodinámicos. Ello no quiere decir que sean únicamente los que puedan haber conservación de materia. Veamos dicho teorema:

$T_*$  (1.6.1): Los procesos isoentrópicos conservan la masa material.

Demostración: Sabemos que se cumple la fórmula (1.4.2):

$$(T' - T^0) m^0 ds^0 = (T^0 s^0 - c^2 - i) dm^0 = (T^0 s^0 - c^2 f) dm^0$$

pero como se tiene

$$dS = m^0 ds^0 + s^0 dm^0$$

resulta por un simple cálculo

$$(T' s^0 - c^2 f) dm^0 = (T' - T^0) dS$$

Al ser el proceso isoentrópico, esta ecuación se reduce a

$$\pi dm^0 = 0 \quad (1.6.1.)$$

con tal de tener en cuenta la definición del potencial termodinámico (1.5.2).

El teorema quedaría demostrado si se consiguiese probar que el potencial termodinámico no se anula en las transformaciones citadas en el enunciado del teorema. El procedimiento a seguir por nosotros se compone de varias etapas, de las cuales una consistirá en demostrar que en su proceso no se anula el potencial termodinámico.

Debido a que  $\pi$  es una función de estado, distinguiremos en la demostración varios casos o posibilidades:

a) Sean  $p$  y  $T'$  las variables termodinámicas independientes

A su vez hemos de distinguir otras dos alternativas:

1.º Procesos no isobáricos ni isotermos específicos

Por diferenciación del potencial termodinámico

$$d\pi = c^2 df - s^0 dT' - T' ds^0$$

y por la ecuación (1.1.1) en función de  $f$

$$T' ds^0 = c^2 df - \frac{1}{r} dp$$

resulta

$$d\pi = -s^0 dT' + \frac{1}{r} dp \quad (1.6.2)$$

lo que nos dice que  $d\pi \neq 0$ , de donde se infiere que  $\pi \neq cte$  durante el proceso, y por consiguiente no toma el valor cero en todo el tiempo que dura la transformación. Vemos, pues, por (1.6.1) que debe conservarse la masa material.

2.º Procesos isobáricos e isotermos

Como  $s^0$  es una función de estado, nos es permitido expresarla en función de  $p$  y  $T'$ , es decir

$$s^0 = s^0(p, T')$$

con lo que al ser transformaciones a presión y temperatura específica constantes, se infiere de inmediato que tales procesos son a entropía específica constante. Ahora bien, de la definición

$$S = s^0 m^0$$

resulta sin más que se debe conservar la masa material, ya que el teorema exige que los citados procesos sean isoentrópicos.

Puede ocurrir que la expresión (1.6.2) se anule sin cumplirse  $d\phi = 0$ ,  $dT' = 0$ ; entonces  $\phi$  y  $T'$  no serían variables independientes, caso éste que nos disponemos a analizar a continuación:

b) Sean  $r$ ,  $T'$  las variables independientes

Estudiaremos el caso de que  $d\pi = 0$ , sin ser constantes  $\phi$  y  $T'$ . Evidentemente se deduce de (1.6.2) la relación

$$d\phi = s^0 r dT' \quad (1.6.3)$$

Por otra parte, como  $\phi$  es función de estado, se tiene

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial T'} dT'$$

y por la (1.6.3), se deduce de inmediato que

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (1.6.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial T'} = s^0 r \quad (1.6.5)$$

La relación (1.6.4) exige que la presión no dependa explícitamente de la densidad propia material; en cambio la segunda relación (1.6.5) si la integramos resulta

$$\phi = r \int s^0 dT' + C$$

de donde vemos que  $\phi$  depende de  $r$ , lo que contradice la relación (1.6.4), a no ser que el proceso se realice de forma que

$$s^0 = \frac{h(T')}{r} = v^0 h(T') \quad (1.6.6)$$

siendo  $h(T')$  una función arbitraria de  $T'$ .

Pero si multiplicamos la (1.6.6) por  $m^0$

$$V^0 h(T') = S = K = \text{constante}$$

y en consecuencia

$$V^0 = \frac{K}{\bar{h}(T')}$$

lo que nos indica que una variable extensiva (como es nuestro caso  $V^0$ ) depende solamente de una variable intensiva, y ello únicamente es posible si hay conservación de materia, por la hipótesis (1.5.1)

c. s. q. d.

La experiencia parece corroborar en favor del teorema, pues es sabido que en los procesos de desintegración vienen acompañados por desprendimientos de calor.

Finalmente daremos dos resultados inmediatos

$R_n(1.6.2)$ : En los procesos isoentrópicos las temperaturas coinciden y son además isoentrópicos específicos.

Más aún, el teorema (1.6.1) modifica en parte el  $T_n(1.2.2)$ :

$R_n(1.6.3)$ : En un proceso isoentrópico e isobárico reversible, se cumple que su entalpía permanece constante.

## PARTE II

Pese a que nuestro estudio se centra en relatividad restringida, conservaremos el formalismo tensorial, en sus casos más generales, con vistas a posibles generalizaciones.

### 2.1. ECUACIÓN FUNDAMENTAL PARA UN FLUIDO CARGADO

Se sabe que el tensor impulso-energía, para un fluido perfecto cargado, toma la forma

$$T_{.j}^i = \rho f U^i U_j + p \delta_j^i + \mathcal{J}_{.j}^i \quad (2.1.1)$$

donde el término  $\mathcal{J}_{.j}^i$  es el tensor de Maxwell-Minkowski.

Apliquemos acto seguido las ecuaciones de conservación

$$\nabla_i T_{.j}^i = 0$$

a (2.1.1) con lo que

$$rf \frac{dU_j}{d\tau} + U_j \nabla_i (rf U^i) + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nabla_i \mathcal{T}^i_j = 0 \quad (2.1.2)$$

con  $\tau$  queremos expresar el tiempo propio del sistema.

Contraemos a continuación la (2.1.2) con  $U^j$  y como

$$U^j \frac{dU_j}{d\tau} = 0; \quad U^j U_j = -c^2; \quad U^j \frac{\partial p}{\partial x^j} = \frac{dp}{d\tau}$$

se obtiene en consecuencia

$$\frac{dp}{d\tau} = c^2 \nabla_i (rf(U^i) - U^j \nabla_i \mathcal{T}^i_j) \quad (2.1.3)$$

A partir de la ecuación fundamental (1.1.5) y previa eliminación del término  $\frac{dp}{d\tau}$  obtenemos

$R_*$  (2.1.1): Ecuación fundamental para fluidos perfectos cargados

$$U^i \frac{dP_i}{d\tau} + T^0 \frac{dS}{d\tau} + V^0 c^2 \nabla_i (rf U^i) = V^0 U^j \nabla_i \mathcal{T}^i_j \quad (2.1.4)$$

fórmula de la que haremos uso en los siguientes epígrafes.

## 2.2. PROCESO LOCALMENTE ISOENTRÓPICOS

Antes de introducir los conceptos con que titulamos el presente epígrafe, vamos a hacer algunas modificaciones en la ecuación fundamental. Empecemos, pues, transformando la expresión (1.2.4):

$$U^i \frac{dP_i}{d\tau} = -c^2 U^i \nabla_i (m^0 f) = -c^2 U^i \nabla_i (rf V^0) \quad (2.2.1)$$

lo que nos permite expresar

$$U^i \frac{dP_i}{d\tau} + V^0 c^2 \nabla_i (rf U^i) = c^2 rf \left( V^0 \nabla_i U^i - \frac{dV^0}{d\tau} \right)$$

es decir que la (2.1.4) queda transformada en

$R_n(2.2.1)$ : Ecuación de variación del volumen propio de un sistema termodinámico

$$T^0 \frac{dS}{d\tau} + c^2 r f \left[ V^0 \nabla_i U^i - \frac{dV^0}{d\tau} \right] = V^0 U^i \nabla_i \mathcal{T}_{\cdot j}^i \quad (2.2.2)$$

En los cálculos, hemos empleado las expresiones (1.4.1) y (1.5.1).

Para mayor comodidad en el lenguaje usado en la presente memoria, vamos a introducir un nuevo concepto que lo definiremos de acuerdo con

$D_n(2.2.1)$ : Llamaremos procesos localmente isoentrópico a aquellos que cumplen que

$$\frac{dS}{d\tau} = 0$$

Esta definición nos sugiere una crítica que la relegamos al final del epígrafe.

Por de pronto tenemos que, en los procesos localmente isoentrópicos así definidos, la ley de variación del volumen propio, de acuerdo con (2.2.2), será

$R_n(2.2.2)$ : Variación del volumen propio en los procesos localmente isoentrópicos

$$\frac{d}{d\tau} \ln V^0 = \nabla_i U^i - \frac{1}{c^2 r f} U^i \nabla_i \mathcal{T}_{\cdot j}^i \quad (2.2.3)$$

*Comentario 2.2.1*: Esta ley también es válida para las transformaciones termodinámicas a entropía constante, pues tales procesos son localmente isoentrópicos. Por otra parte, sabemos, por el teorema (1.6.1), que los procesos isoentrópicos conservan la masa material, por lo que en las citadas transformaciones, será también válida la fórmula (2.2.3) para volúmenes específicos. En tales circunstancias y en el caso de un fluido neutro, la citada fórmula se reduce a

$$\frac{d}{d\tau} \ln v^0 = \nabla_i U^i$$

que coincide con la expresión deducida por ECKART (4), pág. 920 y redemostrada por KRANYS (12), pág. 57. El procedimiento

empleado por estos autores consiste en anular la divergencia del vector flujo de masa:

$$\partial_i (\mu^0 U^i) = 0$$

Por un cálculo análogo al anterior, se tiene

$$U^i \frac{dP_i}{d\tau} + V^0 c^2 \nabla_i (r f U^i) = -c^2 f \frac{dm^0}{d\tau} + c^2 V^0 f \nabla_i (r U^i)$$

que por sustitución en (2.1.4) resulta

$$-c^2 f \frac{dm^0}{d\tau} + c^2 V^0 f \nabla_i (r U^i) + T^0 \frac{dS}{d\tau} = V^0 U^j \nabla_i \mathcal{J}_{,j}^i \quad (2.2.4)$$

De la expresión (1.1.1) junto con la (2.1.3) nos permite eliminar  $\frac{dP}{d\tau}$  con lo cual

$$T^0 \frac{ds^0}{d\tau} = \frac{di}{d\tau} - \frac{c^2}{r} \nabla_i (r f U^i) + U^j \nabla_i \mathcal{J}_{,j}^i \quad (2.2.5)$$

Si derivamos la (1.5.1) con respecto a  $\tau$  y sustituimos en (2.2.5), obtenemos

$$T^0 \frac{ds^0}{d\tau} = \frac{1}{r} U^j \nabla_i \mathcal{J}_{,j}^i - \frac{c^2}{r} f \nabla_i (r U^i) \quad (2.2.6)$$

En la obra de LICHTNEROWICZ (14) pág. 29, se encuentra definido el siguiente concepto:

$D_n$ (2.2.2): Se llama proceso localmente adiabático aquél que cumple que

$$\frac{ds^0}{d\tau} = 0$$

Pues bien, nosotros vamos a enunciar y demostrar un nuevo teorema, el cual presentará, en la Parte IV, una variante de interés.

