IMAGEN DE UN SISTEMA ORTOGONAL COMPLETO DE RAYOS POR UN OPERADOR LINEAL ACOTADO (*)

por

ANTONIO PLANS

ABSTRACT: Let $\mathcal{H}$ denote the real separable Hilbert space and $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ a bounded linear operator. Our goal is finding a complete orthogonal system of rays $\{r_n \mid n \in N\}$ whose image by A, $\{Ar_n \mid n \in N\}$ best approaches to orthogonal system. For A injective $(N(A) = o)$ -the only available case the following result is obtained: there exists a complete orthogonal system of rays, $\{r_n \mid n \in N\}$, such that its image $\{Ar_n \mid n \in N\}$ is complete *heterogonal* in $\bar{\Delta}_A$, holding moreover $\sum_1^\infty \alpha (s_n, Ar_n)^2 < \xi$, where $\xi < 0$ is arbitrarily small and $\{s_n \mid n \in N\}$ is a certain orthogonal complete system of rays in $\bar{\Delta}_A$.

1.— Sea E_p un espacio vectorial real p-dimensional, con producto interior. Sea $A : E_p \to E_p$ un operador lineal con $N(A) = o$. Entonces es sabido que existe una p-tupla de rayos ortogonales, cuya p-tupla imagen también es ortogonal.

Es de notar que, si A es hermítico, sólo tiene espectro puro de puntos. En cambio, en el espacio de Hilbert, que ahora vamos a considerar, aparece el *espectro continuo*.

2.— Designemos por $\mathcal{H}$ el espacio de Hilbert separable real. Sea $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal acotado, con dominio de valores Δ_A de dimensión infinita. Nos planteamos la existencia de un sistema ortogonal completo de rayos, cuyo sistema imagen sea también ortogonal. Es fácil probar que esto ocurre cuando y sólo cuando A, inyectivo $(N(A) = o)$, admite una representación polar $A = UH$, donde el operador hermítico H tiene *espectro puro de puntos*. Como

(*). El presente trabajo ha sido objeto de una comunicación en la IV Reunión de la Agrupación de Matemáticos de Expresión Latina, Palma de Mallorca, 19-23 Septiembre 1977.

ejemplo de esta situación, tenemos los operadores inyectivos completamente continuos.

Resulta pues que los operadores para los que no existe un sistema ortogonal completo de rayos, con imagen asimismo ortogonal, serán aquellos A que, en su representación polar, $A = UH$, H tenga también *espectro continuo*.

Nos planteamos entonces el problema de optimización, en los siguientes términos:

Dado un operador lineal acotado A, ¿existe siempre un sistema ortogonal completo de rayos, cuyo sistema imagen sea HETEROGONAL? (v. [3])*.

Distinguiremos dos casos:

3.— $N(A) = o$ (A inyectivo).

De acuerdo con un resultado de MURRAY [4], aplicado a esta situación, tendremos la existencia de una infinidad de subespacios lineales cerrados, ortogonales dos a dos, V^1, $V^2, \dots$, subtendiendo $\mathcal{H}$, tales que $A|_{V^i}$ $(\forall\, i \in N)$ tiene inverso acotado, siendo también los subespacios lineales cerrados $A(V^i)$ ortogonales dos a dos y subtendiendo $\overline{\Delta}_A$.

Sustituyamos ahora V^i $(\forall\, i \in N)$ por $\mathcal{H}$ (salvo el caso simple dim V^i finita), y actuemos como si $A(V^i) = V^i$. Al aplicar la representación polar, a efectos del problema propuesto, podemos referirnos a un operador acotado hermítico regular

$$H : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$
$$HH^{-1} = H^{-1}H = 1.$$

Caben dos casos:

a) H tiene espectro puro de puntos.

Entonces, evidentemente, existe un sistema ortogonal completo de rayos cuyo sistema imagen es también ortogonal (además completo).

b) H no tiene espectro puro de puntos.

Aplicamos entonces el siguiente resultado (WEYL - von NEUMANN, [7], [5]):

Dado un operador hermítico A, existe un operador de Hilbert-Schmidt X, con doble norma tan pequeña como se quiera, tal que $A + X$ tiene espectro puro de puntos.

---

* Los números entre corchetes se refieren a la bibliografía.

Dado, pues, $\varepsilon > 0$, al arbitrio, existirá el operador H_1, hermítico, con espectro puro de puntos, tal que

$$|||H_1 - H||| < \varepsilon.$$

Sea $\{e_n | n \in N\}$ un sistema o.n.c. de vectores propios de H_1:

$$H_1 e_n = \lambda_n e_n, \quad (n \in N)$$

donde λ_n es el valor propio correspondiente a e_n $(n \in N)$. Entonces tendremos, en particular,

$$\sum_1^\infty ||\lambda_n e_n - H e_n||^2 < \varepsilon^2.$$

Se verifica $\Big| ||H_1|| - ||H|| \Big| \leq ||H_1 - H|| \leq |||H_1 - H|||$.