$T_n$ (2.2.3): En todo proceso localmente adiabático tal que la función de Gibbs no sea igual a  $-m^0 c^2$ , se conserva la masa material a lo largo de las líneas de corriente.

Demostración: Al ser localmente adiabático  $\frac{ds^0}{d\tau} = 0$  y por (2.2.6), se tiene

$$U^j \nabla_i T_{.j}^i - c^2 f \nabla_i (r U^i) = 0$$

entonces la (2.2.4) queda reducida a

$$T^0 \frac{dS}{d\tau} - c' f \frac{dm^0}{d\tau} = 0$$

pero como

$$\frac{dS}{d\tau} = m^0 \frac{ds^0}{d\tau} + s^0 \frac{dm^0}{d\tau} = s^0 \frac{dm^0}{d\tau} \quad (2.2.7)$$

resulta

$$T^0 s^0 \frac{dm^0}{d\tau} - c^2 f \frac{dm^0}{d\tau} = 0$$

y si tenemos presente la definición de  $f$  y simplificamos

$$(G + m^0 c^2) dm^0 = 0$$

pero como por hipótesis

$$G + m^0 c^2 \neq 0 \quad (2.2.8)$$

resulta que  $m^0$  es constante.

c. s. q. d.

*Comentario 2.2.2:* En la parte IV, demostraremos que, por exigencia de una evolución determinada de un sistema termodinámico o para la existencia de ondas hidrodinámicas, se debe cumplir la condición (2.2.8); por lo que resultará que en los procesos localmente adiabáticos se conserva la masa material. Entonces se tiene que todo proceso localmente adiabático es localmente isoentrópico.

En cambio, no hemos visto que todo proceso localmente isoentrópico sea localmente adiabático.

### 2.3. RELACIÓN ENTRE LA DENSIDAD PROPIA DE CARGA Y LA DENSIDAD PROPIA DE MASA PROPIA MATERIAL

El propósito de este epígrafe es generalizar un teorema presentado por LICHNEROWICH (7), pág. 59, que, a su vez, es una modificación de otro teorema presentado por este mismo autor en (14), pág. 55.

En primer lugar, se sabe que el vector corriente eléctrica toma la forma

$$\mathcal{J}^i = \frac{1}{c} (\varrho^0 U^i + \sigma e^i) \quad (2.3.1)$$

Por la condición de conservación de la corriente eléctrica, debe cumplirse

$$\nabla_i \mathcal{J}^i = \frac{1}{c} [\nabla_i (\varrho^0 U^i) + \nabla_i (\sigma e^i)] = 0 \quad (2.3.2)$$

El significado físico del término  $\frac{1}{c} \varrho^0 U^i$  es que representa la corriente de convección del fluido, y el  $\frac{\sigma}{c} e^i$  expresa la corriente de conducción, siendo  $\varrho^0$ ,  $\sigma$ ,  $e^i$  la densidad propia de carga eléctrica, la conductibilidad eléctrica, componente del campo eléctrico respectivamente.

Ahora bien, por la identidad

$$\frac{dr}{d\tau} + r \nabla_i U^i = \nabla_i (r U^i)$$

y por la expresión anterior (2.3.2), obtenemos de inmediato que

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{\varrho^0}{r} = \frac{1}{r} \nabla_i (r U^i) + \frac{1}{\varrho^0} \nabla_i (\sigma e^i) \quad (2.3.3)$$

Probemos a continuación el siguiente teorema:

$T_n$ (2.3.1): En los procesos localmente adiabáticos tales que

$$\nabla_i (\sigma e^i) = 0 \quad \text{y} \quad U^i \nabla_i \mathcal{J}_{;j}^i = 0$$

se verifica la relación

$$\frac{\varrho^0}{r} = \text{const.}$$

a lo largo de sus líneas de corriente.

Demostración: Al ser  $\nabla_i(\sigma e^i) = 0$ , la (2.3.2) se reduce a

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{\rho^0}{r} = \frac{1}{r} \nabla_i(r U^i)$$

pero por (2.2.6) y por ser la transformación localmente adiabática, se tiene

$$U^j \nabla_i \mathcal{J}_{.j}^i - c^2 f \nabla_i(r U^i) = 0$$

expresión que, por la hipótesis  $U^j \nabla_i \mathcal{J}_{.j}^i = 0$ , se reduce a

$$\nabla_i(r U^i) = 0$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{\rho^0}{r} = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\rho^0}{r} = \text{const.}$$

a lo largo de las líneas de corriente

c. s. q. d.

#### 2.4. CASO DE UN FLUIDO PERFECTO CARGADO SIN INDUCCIÓN

Este epígrafe está dedicado a presentar un caso particular de fluidos perfectos cargados: los fluidos en donde no aparece el fenómeno de inducción. Dejaremos para el próximo apartado el estudio de los fluidos inductivos.

En el caso que nos ocupa, es conocido el hecho de que el campo eléctrico se halla relacionado con el tensor electromagnético  $F_{ij}$  por la fórmula

$$e_k = \frac{1}{c} U^j F_{kj} \quad (2.4.1)$$

También es conocida la relación

$$\nabla_i \mathcal{J}_{.j}^i = - \mathcal{J}^k F_{kj} \quad (2.4.2)$$

(El lector puede consultar la obra de Synge (10), en donde se demuestra la fórmula precedente)

Con estas dos expresiones y teniendo en cuenta la (3.3.1), calculamos

$$U^j \nabla_i \mathcal{J}_{,j}^i = -\sigma e^i e_i \quad (2.4.3)$$

con lo que la expresión (2.1.4) queda transformada en

$$U^i \frac{dP_i}{d\tau} + T^0 \frac{dS}{d\tau} + V^0 c^2 \left[ \nabla_i (rf U^i) + \frac{\sigma}{c^2} e^i e_i \right] = 0 \quad (2.4.4)$$

Por otra parte, de (2.4.3), (3.2.4), (1.4.1) y (2.3.2), obtenemos el siguiente resultado

$R_{**}$ (2.4.1): Relación entre la densidad propia de carga y la densidad propia de la masa propia material

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{\rho^0}{r} = \frac{d}{d\tau} \ln m^0 + \frac{1}{\rho^0} \nabla_i (\sigma e^i) - \frac{T^0}{m^0 c^2 f} \frac{dS}{d\tau} - \frac{\sigma}{c^2 r f} e^i e_i \quad (2.4.5)$$

Impongamos a continuación la condición de que el proceso sea adiabático. En tales procesos, se deduce inmediatamente de (1.1.1) y de (1.5.1) que

$$c^2 m^0 \frac{df}{d\tau} = V^0 \frac{dp}{d\tau} \quad (2.4.6)$$

Deducimos con toda facilidad de la ecuación fundamental (1.2.7) con la ayuda de (2.4.6) que

$$T^0 \frac{dS}{d\tau} = c^2 \frac{d}{d\tau} (m^0 f) - c^2 m^0 \frac{df}{d\tau} = c^0 f \frac{d}{d\tau} m^0 \quad (2.4.7)$$

con lo que resulta

$$\frac{d}{d\tau} \ln m^0 - \frac{T^0}{m^0 c^2 f} \frac{dS}{d\tau} = 0$$

y en consecuencia la relación entre la densidad propia de carga y la densidad propia material, para los procesos localmente adiabáticos, vendrá dada por

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\rho^0}{r} = \frac{c}{\rho^0} \nabla_i (\sigma e^i) - \frac{\sigma}{c^2 r f} e^i e_i \quad (2.4.8)$$

En los fluidos de conductibilidad eléctrica nula, la ecuación (2.4.4) se reduce a

$$U^i \frac{dP_i}{d\tau} + T^0 \frac{dS}{d\tau} + V^0 c^2 \nabla_i (rfU^i) = 0 \quad (2.4.9)$$

lo que nos dice que, en sus transformaciones energéticas termodinámicas, los citados fluidos se comportan como si no estuvieran cargados.

Por otra parte, la fórmula (2.4.8) se reduce a cero, con lo que obtenemos

$$\frac{\rho^0}{r} = \text{const.}$$

a lo largo de sus líneas de corriente, resultado obtenido por LICHNEROWICZ (14), pág. 59.

Hemos de advertir que los fluidos que nos ocupan verifican las condiciones del teorema (2.3.1), ya que de (2.4.3) se cumple

$$U^j \nabla_j \mathcal{T}_i^j = 0$$

al ser nula la conductibilidad eléctrica. Ni qué decir tiene que también se cumple la verificación de la segunda condición.

Finalmente, ofrece interés la variación del volumen propio de un fluido perfecto cargado. En efecto, combinando la (2.4.3) con la (2.2.3), se obtiene para los casos de procesos localmente isoentrópicos:

$R_{,n}$  (2.4.2): Variación del volumen propio de un fluido perfecto cargado sin inducción, en procesos localmente isoentrópicos:

$$\frac{d}{d\tau} \ln V^0 = \nabla_i U^i + \frac{\sigma}{c^2 rf} e^i e_i \quad (2.4.10)$$

Ante este resultado, hemos de admitir un fenómeno análogo a la electrostricción en los fluidos perfectos en presencia de un campo eléctrico. Pero con una diferencia diametralmente opuesta, consistente en que la fórmula (2.4.10) predice una dilatación en el volumen propio de la sustancia fluido; mientras que el fenómeno de la electrostricción tiende a disminuir el volumen, disminución ésta ocasionada, como es bien sabido, por fuerzas y tensiones internas de la sustancia en cuestión.

Esto nos induce a pensar que, o estamos ante un efecto relativista desconocido por la experiencia, o la variación de volumen propio exige que el proceso, durante el cual se presente tal variación, no sea localmente isoentropico.

Si aceptamos la primera posibilidad, cabe preguntarse por qué no ha sido detectado por la experiencia. El principal argumento, que hemos encontrado en favor de esta posibilidad, es que la dilatación volumétrica, debida a este hipotético fenómeno nuevo, debe ser muy pequeña (téngase en cuenta el factor  $c^2$  en el denominador), la cual quedaría enmascarada por el fenómeno de la electrostricción propiamente dicha. Por otra parte, el fenómeno electrostrictivo no lo predice nuestro estudio presente como era de esperar, pues en el mismo nos hemos dedicado a fluidos perfectos, en los cuales no aparecen fuerzas ni tensiones internas anisótropas, principales causantes de la electrostricción.

Si por el contrario admitimos la segunda posibilidad de las dos indicadas anteriormente, hemos de recurrir a la ecuación (2.2.2) que, junto con la (2.4.3), nos proporcionará la ecuación diferencial en que interviene la variación del volumen propio en los casos más generales, pero siempre circunscritos a procesos reversibles:

$$T^0 \frac{dS}{d\tau} + c^2 r f \left[ V^0 \nabla_i U^i - \frac{dV^0}{d\tau} \right] + V^0 \sigma e_i e^i = 0 \quad (2.4.11)$$

### PARTE III

Nos disponemos a estudiar los fluidos perfectos cargados con inducción, tanto eléctrica como magnética (fluidos inductivos) para finalizar con el estudio de algunas propiedades originales en la magnetohidrodinámica ideal.

#### 3.1. ECUACIONES DE MAXWELL

La descripción de los fenómenos electromagnéticos puros, para el caso de inducción, vienen dado por dos campos tensoriales de segundo orden antisimétricos o 2-formas:  $B$  y  $H$  (tensor campo eléctrico con inducción magnética y tensor campo magnético con inducción eléctrica).

A su vez se definen los siguientes campos

$$\left. \begin{array}{ll} \text{campo eléctrico} & e_k = \frac{1}{c} U^K B_{iK} \\ \text{inducción eléctrica} & d_i = \frac{1}{c} U^K H_{iK} \\ \text{campo magnético} & h_i = \frac{1}{c} U^K *H_{iK} \\ \text{inducción magnética} & b_i = \frac{1}{c} U^K *B_{iK} \end{array} \right\} \quad (3.1.1)$$

Consúltese, por ejemplo, ARCIDIACONO (19).

Es conocido además (LICHNEROWICZ (14), pág. 84) que el operador adjunto cumple (en el caso que nos ocupa):

$$*2 = - (-1)^{(4-p)p} \quad (3.1.2)$$

donde  $p$  es el orden de la forma aplicada al operador  $*$ .

Por otra parte el vector corriente eléctrica definido por (2.3.1), en virtud de (3.1.1), resulta ser

$$\mathcal{J}^K = \frac{1}{c} \left( \rho^0 U^K - \frac{\sigma}{c} U_i B^{iK} \right) \quad (3.1.3)$$

Asimismo, el tensor de Maxwell-Minkowski toma la forma

$$\mathcal{T}_{iK} = \frac{1}{4} g_{iK} B_{rs} H^{rs} - H_{is} B_K^s. \quad (3.1.4)$$

Las ecuaciones de Maxwell, expresadas con el formalismo de la diferencial y codiferencial exteriores (LICHNEROWICZ (14), pág. 87) vienen dadas por

$$dB = 0; \quad \delta H = \mathcal{J} \quad (3.1.5)$$

Hemos de recordar que la codiferencial exterior se define como

$$\delta = (-1)^p *^{-1} d * \quad (3.1.6)$$

(CHOQUET-BRUIAT (15), pág. 248), que de (3.1.2) se reduce a

$$\delta = - * d * \quad (3.1.7)$$

Y por cálculo directo, de (3.1.5) se obtiene las conocidas expresiones

$$\nabla_i H^{iK} = - \mathcal{J}^K; \quad \nabla_K \mathcal{J}^K = 0 \quad (3.1.8)$$

### 3.2. ECUACIÓN FUNDAMENTAL

Si calculamos la derivada covariante de (3.1.4), resulta

$$\nabla_i \mathcal{J} \cdot \overset{i}{K} = \mathcal{J}^s B_{Ks} + \frac{1}{4} H^{rs} \nabla_K B_{rs} + \frac{1}{4} B_{rs} \nabla_K H^{rs} - H^{is} \nabla_i B_{Ks} \quad (3.2.1)$$

con tal de tener en cuenta la primera ecuación de (3.1.8). Ahora bien, por un cálculo directo se obtiene la primera ecuación de (3.1.5) que

$$H^{is} \nabla_i B_{Ks} = \frac{1}{2} H^{rs} \nabla_K B_{rs}$$

Si llevamos este resultado a la (3.2.2):

$$\nabla_i \mathcal{J} \cdot \overset{i}{K} = \mathcal{J}^s B_{Ks} + \frac{1}{4} (B_{rs} \nabla_K H^{rs} - H^{rs} \nabla_K B_{rs}) \quad (3.2.2)$$

y por consecuencia de (3.1.3), (3.1.1) y (3.2.2);

$$U^K \nabla_i \mathcal{J} \cdot \overset{i}{K} = - \sigma e^i \hat{e}_i + \frac{1}{4} U^K (B_{rs} \nabla_K H^{rs} - H^{rs} \nabla_K B_{rs}) \quad (3.2.3)$$

Para obtener la ecuación fundamental de un fluido perfecto cargado con inducción, basta sustituir esta última expresión en la ecuación (2.1.4), es decir

$R_n$ (3.2.1): Ecuación fundamental de un fluido perfecto inductivo:

$$\begin{aligned} U^i \frac{dP_i}{d\tau} + T^0 \frac{dS}{d\tau} + V^0 c^2 \left[ \nabla_i (r f U^i) + \frac{\sigma}{c^2} e_i e^i \right] = \\ = \frac{1}{4} V^0 U^j [B_{rs} \nabla_j H^{rs} - H^{rs} \nabla_j B_{rs}] \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

### 3.3. CASO DE FLUIDOS PERFECTOS ISÓTROPOS

Un medio eléctricamente isótropo se define como

$$d_i = \varepsilon e_i; \quad b_i = \mu h_i \quad (3.3.1)$$

(Véase como por ejemplo ARCIDIACONO (19); LICHNEROWICZ (14), página 86).

Nuestra principal intención, por el momento, es simplificar la expresión (3.2.3.) con lo que calculamos en primer lugar la estructura de  $B_{ml}$ . Para ello, partiremos de (3.1.1), concretamente de

$$b^i = \frac{1}{c} U_K {}^*B^{iK}$$

donde, por definición de tensores adjuntos,

$${}^*B^{iK} = \frac{1}{2!} \eta^{iKab} B_{ab}$$

de ambas se deduce de inmediato

$$\eta_{lmji} U^j b^i = \frac{1}{2c} \delta_{lmj}^{KKab} U^j U_K B_{ab} \quad (3.3.2)$$

donde  $\eta^{iKab}$  es el tensor permutación, y

$$\delta_{lmj}^{Kab} = \begin{vmatrix} \delta_l^K & \delta_m^K & \delta_j^K \\ \delta_l^a & \delta_m^a & \delta_j^a \\ \delta_l^b & \delta_m^b & \delta_j^b \end{vmatrix}$$

se sigue directamente

$$c B_{ml} = \frac{1}{c} \delta_{lm}^{ab} U_a U^j B_{bj} - \eta_{lmji} U^j b^i \quad (3.3.3)$$

Del mismo modo obtendríamos para  $H_{ml}$  una expresión análoga

$$c H_{ml} = \frac{1}{c} \delta_{lm}^{ab} U_a U^j H_{bj} - \eta_{lmji} U^j h^i \quad (3.3.4)$$

Ahora bien, como tratamos con medios isótropos la fórmula (3.3.4) es susceptible de presentar alguna modificación con la ayuda de (3.3.3):

$$H_{ml} = \frac{1}{\mu} B_{ml} + \frac{1}{c^2} \left( \varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) \delta_{lm}^{ab} U_a U^j B_{bj} \quad (3.3.5)$$

fórmula que también puede ser escrita de la forma

$$H^{sr} = \frac{1}{\mu} B^{sr} + \frac{1}{c^2} \left( \varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) \delta_{ab}^{rs} U^a U_j B^{bj} \quad (3.3.6)$$

y previo cálculo de su derivada, se llega a la expresión

$$\begin{aligned} B_{rs} \nabla_j H^{rs} &= B_{rs} B^{rs} \partial_j \left( \frac{1}{\mu} \right) + \frac{1}{\mu} B_{rs} \nabla_j B^{rs} - \frac{2}{c^2} U^a U_i B_{ab} B^{bi} \partial_j \left( \varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) - \\ &\quad - \frac{2}{c^2} \left( \varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) B_{ab} \nabla_j (U^a U_i B^{bi}) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Un cálculo análogo nos permitirá llegar a la siguiente expresión

$$H^{rs} \nabla_j B_{rs} = \frac{1}{\mu} B^{rs} \nabla_j B_{rs} - \frac{2}{c^2} \left( \varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) U^a U_i B^{bi} \nabla_j B_{ab} \quad (3.3.8)$$

Restemos de (3.3.7) la ecuación (3.3.8):

$$\begin{aligned} B_{rs} \nabla_j H^{rs} - H^{rs} \nabla_j B_{rs} &= B_{rs} B^{rs} \partial_j \left( \frac{1}{\mu} \right) - \frac{2}{c^2} U^a U_i B_{ab} B^{bi} \partial_j \left( \varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) - \\ &\quad - \frac{2}{c^2} \left( \varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) [B_{ab} \nabla_j (U^a U_i B^{bi}) - U^a U_i B^{bi} \nabla_j B_{ab}] \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

En el momento de simplificar esta última expresión, hemos de tener presente que

$$B_{rs} B^{rs} = 2 (b_j b^j - e_j e^j) \quad (3.3.10)$$

El segundo término resulta con una sencilla simplificación

$$\frac{2}{c^2} U^a U_i B_{ab} B^{bi} = -2 e_j e^j \quad (3.3.11)$$

y para el tercero se obtiene

$$B_{ab} \nabla_j (U^a U_i B^{bi}) - U^a U_i B^{bi} \nabla_j B_{ab} = 2 \eta^{abiK} e_b U_i b_K \nabla_j U_a \quad (3.3.12)$$

Si sustituimos a continuación las (3.3.10), (3.3.11) y (3.3.12) en (3.3.9), obtenemos

$$\begin{aligned} B_{rs} \nabla_j H^{rs} - H^{rs} \nabla_j B_{rs} &= 2 e_i e^i \partial_j \mathcal{E} + \\ &+ 2 b_i b^i \partial_j \left( \frac{1}{\mu} \right) - \frac{4}{c^2} (\mathcal{E} \mu - 1) L^i \nabla_j U_i - 4 e_i e^i \partial_j \left( \frac{1}{\mu} \right) \end{aligned}$$

con el supuesto de haber definido a  $L^a$  como

$$L^a = \eta^{abiK} e_b U_i h_K \quad (3.3.13)$$

y cuyo significado físico es muy conocido como el vector de Poynting generalizado (ver LICHNEROWICZ (14), págs. 88, 90).