Sabemos que, con ε suficientemente pequeño, al ser $||H_1 - H|| < < \varepsilon$, H_1 también será regular. Además, que si $||H_1 - H|| \to 0$, $||H_1^{-1} - H^{-1}|| \to 0$ (v. [2]). Se tiene

$$\sup |\lambda_n| = ||H_1||$$

$$\frac{1}{\inf |\lambda_n|} = ||H_1^{-1}||.$$

Por la regularidad de H_1, $\{|\lambda_n| \; |n \in N\}$ es una sucesión doblemente acotada.

Tomando $\varepsilon < 0$ suficientemente pequeño, siempre podemos conseguir:

$$||H_1|| = ||H|| + \eta, \quad |\eta| < \varepsilon$$

$$||H_1^{-1}|| = ||H^{-1}|| + \eta', \cdot |\eta'| < \varepsilon'. \qquad (\varepsilon' \leq \varepsilon)$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{||H^{-1}|| + \eta'} \leq |\lambda_n| \leq ||H|| + \eta.$$

Como, por lo anterior, η, η' pueden tomarse arbitrariamente pequeños, una vez *fijado* $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\{|\lambda_n| \; |n \in N\}$ es *doblemente acotada*, con cotas, inferior y superior, que llegan a diferir, tan poco como se quiera, de $\frac{1}{||H^{-1}||}$ y $||H||$, respectivamente.

Dado $\varepsilon > 0$, teníamos $\sum_1^\infty ||\lambda_n e_n - H e_n||^2 < \varepsilon^2 <==> \sum_1^\infty \lambda_n^2 ||e_n - \frac{1}{\lambda_n} H e_n||^2 < \varepsilon^2$.

De acuerdo con lo anterior, equivalentemente,

$$\sum_1^\infty ||e_n - \frac{1}{\lambda_n} H e_n||^2 < \delta^2,$$

donde $\delta > 0$ puede tomarse arbitrariamente pequeño. Por consiguiente, resulta

$$\sum_1^\infty \alpha (r_n, H r_n)^2 < \delta^2, \tag{1}$$

donde $r_n = w(e_n)$ $(\forall\, n \in N)$.

Así, hemos deducido la existencia de un sistema ortogonal completo de rayos, $\{r_n \,|\, n \in N\}$, tal que $\{H r_n \,|\, n \in N\}$ es heterogonal completo (tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeño), dándose la condición de aproximación angular (1).

Consideremos de nuevo el operador inyectivo dado A y designemos por $A_i = A|_{V^i} : V^i \to A(V^i)$ $(i \in N)$. Sea $W_i : A(V^i) \to V^i$ $(\forall\, i \in N)$ un operador unitario. Por la representación polar

$$W_i A_i = \widetilde{U}_i H_i,$$

donde $H_i : V^i \to V^i$ es hermítico regular y $\widetilde{U}_i : V^i \to V^i$ es unitario. Luego

$$A_i = U_i H_i,$$

donde $U_i = W_i^{-1} \widetilde{U}_i : V^i \to A(V^i)$ es también unitario.

Sea ahora $\xi > 0$ dado al arbitrio, y sea

$$\sum_1^\infty \varepsilon_i^2 < \xi.$$

Como $H_i : V^i \to V^i$ es hermítico regular $(\forall\, i \in N)$, podemos aplicarle el resultado anterior. Por consiguiente, existe $(\forall\, i \in N)$ un sistema ortogonal completo de rayos $\{r_n^{(i)} \,|\, n \in N\}$, en V^i, tal que

$$\sum_{n=1}^\infty \alpha (r_n^{(i)}, H_i (r_n^{(i)}))^2 < \varepsilon_i^2.$$

Luego existirá en $A(V^i)$ un sistema ortogonal completo de rayos $\{s_n^{(i)} = U_i(r_n^{(i)}) \mid n \in N\}$ $(\forall\, i \in N)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\,(s_n^{(i)},\ A_i\,(r_n^{(i)}))^2 < \varepsilon_i^2.$$

Reunimos ahora todos los sistemas $\{r_n^{(i)} \mid n \in N\}$ y obtenemos el sistema ortogonal completo de rayos en $\mathcal{H}$

$$\{r_n \mid n \in N\} = \bigcup_{\substack{n \in N \\ i \in N}} r_n^{(i)},$$

tal que su sistema imagen $\{A\, r_n \mid n \in N\}$, HETEROGONAL completo en $\overline{\Delta}_A$ (tomando los ε_i $(i \in N)$ suficientemente pequeños), verifica además la siguiente condición aproximativa : existe un sistema ortogonal completo de rayos en $\overline{\Delta}_A$,

$$\{s_n \subset \Delta_A \mid n \in N\} = \bigcup_{\substack{n \in N \\ i \in N}} s_n^{(i)} \text{ tal que}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\,(s_n,\ A\, r_n)^2 < \xi.$$