Además, como consecuencia de (3.2.2) y (2.3.1) resulta en definitiva

$$\begin{aligned} U^K \nabla_i \mathcal{J}_{.K}^i &= -\sigma e_i e^i + \frac{1}{2} \left( e_i e^i \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} - h_i h^i \frac{d\mu}{d\tau} \right) + \\ &+ \frac{1}{c^2} (\mathcal{E} \mu - 1) L^i \frac{dU_i}{d\tau} + 4 e_i e^i \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\mu} \right) \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Una vez hecho el cálculo precedente, la ecuación (2.1.4) toma la forma:

$$\begin{aligned} R_n(3.3.1): \quad U^i \frac{dP_i}{d\tau} + V^0 c^2 \left[ \nabla_i (r f U^i) + \frac{\sigma}{c^2} e^i e_i \right] + T^0 \frac{dS}{d\tau} &= \\ = \frac{V^0}{2} \left( e^i e_i \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} - h^i h_i \frac{d\mu}{d\tau} \right) + 4 e^i e_i \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\mu} \right) + \\ + \frac{V^0}{c^2} (\mathcal{E} \mu - 1) L^i \frac{dU_i}{d\tau} \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

y en el caso de que  $\mathcal{E}$ ,  $\mu$  no dependan del tiempo propio, esta ecuación se reduce a

$$\left. \begin{aligned} U^i \frac{dP_i}{d\tau} + T^0 \frac{dS}{d\tau} + V^0 c^2 \left[ \nabla_i (r f U^i) + \frac{\sigma}{c^2} e^i e_i \right] &= \\ - \frac{V^0}{c^2} (\mathcal{E} \mu - 1) L^i \frac{dU_i}{d\tau} & \\ \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = 0; \quad \frac{d\mu}{d\tau} = 0 & \end{aligned} \right\} \quad (3.3.16)$$

El significado físico del último término de (3.3.15) o de (3.4.16) interpretamos como la pérdida de energía debida a la radiación electromagnética. Es de destacar que tal radiación no aparece en el caso de que el sistema describa globalmente una geodésica, ya que se cumple

$$\frac{dU^i}{d\tau} = 0$$

Evidentemente en los sistemas inerciales, según la fórmula anterior, no aparece el fenómeno de la radiación, resultado éste que se halla de acuerdo con la teoría clásica.

Los restantes términos de índole electromagnética que aparecen en las ecuaciones (3.3.15) y (3.3.16) representan pérdidas de energía, a causa de variación de volumen propio del sistema (producidos por los mismos), ya que basta sustituir la (3.3.14) en la (2.2.3) para confirmarlo, en el caso de considerar procesos localmente isoentrópicos.

#### 3.4. NUEVAS PROPIEDADES DE LA MAGNETOHIDRODINÁMICA IDEAL

Entenderemos por «magnetohidrodinámica ideal» tal como se suele definir en LICHNEROWICZ (14), pág. 93, así como en ARCIDIACONO (19), pág. 154; es decir: como «el estudio de las propiedades de un fluido perfecto relativista como conductibilidad eléctrica infinita».

De esta definición se deduce inmediatamente que si el vector corriente eléctrica se conserva finito, el término  $\sigma e^i$  también debe ser finito, con lo que el campo eléctrico será nulo, y en consecuencia el vector de Poynting generalizado se anulará. Entonces la expresión (3.3.14) se reducirá a

$$U^K \nabla_i J_{\cdot K}^i = \frac{1}{2} h_i h^i \frac{d\mu}{d\tau} \quad (3.4.1)$$

que sustituyendo en (2.1.4) resulta

$R_{\mu}$  (3.4.1): Ecuación fundamental de la magnetohidrodinámica ideal

$$U^i \frac{dP_i}{d\tau} + T^0 \frac{dS}{d\tau} + V^0 c^2 \nabla_i (rfU^i) = -\frac{1}{2} V^0 h^i h_i \frac{d\mu}{d\tau} \quad (3.4.2)$$

y en el caso de que  $\mu$  no dependa del tiempo propio, queda reducida a su vez

$$U^i \frac{dP_i}{d\tau} + T^0 \frac{dS}{d\tau} + V^0 c^2 \nabla_i (rfU^i) = 0 \quad (3.4.3)$$

es decir: en tal circunstancia la magnetohidrodinámica ideal se comporta como si el fluido perfecto no estuviera cargado, en sus transformaciones energéticas.

Estudiamos a continuación la variación del volumen propio, expresión fácilmente calculable con tal de sustituir la (3.4.1) en (2.2.3), en caso de tratar con procesos localmente isoentrópicos,

$R_n$  (3.4.2): Variación del volumen propio en las transformaciones localmente isoentrópicas:

$$\frac{d}{d\tau} l_n V^0 = \nabla_i U^i + \frac{1}{2c^2 rf} h_i h^i \frac{d\mu}{d\tau} \quad (3.4.4)$$

Nos hallamos de nuevo ante un resultado parecido al presentado en (2.4.10) respecto al efecto «pinch» de una sustancia en su estado de plasma. Pero el caso presente ofrece dos posibilidades: dilatación del fluido si la variación de la permeabilidad magnética respecto al tiempo propio es positiva, o compresión del mismo en el caso de que la citada variación de la permeabilidad sea negativa.

Finalmente, si la permeabilidad magnética no depende del tiempo propio, la expresión (3.4.1) toma el valor cero. Ahora bien, de la definición de la magnetohidrodinámica ideal, se llega a la conclusión (tal como hemos razonado) de que  $\sigma e^i$  fuera finito. Si nosotros imponemos la condición adicional de que

$$U^K \nabla_i \mathcal{J}_K^i = 0$$

se cumplirá las condiciones para que se verifique el teorema (2.3.1), es decir que «la densidad propia de carga y la densidad propia de la masa propia material es constante a lo largo de las líneas de corriente en un proceso localmente adiabático».

## PARTE IV

Son varios los autores que han propuesto sendas definiciones para el concepto de incompresibilidad, algunas de ellas parecen diferir considerablemente de la propugnada por los académicos de la Lengua (el que no se puede comprimir o reducir a menor volumen); es más cada una de ellas excluye las restantes. Así por ejemplo: la definición propuesta por LICHNEROWICZ (7), pág. 91 (fluido cuya velocidad de su onda hidrodinámica coincide con la de la luz), niega la incompresibilidad de EDDINGTON (1) (traza del tensor impulso-energía constante) por haberse demostrado, en el marco de la relatividad restringida (SYNGE (10), págs. 307, 308), que la velocidad de su onda hidrodinámica es  $c/\sqrt{3}$ .

SYNGE sostiene la opinión de SCHWARZSCHILD, en cuanto que en su artículo (3) considera como fluidos incompresibles aquéllos que cumplen que  $\mu^0 = \text{constante}$ , es decir que permanezca invariable la densidad macroscópica o densidad masa-energía; y se opone a la definición de EDDINGTON por considerar que «convierte en incompresible la radiación electromagnética».

No obstante, si aceptamos la definición de incompresibilidad de SCHWARZSCHILD, se demuestra (siempre en relatividad restringida: SYNGE (10), págs. 307, 308) que la velocidad del sonido en dicho medio se hace infinita, lo que la definición de SCHWARZSCHILD es contradictoria con los principios de la teoría de la relatividad.

Nuestro propósito es proponer una nueva definición de incompresibilidad que, sin perder el carácter intuitivo de la misma, englobe en lo posible las definiciones anteriores.

#### 4.1. DEFINICIÓN DE PROCESOS INCOMPRESIBLES, PROPIEDADES PRIMERAS

Distinguiremos el concepto de proceso incompresible del concepto de fluido incompresible, del mismo modo que en mecánica se distingue entre «desplazamiento rígido de un sistema» y un «sistema rígido». En termodinámica clásica tenemos un ejemplo claro en los gases ideales, respecto a las diferencias conceptuales que pretendemos exponer: un gas ideal puede experimentar procesos isócoros; sin que, por ello, sea incompresible.

De acuerdo con lo que acabamos de indicar, estableceremos las siguientes definiciones:

$D_n$  (4.1.1): Llamaremos proceso incompresible a toda transformación termodinámica que se verifique

$$\nabla_i (fU^i) = 0$$

durante la misma.

$D_n$  (4.1.2): Diremos que un fluido es incompresible si todos sus procesos se realizan incompresiblemente, de acuerdo con  $D_n$  (4.1.1).

Nos limitaremos a estudiar únicamente fluidos perfectos neutros, con lo que a continuación vamos a establecer algunos teoremas que caracterizarán en lo sucesivo tales fluidos:

$T_n$  (4.1.1): Dado un fluido perfecto incompresible, tal que se conserve la masa material en un proceso isobárico, su volumen propio no varía durante el mismo.

Demostración: Tomemos como fórmula de partida la (2.2.2), particularizada al caso de ser un fluido perfecto neutro:

$$T^0 \frac{dS}{d\tau} + c^2 m^0 f \nabla_i U^i - c^2 r f \frac{dV^0}{d\tau} = 0 \quad (4.1.1)$$

Por conservarse la masa material, de acuerdo con 1.4,  $T' = T^0$ , y entonces los dos primeros términos de la ecuación precedente se reducen con la ayuda de (1.1.1) a

$$T^0 \frac{dS}{d\tau} + c^2 m^0 f \nabla_i U^i = - \frac{m^0}{r} \frac{dp}{d\tau} = - V^0 \frac{dp}{d\tau}$$

Debido a esto, la ecuación de partida toma la sencilla forma

$$V^0 dp + c^2 r f dV^0 = 0 \quad (4.1.2)$$

pero como el teorema exige que el proceso sea isobárico,  $dp = 0$ , con lo que debe cumplirse en consecuencia

$$dV^0 = 0$$

c. s. q. d.

En el supuesto de que no se conserve la presión, la variación del volumen propio viene expresado por la fórmula (consecuencia de (4.1.2))

$$dV^0 = - \frac{V^0}{c^2 r_f} dp \quad (4.1.3)$$

es decir

$R_n(4.1.2)$ : Un aumento (disminución) de presión corresponde a una disminución (aumento) de volumen propio, en el supuesto de que se conserve la masa material.

Por otra parte, si calculamos el coeficiente de compresibilidad

$$K = - \frac{1}{V^0} \frac{dV^0}{dp}$$

obtenemos de (4.1.3) que tal coeficiente no es idénticamente cero; sino que toma el valor

$R_n(4.1.3)$ : Coeficiente de compresibilidad para un fluido perfecto incompresible:

$$K = \frac{1}{c^2 r_f} \quad (4.1.4)$$

Estos últimos resultados parecen que no se hallen de acuerdo con la definición idiomática de incompresibilidad, citada anteriormente. En realidad este desacuerdo es aparente, ya que en la «vida ordinaria» la teoría relativista se reduce a la física clásica como caso límite, con tal de hacer tender  $c$  al infinito, y, como consecuencia, el segundo miembro de (4.1.3) tiende a cero, resultado además independiente de cualquier variable termodinámica. Asimismo, el citado coeficiente de compresibilidad también se reduce a cero.

Si bien LICHNEROWICZ (COLL (20) pág. 8) define el volumen dinámico como una variable intensiva resultante de multiplicar el índice del fluido por el volumen específico del mismo, adoptaremos (de acuerdo con nuestro propósito de extender la aplicación de las variables globales a la termodinámica relativista) la siguiente definición para los volúmenes dinámicos globales:

$D^a$  (4.2.3): Llamaremos volumen dinámico global  $D$ , de volumen propio  $V^0$  y de índice  $f, a$

$$D = fV^0$$

Los volúmenes dinámicos, así definidos, quedan caracterizados por la propiedad explicitada en el siguiente teorema:

$T_{\text{a}}$ (4.1.4): Dado un proceso localmente isoentrópico, la condición necesaria y suficiente para que un fluido perfecto neutro sea incompresible es que se conserve su volumen dinámico a lo largo de sus líneas de corriente.

Demostración: De nuevo elegimos la ecuación (2.2.2) que, particularizada al caso presente, toma la forma

$$V^0 \nabla_i (fU^i) - V^0 \frac{df}{d\tau} - f \frac{dV^0}{d\tau} = 0$$

y por la definición (4.1.3) es reducida a

$$V^0 \nabla_i (fU^i) - \frac{dD}{d\tau} = 0 \quad (4.1.5)$$

entonces vemos que si exigimos la incompresibilidad en el fluido, el primer término de esta última ecuación es nulo por definición, con lo que

$$\frac{dD}{d\tau} = 0$$

es decir: el volumen dinámico es conservado a lo largo de las líneas de corriente (condición necesaria).

Para la demostración de la condición suficiente se procede con un razonamiento similar: si el volumen dinámico se conserva a lo largo de las líneas de corriente, se cumple la condición (4.1.6), y por la ecuación (4.1.5) resulta ser incompresible.

c. s. q. d.

Un resultado parecido se conoce para el volumen dinámico específico, pues se demuestra (LICHNEROWICZ (14), pág. 51) que esta magnitud es función de la entropía específica.

Sólo nos resta añadir que los teoremas expuestos en el presente epígrafe se hacen extensivos también a los fluidos perfectos que realizan procesos incompresibles, como es obvio.

#### 4.2. ESTUDIO DEL PROBLEMA DE CAUCHY DE UN FLUIDO PERFECTO SIN CONDUCCIÓN DE CALOR EN PROCESOS INCOMPRESIBLES

Una de las hipótesis admitidas en termodinámica relativista es la condición

$$\nabla_i (\rho U^i) = 0 \quad (4.1.2)$$

(PHAM MAU QUAN (16); COLL (20)) lo que trae consigo el hecho de que el proceso sea localmente adiabático (en el supuesto de un fluido neutro). Por otra parte, en el momento de que pretenda determinar la evolución de un sistema a partir de unos valores iniciales, no es posible conocer su completa evolución si no se recurre a la condición (4.2.1) (ver LICHNEROWICZ (14), pág. 32). Por nuestra parte, opinamos que el estudio hecho es parcial en el sentido de que se limita a una sola clase de transformaciones termodinámicas.

Creemos que la ecuación (4.2.1), en vez de formar parte del conjunto de postulados específicos de la presente teoría, caracteriza, en cambio, ciertos y concretos procesos termodinámicos. Es decir que en relatividad, como en termodinámica clásica, no debe bastar la función de estado para caracterizar un fluido en un proceso termodinámico, sino es preciso además tener una ecuación, la cual podría interpretarse como la expresión característica de la transformación termodinámica a la que está sometido un fluido.

De acuerdo con lo que acabamos de exponer y para mayor claridad en la exposición, adoptaremos la siguiente definición:

$D_{\rho}$  (4.2.1): Llamaremos procesos adiabáticos a los procesos localmente adiabáticos de fluidos perfectos neutros, y por lo tanto son caracterizados por (4.2.1)

Tales procesos adiabáticos, conjuntamente con los procesos incompresibles, definidos en el epígrafe anterior, serán los únicos que nos disponemos a analizar en lo que resta de artículo.

Pasemos a continuación al planteamiento parcial del problema de Cauchy para procesos incompresibles de fluidos perfectos neutros, sin exigir la condición (4.2.1):

Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie de ecuación local

$$\bar{x}^4 = 0$$

en donde se supone conocidas las variables  $s^0, m^0, f, r, p, T^0, T', U_i$  en toda la hipersuperficie  $\Sigma$ . Este conjunto de valores forman, lo que se suele llamar «datos de Cauchy».

De los datos de Cauchy precedentes, es inmediato deducir los valores que toman las expresiones

$$\partial_o s^0; \partial_o m^0; \partial_o f; \partial_o r; \partial_o p; \partial_o U^i; \partial_o T^0; \partial_o T' \quad (4.2.2.)$$

en toda la hipersuperficie  $\Sigma$ , ya que las coordenadas (respecto a las cuales se derivan) se hallan inmersas en la citada hipersuperficie. Por consiguiente, podemos considerar estos valores como elementos integrantes de los datos de Cauchy.

Evidentemente, quedan las derivadas de las variables termodinámicas respecto a  $x^4$  sin determinar y que en total suman 11 magnitudes desconocidas, las cuales serán preciso calcular sus valores, si pretendemos conocer la evolución del sistema termodinámico.

Con relación a las derivadas parciales de la temperatura específica y de la temperatura global respecto a  $x^4$ , no es posible conocerlas, a saber, ni aún con la conocida ecuación de Fourier (como ha planteado PHAM MAU QUAN (16)). Si a esta dificultad añadimos la posible distinción (establecida en el epígrafe 1.4) entre la temperatura global y la temperatura específica, inferimos que tal problema debe de ser considerablemente difícil, dificultad que será acrecentada si tenemos en cuenta los trabajos de KRANYS (12) y de BOILLAT (17).

Adoptaremos en el presente epígrafe incluir en los «datos de Cauchy» no sólo las primeras derivadas de las temperaturas, sino también, si conviene por exigencias de su completa determinación, las derivadas de orden superior respecto a  $x^4$ .

Tomemos, pues, como incógnitas el conjunto formado por

$$\partial_4 s^0; \partial_4 m^0; \partial_4 f; \partial_4 r; \partial_4 p; \partial_4 U^i \quad (4.2.3)$$

en total nueve incógnitas, las cuales tendrán valores calculables si disponemos de suficientes y adecuadas ecuaciones.

Repasemos a continuación las ecuaciones a este respecto:

En primer lugar tenemos de la ecuación fundamental (1.2.7)

$$(T^0 s^0 - c^2 f) \partial_4 m^0 + T^0 m^0 \partial_4 s^0 - c^2 m^0 \partial_4 f + \frac{m^0}{r} \partial_4 \dot{p} = A(d, e) \quad (4.2.4)$$

y de la ecuación (1.1.1), se deduce

$$T^0 \partial_4 s^0 - c^2 \partial_4 f + \frac{1}{r} \partial_4 \dot{p} = B(d, c) \quad (4.2.5)$$

con los símbolos  $A(d, c)$ ,  $B(d, c)$  queremos indicar funciones dependientes exclusivamente de los datos de Cauchy.

En cuanto a las condiciones de conservación, partimos, desde luego, del tensor impulso-energía

$$T^{ij} = r f U^i U^j + \dot{p} g^{ij}$$

que a anular su derivadas covariantes y separar las incógnitas de las funciones dependientes de los datos de Cauchy, hay que distinguir los casos en que  $j = \varrho$ ,  $j = 4$ . Para  $j = \varrho$  se tiene

$$\begin{aligned} r f U^4 \partial_4 U^e + r f U^e \partial_4 U^4 + U^4 U^e r \partial_4 f + \\ + U^4 U^e f \partial_4 r + g^{4e} \partial_4 \dot{p} = C^e(d, c) \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

y para  $j = 4$  resulta

$$2 r U^4 \partial_4 U^4 + (U^4)^2 r \partial_4 f + (U^4)^2 f \partial_4 r + g^{44} \partial_4 \dot{p} = C^4(d, c) \quad (4.2.7)$$

también los símbolos  $C^j(d, c)$  representan funciones de parecida índole a las  $A(d, c)$  y  $B(d, c)$ .