Es inmediata la existencia de representantes $a_n \in A\,(r_n) \ni \{a_n \mid$ $\mid n \in N\}$, considerado como imagen de un sistema ortonormal completo por un operador acotado, representa un operador de la forma $U + C$, con U unitario y $|||C||| < \infty$. Por el Teorema V.8 de [1], resulta que no sólo $\{A\,(r_n) \mid n \in N\}$ es HETEROGONAL, sino que es un SISTEMA DE RAYOS DE BARI : el hipervolumen

$$\sigma\left(\frac{a_1}{\|a_1\|}, \ldots, \frac{a_n}{\|a_n\|}, \ldots\right) > 0.$$

4.— $N(A) \neq o$ (A no inyectivo).

LEMA. Sea $\{e_n \mid n \in N\}$ un sistema ortonormal completo. Sea un subespacio lineal cerrado $E \subset \mathcal{H}$, $E \neq \mathcal{H}$, tal que $e_n \notin E^\perp$ $(\forall\, n \in N)$. Entonces $\{e_n' = P_E\, e_n \mid n \in N\}$ no es topológicamente libre, siendo P_E la proyección ortogonal sobre E.

DEMOSTRACIÓN: Sea $a \neq o$, $a \in E^\perp$, y sea $a = \sum_1^{\infty} \lambda_i\, e_i$. Luego $\sum_1^{\infty} \lambda_i\, e_i' =$ $= o$. Supongamos p.e. que $\lambda_1 \neq 0$. Deducimos $e_1' = \sum_2^{\infty} \mu_i\, e_i'$, $e_1' \in$ $[e_2', e_3', \ldots]$. Por consiguiente $\{e_n' \mid n \in N\}$ no es topológicamente libre.

Proposición. — Sea $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineal acotado, con núcleo $N(A) \neq \neq o$. Sea $\{r_n \,|\, n \in N\}$ un sistema ortogonal completo de rayos, tal que $r_n \not\subset N(A)$ $(\forall\, n \in N)$. Entonces

$$\{r_n' = A\, r_n \,|\, n \in N\}$$

no es topológicamente libre.

Demostración: Sea $e_n \in r_n$, $||e_n|| = 1 \Rightarrow \{e_n \,|\, n \in N\}$ es un sistema ortonormal completo. Sea $e_n' = P_{N(A)^\perp}$ $(\forall\, n \in N)$, $Ae_n = Ae_n'$. En virtud del lema anterior $\{e_n' \,|\, n \in N\}$ no es topológicamente libre $\Rightarrow$ $\{Ae_n \,|\, n \in N\}$ tampoco lo será $\Leftrightarrow$ $\{r_n' \,|\, n \in N\}$ no es topológicamente libre.

Sólo cabe considerar, por tanto, en este caso la restricción

$$A\Big|_{N(A)^\perp}$$

y aplicar el resultado del apartado anterior a $N(A)^\perp$, en sustitución de $\mathcal{H}$.

5.— En $P(\mathcal{H})$ (espacio proyectivo de base $\mathcal{H}$) la interpretación del resultado obtenido en el apartado 3 (A inyectivo) es la siguiente:

Para toda proyectividad

$$\pi = P(A) : P(\mathcal{H}) \to P(\mathcal{H}),$$

siempre hay un simplex completo cuya imagen por π es también un símplex, completo en $P(\bar{\Delta}_A)$.

Si π degenera (caso no inyectivo), tal cosa es imposible (v. [6]).

Antonio Plans
Cátedra de Geometría Analítica
y Topología
Facultad de Ciencias
Zaragoza

BIBLIOGRAFÍA

[1] BURILLO, P. J. *Hipervolúmenes, su límite y propiedades de permanencia en los operadores lineales acotados del espacio de Hilbert.* Tesis doctoral, Facultad de Ciencias, Zaragoza, (1974).

[2] KATO, T. *Perturbation Theory for linear operators.* Springer-Verlag (1966).

[3] LORCH. E. R. *Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces.* Bull. Am. Math. Society, t. 45, p. 564-569 (1939).

[4] MURRAY, F. J. *Linear transformations between Hilbert spaces and applications of this theory to linear partial differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc., t. 37, p. 301-338 (1935).

[5] NEUMANN, J. VON *Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators.* Obras completas, t. IV, p. 38-55.

[6] ONIEVA, V. M. *Sobre el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert.* Tesis doctoral. Publicaciones del Seminario Matemático «García de Galdeano», Zaragoza, (1971).

[7] WEYL, H. *Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist.* Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. 27, p. 373-392, (1909).