De la expresión

$$U_j \nabla_i T^{ij} = 0$$

deducimos sin dificultad la ecuación

$$-c^2 r f \partial_4 U^4 - c^2 r U^4 \partial_4 f - c^2 f U^4 \partial_4 r + U_4 \partial_4 \dot{p} = D(d, c) \quad (4.2.8)$$

sin más de hacer uso de la identidad relativista  $U^i U_i = -c^2$

Consideremos la función de estado, que, por conveniencia, elegimos del tipo

$$r = r(f, s^0)$$

con lo que nos conducen los cálculos a

$$\partial_4 r - r_j \partial_4 f - r_{s^0} \partial_4 s^0 = E(d, c) \quad (4.2.9)$$

Finalmente, de la condición de incompresibilidad, fácilmente obtenemos

$$U^4 \partial_4 f + f \partial_4 U^4 = F(d, c) \quad (4.2.10)$$

Las expresiones  $r_j$ ,  $r_{s^0}$  representan las derivadas parciales de  $r$  respecto a las variables, elegidas como independientes,  $f$ ,  $s^0$ . También en todos estos últimos casos los símbolos  $D(d, c)$ ,  $E(d, c)$  y  $F(d, c)$  son expresiones definidas por los datos de Cauchy únicamente. Además, en todos los cálculos realizados, hemos supuesto que  $U^4 \neq 0$ , lo que significa (en términos físicos) la eliminación de las ondas materiales en nuestro estudio (un análisis de las citadas ondas materiales se halla en el artículo de PHAM MAU QUAN (16)).

Fijémonos ahora que las fórmulas (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7), (4.2.8), (4.2.9) y (4.2.10) forman un sistema lineal de nueve ecuaciones con nueve incógnitas. Estas incógnitas son las que integran precisamente el conjunto (4.2.3). Para obtener unicidad de solución, y en consecuencia conocer la evolución de un fluido termodinámico, es necesario, como es de sobra sabido, que el determinante del sistema (constituido por los coeficientes de sus incógnitas) sea distinto de cero. Dicho determinante, si tenemos en consideración el tensor de Eckart

$$\gamma^{ii} = g^{ii} + U^i U^i / c^2 \quad (4.2.11)$$

toma el valor

$$U^4 (c^2 f - T^0 s^0) f^4 (r U^4)^3 [c^2 (T' f r_j + c^2 r_{s^0} f) \gamma^{44} - (T' r + c^2 r_{s^0} f) (U^4)^2] \neq 0 \quad (4.2.12)$$

De esta expresión obtenemos la información de que, aparte de exigir que no se anule  $f$ ,  $r$  (hecho ya conocido por los especialistas de esta disciplina), hemos de añadir la condición de que

$$c^2 f - T^0 s^0 \neq 0 \quad (4.2.13)$$

equivalente, como fácilmente puede comprobarse, a que la función de Gibbs no sea igual a  $-m^0 c^2$ .

Si planteásemos el problema de Cauchy para procesos adiabáticos, sustituiríamos la condición de incompresibilidad por la (4.2.1), de acuerdo con  $D_n$  (4.2.1). Entonces la ecuación (4.2.9) quedaría reemplazada por

$$\partial_4 r - r_f \partial_4 f = E'(d, c) \quad (4.2.9)$$

con lo que en los procesos adiabáticos, la condición de evolución del sistema es

$$(c^2 f - T^0 s^0) c^2 f^4 (r U^4)^3 [c^2 r \gamma^{44} - r_f f (U^4)^2] \neq 0 \quad (4.2.14)$$

Observemos, pues, que también se exige la condición (4.2.13) para obtener una evolución determinada del sistema termodinámico, resultando éste que no se deduce de los trabajos, que, a este respecto nos son conocidos (LICHNEROWICZ (14), PHAM MAU QUAN (16), COLL (20)), por ignorarse en ellos la ecuación (1.1.7).

Podemos resumir todo lo que acabamos de exponer en el siguiente teorema:

$T_n$  (4.2.1): Tanto los procesos adiabáticos como los incompresibles de fluidos perfectos neutros (sin conducción de calor) exigen, como condición necesaria, que la función de Gibbs no tome el valor  $-m^0 c^2$  para que el problema de Cauchy tenga solución única.

Como consecuencia del presente teorema con el  $T_n$  (2.2.3) deducimos que

$R_n$  (4.2.2): Por razones de evolución determinada de un sistema termodinámico, se tiene que en un proceso adiabático la masa material permanece constante.

Ahora bien: tales procesos están caracterizados por (4.2.1), lo que explica la suposición tomada por algunos autores (PHAM MAU QUAN (16), COLL (20), también LICHNEROWICZ (14), pág. 29, menciona tal suposición, aunque no de manera explícita) de considerar la (4.2.1) como hipótesis de conservación de materia.

Sin embargo, en nuestro contexto la condición (4.2.1) no es privativa de los sistemas que se conserve la masa material, pues basta tomar un medio incompresible no adiabático, para que no se cumpla

la (4.2.1) y nada nos impide afirmar, a saber, que tales sistemas puede conservarse la masa material.

Una segunda alternativa sería aceptar la (4.2.1) como hipótesis de conservación de masa material de acuerdo con la mayoría de los especialistas; en consecuencia forzosamente deberíamos admitir la no conservación de materia en los fluidos perfectos incompresibles no adiabáticos.

Se podría creer resuelta la cuestión planteada con aceptar esta última alternativa; pero, como notaremos en los siguientes epígrafes y concretamente en el dedicado a «los fluidos de Eddington», si bien no la contradicen todo parece indicar su invalidez.

#### 4.3. HIPERSUPERFICIES CARACTERÍSTICAS DE FLUIDOS PERFECTOS INCOMPRESIBLES SIN CONDUCCIÓN DE CALOR

El problema de Cauchy tiene como contrapartida el estudio de las hipersuperficies características. Estas son aquellas hipersuperficies en donde los datos de Cauchy no determinan, en forma única, la evolución de un fluido.

En el caso que nos ocupa, basta anular la expresión (4.2.12) para convertir  $\Sigma$  en una hipersuperficie característica; además, hemos de preservar la condición (4.2.13), ya que de lo contrario quedaría reducido a una expresión idénticamente nula. Entónces es necesario anular

$$(c^2 f r_f T' + c^4 r_{s_0} f) \gamma^{44} - (T' r + c^2 r_{s_0} f) U^4 U^4 = 0$$

Ahora bien: dijimos que la hipersuperficie  $\Sigma$  tenía como ecuación

$$\bar{x}^2 = 0$$

en coordenadas locales. Si pretendemos hallar su expresión en otro sistema de coordenadas arbitrario, hemos de tener en consideración (tal como lo presenta SYNGE (11), pág. 226) que las ecuaciones con las que se relaciona con el anterior sistema de coordenadas serán del tipo

$$\bar{x}^1 = x^1; \quad \bar{x}^2 = x^2; \quad \bar{x}^3 = x^3; \quad \bar{x}^4 = \varphi(x^1, x^2, x^3, x^4)$$

de donde resulta, por una sencilla transformación tensorial que  $\varphi$  responderá a la siguiente ecuación diferencial

$$(c^2 f r_f + c^4 r_{s_0} f) \gamma^{ij} \partial_i \varphi \partial_j \varphi - (T' r + c^2 r_{s_0} f) U^i U^j \partial_i \varphi \partial_j \varphi = 0 \quad (4.3.1)$$

Al calcular la velocidad de la onda hidrodinámica, hemos de tener presente la conocida fórmula (véase LICHNEROWICZ (14), págs. 42 y 43; PHAM MAU QUAN (16)):

$$V^2 = \frac{U^i U^j \partial_i \varphi \partial_j \varphi}{\gamma^{ij} \partial_i \varphi \partial_j \varphi} \quad (4.3.2)$$

que aplicada al estudio que estamos realizando resulta de (4.3.1) la expresión para la velocidad

$$V^2 = c^2 \frac{T' f r_f + c^2 r_{s_0} f}{T' r + c^2 r_{s_0} f} \quad (4.3.3)$$

Como consecuencia de (4.3.3), enunciemos el siguiente resultado:

$R_n$  (4.3.1): La velocidad de la onda hidrodinámica de un fluido incompresible neutro y sin conducción de calor tiende a la velocidad de la luz, a medida que  $T'$  se aproxima a 0.

Pese a que este resultado se halla condicionado a bastantes restricciones, analizaremos las experiencias que la física de bajas temperaturas dedica a este respecto. Nos apoyaremos para nuestra discusión en la obra de PINES-NOZIERES (13):

Se conoce, por la teoría de LANDAU, que ciertos líquidos, como por ejemplo  $^3\text{He}$ , que a bajas temperaturas se comportan en estado de superfluidez, lo que podríamos asociar a la idea de ser tales líquidos perfectos. Por otra parte la citada teoría predice la existencia de ondas de sonido: «sonido cero» a temperaturas inferiores a la temperatura de Fermi.

Efectivamente, KEEN (la citada obra (13), pág. 78) encontró que la velocidad del sonido para temperaturas alrededor de los  $0,09^\circ K$  daba un brusco salto de 181 m/s a 200 m/s (números redondos); mientras que GAVORET (en 1965, dos años más tarde a la experiencia de KEEN) calculaba un valor teórico de 191 m/s aproximadamente.

Ni aún considerando el incremento de velocidad observada por KENN, nos es lícito tomar como experiencia de contrastación la

validez de  $R_*$  (4.3.1). En primer lugar, conocemos únicamente una sola experiencia, con lo que no nos es posible hacer extrapolaciones. Por otra parte, experiencias conducentes a confirmar el estado de superfluidez de  $^3\text{He}$  mostraron que la de ANDERSON (en 1961) evidenciaba la transición a temperatura del orden de  $0,008^\circ K$ ; mientras que la experiencia de PESHKOV (1965) asignaba la transición a la temperatura de  $0,0055^\circ K$ , aunque es considerada de dudoso resultado, pues en este mismo año WHEATLEY y sus colaboradores no encuentran el estado de su perfluidez hasta  $0,0036^\circ K$ .

Vemos, por consiguiente, que la temperatura con la que KEEN realizó su experiencia se halla por encima a la que necesita para llegar al estado de superfluidez en el  $^3\text{He}$ , condición que se exige para la validez de  $R_*$  (4.3.1).

En el supuesto de que se haya realizado tales experiencias a las temperaturas en donde se detecta el estado de superfluidez, creemos que debe de haber alguna discrepancia, pues a bajas temperaturas se hace sentir los efectos cuánticos, efectos que no están previstos por la teoría relativista empleada. Otra cuestión que debe tenerse en consideración (y por consiguiente estudiarla en ulteriores investigaciones) es si el  $^3\text{He}$  en su estado de superfluidez cumple la condición de incompresibilidad dada por  $D_*$  (4.1.2), o en el caso contrario hasta qué punto puede considerarse como incompresible.

En el estudio de las ondas hidrodinámicas en procesos adiabáticos, observamos (con tal de anular la (4.2.14) que también es necesario el cumplimiento de (4.2.13); es decir que nos es permitido resumir el siguiente resultado:

$R_*$  (4.3.2): Tanto en los procesos incompresibles como en los adiabáticos, la existencia de ondas hidrodinámicas exige que la función de Gibbs no sea igual a  $-m^0 c^2$ .

Al imponer la condición de que los procesos incompresibles sean a la vez adiabáticos, se obtiene como expresión de la onda hidrodinámica

$$V^2 = c^2 \frac{f \gamma_f}{\gamma} \quad (4.3.4)$$

A la vista de (4.3.4), parece que este resultado no concuerde con los establecidos por LICHNEROWICZ, y más aún con la definición de

incompresibilidad de este mismo autor. No obstante, vamos a demostrar todo lo contrario:

Por  $R_n$  (4.3.2) junto con la condición de ser un proceso adiabático, se infiere, por el teorema (2.2.1) que tales transformaciones conservan la masa material; y, en consecuencia, son localmente isoentrópicos. Entonces se verifica el teorema (4.1.4), lo que conduce a

$$\frac{dD}{d\tau} = m^0 \frac{d}{d\tau} (v^0 f) = m^0 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{f}{r} \right) = 0$$

equivalente a considerar

$$\frac{f}{r} = \text{const.} \quad (4.3.5)$$

a lo largo de las líneas de corriente.

Si ahora derivamos la (4.3.5) respecto a  $f$ , ocurre que

$$r - r_f f = 0$$

de donde resulta de inmediato que la fórmula (4.3.4) es reducida a

$$v = c$$

con lo que se halla de acuerdo con la definición de incompresibilidad de LICHNEROWICZ (7), pág. 51.

Observemos que el tercer principio de la termodinámica corrobora en afirmar el resultado, pues según el citado principio (en la versión de Nernst) sostiene que «si la densidad del medio es finita, las transformaciones termodinámicas se realizan a entropía constante en el cero absoluto» (véase AGUILAR (8), pág. 255). Por este principio, debe cumplirse que todos procesos incompresibles sean adiabáticos a tal temperatura; y, en consecuencia de lo que acabamos de ver, debe corresponder una velocidad para su onda hidrodinámica coincidente con la de la luz.

Como último resultado del epígrafe presente diremos que

$R_n$  (4.3.3): A cero absoluto, no puede existir creación ni aniquilación de materia.

Su justificación radica en el hecho de que a ser isoentrópico el medio a tal temperatura, resulta que debe conservarse la masa material.

No obstante, observamos ciertas discrepancias entre este último resultado y el principio general de que los fenómenos radiactivos son independientes de la temperatura. Una vez más nos inclinamos a creer que la física de bajas temperaturas no debe responder a un tratamiento exclusivamente relativista, ya que, como hemos tenido ocasión de mencionar, a citadas temperaturas tenemos que considerar efectos cuánticos.

Por otra parte, encontramos un argumento fenomenológico en favor de  $R_n$  (4.3.3), consistente en que, si a cero absoluto no se conservase la masa material, habría desprendimiento de calor de acuerdo con  $T_n$  (1.6.1), y por consiguiente habría aumento de temperatura.

#### 4.4. FLUIDO INCOMPRESIBLE DE EDDINGTON Y FLUIDO ADIABÁTICO DE EDDINGTON

Fieles a nuestro propósito de ampliar el concepto de incompresibilidad de manera que englobe las diferentes definiciones propuestas por autores distintos, emplearemos el criterio adoptado, consistente en tener en cuenta una ecuación más distinta de la función de estado, y que acompañe a ésta para completar la definición de un fluido termodinámico relativista. Por tal motivo, modificaremos la definición propuesta por EDDINGTON (1), pág. 122, de acuerdo con el criterio establecido:

$D_n$  (4.4.1): Llamaremos fluido incompresible de EDDINGTON a un fluido incompresible tal que su función de estado viene representada por

$$T_i^i = \text{constante}$$

Ahora bien, de la estructura del tensor impulso-energía, la función de estado toma la forma

$$-c^2 r f + 4p = \alpha = \text{const.} \quad (4.4.1.)$$

de donde, por (4.1.4), deducimos de inmediato

$R_n$  (4.4.1): Coeficiente de compresibilidad de un fluido incompresible de EDDINGTON

$$K = \frac{1}{4p + \alpha}$$

naturalmente para la validez de este coeficiente se necesita la conservación de la masa material.

Al leer la crítica que SYNGE (3) dedica al concepto de incompresibilidad establecido por EDDINGTON, notamos ciertos escrúpulos en aquel autor en aceptar como incompresible la radiación electromagnética, si se admite las ideas de este segundo autor. Con la definición establecida por nosotros, no se infiere que el campo electromagnético sea incompresible, por la sencilla razón de que, si bien la traza del tensor de MAXWELL-MINKOWSKI toma en todo momento el valor cero (constante en consecuencia), carece de sentido exigir que se cumpla la definición (4.1.2), definición que implica la existencia de un índice en el medio; y precisamente el campo electromagnético se propone de tal forma que no ha lugar definir en el mismo un índice como en el caso de un fluido perfecto.

Hechas estas observaciones en defensa del fluido incompresible de EDDINGTON, calculemos a continuación su onda hidrodinámica. Para ello, obtenemos de la función de estado la expresión (4.2.9) explicitada en este fluido por

$$4 \partial_4 p - c^2 f \partial_4 r - c^2 r \partial_4 f = G(d, c)$$

con lo que se deduce la expresión de su hipersuperficie característica:

$$c^2 \gamma^{ij} \partial_i \varphi \partial_j \varphi - 3 U^i U^j \partial_i \varphi \partial_j \varphi = 0$$

y a partir de la misma, su velocidad con tal de aplicar la (4.3.2)

$$V = c/\sqrt{3} \tag{4.4.2}$$

Este valor para la velocidad de la onda hidrodinámica es el mismo que SYNGE ((10), págs. 307 y 308) obtiene con el procedimiento clásico aplicado a las ecuaciones relativistas de la teoría restringida.

La novedad de (4.4.2) radica en el tratamiento seguido. Nosotros hemos considerado el fluido de EDDINGTON como un fluido termodinámico; mientras que el citado autor no tiene en cuenta este hecho. Por otra parte, y debido al carácter de invariante relativista que presenta la ecuación fundamental (1.1.7), podemos generalizar los cálculos realizados, con tal de postular su validez de la relatividad generalizada. Así pues, el resultado (4.4.2) sigue manteniéndose su validez en la teoría general.

Observemos el hecho curioso de que, al ser su velocidad «hidrodinámica» inferior a la de la luz, el fluido incompresible de EDDINGTON no puede presentar procesos adiabáticos (pues de lo contrario su velocidad sería  $c$ ), o dicho de otro modo: un fluido de EDDINGTON que realiza procesos adiabáticos deja de ser incompresible. En tal caso llamaremos FLUIDO ADIABÁTICO DE EDDINGTON.

Si pretendemos calcular la velocidad de la onda hidrodinámica de un fluido adiabático de EDDINGTON, hemos de sustituir la condición (4.1.1) por la (4.2.1) en todos sus cálculos. Una simple inspección de las expresiones empleadas y de las obtenidas en los pasos intermedios, se llega a la conclusión de que no es necesario realizar todos los cálculos de nuevo, sino que basta intercambiar la  $f$  y la  $r$  en los citados cálculos, con lo que se obtiene la misma velocidad (4.4.1) que para el caso de incompresibilidad en el fluido de EDDINGTON. Como resumen de lo expuesto, daremos el siguiente resultado:

$R_n$  (4.4.2): La velocidad de la onda hidrodinámica para un fluido incompresible de EDDINGTON como para un fluido adiabático de EDDINGTON es la misma, y cuyo valor

$$V = c/\sqrt{3}$$

#### 4.5. ESTUDIO SOBRE EL EQUILIBRIO DE UNA ESFERA DE SCHWARZSCHILD INMERSA EN SU PROPIO CAMPO GRAVITACIONAL

Es muy conocida la solución que dio SCHWARZSCHILD a tal problema, con el fin de hallar una métrica para el interior de una esfera «homogénea». Aparte de este fin primario, se obtuvo una fórmula que nos relaciona la presión (del interior de la citada esfera) en función de la distancia al centro de la misma.

A las críticas que EDDINGTON hizo a las hipótesis de incompresibilidad establecida por SCHWARZSCHILD sólo añadiremos, tal como expone el mismo EDDINGTON (1), págs. 169 y 170, que la fórmula referente a la distribución de presión predice un límite superior del radio de las estrellas. Concretamente, si consideramos esferas de agua, el radio límite es de 370 millones de kilómetros como límite superior. Este límite predicho por la teoría es aproximadamente el doble del radio que se asigna a la estrella Betelgeuse. Años más tarde SEN (2) encontró (empleando el concepto de incompresibilidad de

EDDINGTON), por métodos aproximados, que el radio máximo de una esfera de agua tenía que reducirse a 230 millones.

El propósito de este epígrafe es considerar la «esfera de Schwarzschild» como un sistema termodinámico, y tratar de replantear su equilibrio (de tipo gravitacional) como tales sistemas.

La principal dificultad que encontramos es que una esfera de Schwarzschild no se puede considerar como un solo sistema termodinámico, pues la presión, como por ejemplo, puede variar con la distancia al centro de la esfera: coordenada radial. Para solventar esta dificultad, estableceremos una hipótesis de trabajo:

$H_n(4.5.1)$ : Supondremos la esfera de Schwarzschild formada por estratos esféricos concéntricos, y de espesor lo suficientemente pequeño como para que los podamos considerar como sistemas de equilibrio termodinámicos.

En las presentes circunstancias, las variables termodinámicas dependerán de la coordenada radial de la citada esfera:

$$r = r(R); \quad p = p(R); \quad f = f(R)$$

y así todas las restantes.

Antes de proseguir con nuestro estudio, hemos de decir algunas palabras acerca de la incompresibilidad de SCHWARZSCHILD. En primer lugar vamos a expresarla en función de las variables termodinámicas, lo que resulta de inmediato si tenemos en consideración la identidad

$$\mu^0 + p/c^2 = rf$$

entonces la condición de incompresibilidad de SCHWARZSCHILD  $\mu^0 = \text{const.}$  es equivalente a

$$c^2 rf - p = \text{const.}$$

lo que nos daría velocidad infinita para su onda hidrodinámica, resultado idéntico al calculado en relatividad restringida (SYNGE (10)).

Ahora bien, por la hipótesis de trabajo anterior, nos induce a afirmar que la velocidad de la onda hidrodinámica en el interior de una esfera de Schwarzschild es infinita. Esto nos hace desestimar tal concepto de incompresibilidad, por considerarlo que se halla en contradicción con los principios de la Relatividad.

Con relación con el fluido de EDDINGTON, diremos que una de las diferencias existentes entre el trabajo de SEN y el que nos disponemos a desarrollar radica en el hecho de que nosotros discernimos entre la energía debida a la masa material y la energía interna de la esfera en cuestión, cosa que 1934 (fecha de la publicación de SEN), la termodinámica relativista no estaba lo suficientemente desarrollada como para tener en cuenta tal distinción.

Pasemos a plantear a continuación las ecuaciones del problema:

Es conocida la métrica de Schwarzschild para los casos generales (véase MOLLER (6), pág. 323), la cual responde a la forma genérica

$$ds^2 = a^2 dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + (-b) (cdt)^2 \quad (4.5.1)$$

donde  $a, b$  son funciones de la coordenada radial, a determinar según las características de cada fluido.

Además, de la misma fuente bibliográfica (pág. 288), se sabe que la simetría de Schwarzschild exige que sea estacionaria, con lo que  $x^z$  no debe depender de  $x^4$ . Esto hace que

$$U^i = (0, 0, 0, c/\sqrt{b}) \quad (4.2.5)$$

y en consecuencia

$$U_i = g_{ij} U^j = (0, 0, 0, -c\sqrt{b}) \quad (4.5.3)$$

Estudiemos las condiciones de conservación para un fluido incompresible:

$$\begin{aligned} \nabla_i T_j^i &= r U_j \nabla_i (f U^i) + f U^i \nabla_i (r U_j) + \delta_j^i \partial_i p = \\ &= f U^i U_j \partial_i r + f r U^i \nabla_i U_j + \partial_j p = 0 \end{aligned}$$

El primer término del desarrollo es nulo, pues  $r$ , según nuestra hipótesis de trabajo, sólo depende de  $x^1$ . Esto quiere decir que la única derivada parcial distinta de cero de  $r$  es la que corresponde a  $x^1$ ; no obstante esta derivada se tiene que multiplicar por  $U^1$ , pero por (4.5.2)  $U^1 = 0$ , lo que justifica la anulación del mencionado término. Entonces las condiciones de conservación toman la forma

$$f r U^i \nabla_i U_j + \partial_j p = 0 \quad (4.5.4)$$

Previo cálculo de la derivada covariante de  $U_j$ , se llega

$$U^i \nabla_i U_j = U^4 \nabla_4 U_j = \frac{c}{\sqrt{b}} \partial_4 U_j + c^2 \Gamma_4^{4j}$$

Como, por (4.5.3),  $U_j$  no depende de  $x^4$  (por ser la métrica estacionaria), el primer término de este último desarrollo es nulo, con lo que la (4.5.4) se reduce aún más

$$c^2 f r \Gamma_{4i}^4 + \partial_i p = 0 \quad (4.5.5)$$

Un sencillo cálculo nos daría las expresiones de los símbolos de Christoffel de segunda especie,

$$\Gamma_{41}^4 = \frac{b'}{2b}; \quad \Gamma_{42}^4 = \Gamma_{43}^4 = \Gamma_{44}^4 = 0; \quad b' = \frac{db}{dR}$$

en consecuencia, para  $j = 1$ , la (4.5.5) toma la forma

$$c^2 f r \frac{1}{2b} \frac{db}{dR} + \frac{dp}{dR} = 0$$

y para  $j \neq 1$ , las (4.5.5) se reducen a expresiones idénticamente nulas, ya que la hipótesis de trabajo exige que la presión dependa exclusivamente de  $x^1$ .

Ahora bien, la segunda condición que debe cumplir un fluido perfecto incompresible para que sea de EDDINGTON es que su función de estado sea del tipo

$$c^2 f r = 4p + \alpha$$

con lo que es posible simplificar la expresión (4.5.6)

$$\frac{db}{2b} = - \frac{dp}{4p + \alpha} \quad (4.5.7)$$

ecuación diferencial que, una vez integrada, se obtiene

$$b = \frac{A}{\sqrt{4p + \alpha}} \quad (4.5.8)$$

$A$ , una constante de integración.

Abordemos finalmente el estudio particular de las ecuaciones de Einstein. Como son muy conocidas las estructuras formales de las componentes del tensor de Einstein (véase MOLLER (6), pág. 324), nos limitaremos a exponerlas

$$G_1^1 = -\frac{1}{aR} \frac{b'}{b} + \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{1}{a}\right) - \lambda; \quad G_4^4 = \frac{a'}{a^2 R} + \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{a}\right) - \lambda$$

$$G_2^2 = G_3^3 = -\frac{1}{2a} \left[ \left(\frac{b'}{b}\right)' - \frac{1}{2} \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \left(\frac{b'}{b}\right)^2 + \frac{b'}{bR} - \frac{a'}{aR} \right] - \lambda$$

donde con el símbolo (') queremos indicar la derivada respecto a  $R$ , y  $\lambda$  es la constante cosmológica.

Cuando se plantea las ecuaciones de Einstein en la simetría de Schwarzschild, es conocido el hecho de que de las tres ecuaciones resultantes distintas de cero, sólo dos son independientes. Por comodidad y sencillez, se elige para el cálculo las dos primeras, elección que también adoptaremos en el presente estudio.

Estas ecuaciones toman en el caso que estamos estudiando el siguiente aspecto

$$-\frac{b'}{abR} + \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{1}{a}\right) - \lambda = Kp$$

$$\frac{a'}{a^2 R} + \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{1}{a}\right) - \lambda = K(c^2 r f - p) = K(3p + \alpha)$$

siendo  $K$  la constante de gravitación de Einstein. De la primera de ellas, despejamos  $\frac{b'}{b}$  y por la (4.5.7) obtenemos

$$\frac{2}{4p + \alpha} \frac{dp}{dR} = aR\lambda + K a p R - \frac{a}{R} + \frac{1}{R} \quad (4.5.9)$$

La segunda ecuación toma también una forma parecida

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dR} = K(3p + \alpha) a R + a R \lambda - \frac{a}{R} + \frac{1}{R} \quad (4.5.10)$$

Las expresiones (4.5.9) (4.5.10) forman un sistema de ecuaciones diferenciales que determinarán las funciones  $p(R)$ ,  $a(R)$  con las condiciones iniciales de que la métrica interior debe coincidir con la métrica

exterior en la superficie de la esfera, además de que  $p$  debe ser nula en dicha superficie. Conocidas estas funciones, podemos determinar la función  $b$  con la ayuda de (4.5.8). De este modo, conoceríamos la métrica espacio-temporal en el interior de una esfera de Schwarzschild, así como la distribución de la presión en esta zona.

Si hubieramos planteado este problema para un fluido adiabático de EDDINGTON, el cálculo nos hubiera conducido a las mismas ecuaciones, pues si intercambiamos  $f$ ,  $\nu$  en todas las expresiones que aparecen, observamos que éstos no sufren modificación sensible. Por consiguiente y como último resultado, tenemos

$R_{,r}$  (4.5.1): Las ecuaciones que rigen el comportamiento en el interior de una esfera de Schwarzschild, tanto por un fluido incompresible de EDDINGTON como por un fluido adiabático de EDDINGTON, son:

$$\frac{2}{4p + \alpha} \frac{dp}{dR} = aR\lambda + KapR - \frac{a}{R} + \frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dR} = R(3p + \alpha)aR + aR\lambda - \frac{a}{R} + \frac{1}{R}$$

$$b = \frac{A}{\sqrt{4p + \alpha}}$$

## REFERENCIAS

- (1) A. S. EDDINGTON: *The mathematical theory of relativity*, University Press Cambridge (1923).
- (2) N. S. SEN: *On the equilibrium of an incompressible sphere*, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 94, 550 (1934).
- (3) J. L. SYNGE: *Relativistic hydrodynamics*, Proc. Lond. Math. Soc. 43, 376 (1937).
- (4) C. ECKART: *The thermodynamics of irreversible processes*, Phys. Rev. 38, 919 (1940).
- (5) A. H. TAUB, Phys. Rev. 74, 328 (1948).
- (6) C. MOLLER: *The theory of Relativity*, Clarendon Press. Oxford (1952).
- (7) A. LICHTNEROWICZ: *Theories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson. Paris (1955).
- (8) J. AGUILAR: *Termodinámica y mecánica estadística*, Saber. Valencia (1962).
- (9) L. DE BROGLIE: *La thermodynamique de la particule isolée*, Gauthier-Villars. Paris (1964).
- (10) J. L. SYNGE: *Relativity, the special theory*, North-Holland, Amsterdam (1965).
- (11) J. L. SYNGE: *Relativity, the general theory*, North-Holland. Amsterdam (1966).
- (12) M. KRANYS: *Relativistic hydrodynamics with irreversible thermodynamics without the paradox of infinite velocity of heat conduction*, Nuovo Cim. 42B, 51 (1966).
- (13) D. PINES, P. NOZIERES: *Theory of quantum liquids*, W. A. Benjamin, Inc. New York (1966).
- (14) A. LICHTNEROWICZ: *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics*, W. A. Benjamin, Inc. New York (1967).
- (15) Y. CHOQUET-BRUHAT: *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Dunod. Paris (1968).
- (16) PHAM MAU QUAM: *Sur les équations des fluides chargés inductifs en relativité générale*, Rend. Mat. Roma 6, 2 (1969).
- (17) G. BOUJAT: *On the propagation of heat*, Lett. Nuovo Cim, 1, 256 (1969).
- (18) A. GUESSOUS: *Thermodynamique relativiste*, Gauthier-Villars. Paris (1970).
- (19) G. ARCIDIACONO: *L'Universo di De Sitter-Castelnuovo e la magnetoidrodinamica*, Coll. Math. 21, 149 (1970).
- (20) B. COLL: *Fronts de combustion en magnetohydrodynamique*,

