APROXIMACIÓN UNIFORME DE UNA FUNCIÓN CONTINUA POR UN CONJUNTO CONVEXO DE FUNCIONES CONTINUAS

POR

BALTASAR R. SALINAS

§ 1. INTRODUCCIÓN

1. Sea **X** un espacio topológico compacto (1) y sea **Y** un espacio vectorial (o lineal) normado sobre el cuerpo **R** de los números reales. Así queda asociado a cada elemento y de **Y** un número real $\|y\|$, llamado norma de y, con las propiedades :

N_1. $\|y\| = 0$ *y* $\|y\| = 0$ *si y sólo si* $y = 0$.

N_2. $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$.

N_3. $\|\alpha y\| = |\alpha| \, \|y\|$ *para cada* $\alpha \in \mathbf{R}$.

De estas propiedades resulta que **Y** es un espacio métrico con la distancia

$$D(y_1, y_2) = \|y_2 - y_1\|.$$

Siendo

$$|\, \|y_2\| - \|y_1\| \,| \leq \|y_2 - y_1\|,$$

se sigue que $\|y\|$ es una función uniformemente continua de y en **Y**.

Recordamos que entonces el espacio $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ de las aplicaciones continuas f de **X** en **Y** es un espacio vectorial normado sobre **R**, en donde

a) la suma $f = f_1 + f_2$ de f_1 y f_2 se define por

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad (x \in \mathbf{X})$$

(1) Con esto queremos expresar que **X** es un espacio topológico con la propiedad de HEINE-BOREL-LEBESGUE.

b) el producto $f = \alpha f_1$ de $\alpha \varepsilon \mathbf{R}$ y f_1 se define por

$$f(x) = \alpha f_1(x) \qquad (x \varepsilon \mathbf{X})$$

c) la norma $\|f\|$ de f se define por

$$\|f\| = \operatorname*{Sup}_{x \varepsilon \mathbf{X}} \|f(x)\|.$$

Vamos a comprobar que la aplicación $f \to \|f\|$ de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{R}$ es, efectivamente, una norma. Desde luego $\|f\|$ es un número finito para cada $f \varepsilon \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, puesto que $\|f(x)\|$ es una función real continua en el espacio compacto $\mathbf{X}$ y entonces, por el teorema de WEIERSTRASS, tiene un máximo en $\mathbf{X}$. Además se verifican :

N_1. Evidentemente, $\|f\| \geq 0$ y $\|f\| = 0$ si $f = 0$. Recíprocamente, si $\|f\| = 0$ es $\|f(x)\| = 0$ para todo $x \varepsilon \mathbf{X}$ y, por tanto, $f(x) = 0$ y $f = 0$.

N_2. Siendo

$$\|f_1(x) + f_2(x)\| \leq \|f_1(x)\| + \|f_2(x)\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$$

para todo $x \varepsilon \mathbf{X}$, resulta

$$\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|.$$

N_3. Como

$$\|\alpha f(x)\| = |\alpha| \; \|f(x)\|$$

para todo $x \varepsilon \mathbf{X}$ y $\alpha \varepsilon \mathbf{R}$, se ve inmediatamente que

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \; \|f\|.$$

2. Dada una función prefijada f de $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y un subconjunto $\mathbf{K}$ (no vacío) de $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ se presentan en la teoría de la aproximación los siguientes problemas :

PROBLEMA 1. *¿La función real*

$$\mu(\psi) = \|\psi - f\| \tag{1.1}$$

tiene un mínimo μ *en* $\mathbf{K}$?.

DEFINICIÓN 1. *Diremos que* φ *es una aproximación óptima de* f *por* $\mathbf{K}$ *si* $\varphi \varepsilon \mathbf{K}$ y *para* $\psi = \varphi$ *se obtiene el mínimo de* $\mu(\psi)$ *en* $\mathbf{K}$, *es decir si*

$$\mu(\varphi) = \mu \qquad (= \operatorname*{Min}_{\psi \varepsilon \mathbf{K}} \mu(\psi)) \tag{1.2}$$

PROBLEMA 2. *Estudiar el conjunto K de las aproximaciones óptimas de f por* **K**.

PROBLEMA 3. *Estudiar el conjunto $F(\varphi)$ de los puntos $x \in \mathbf{X}$ para los que*

$$\|\varphi(x) - f(x)\| = \mu(\varphi), \tag{1.3}$$

analizando el comportamiento de φ sobre $F(\varphi)$ para poder discernir si φ es o no una aproximación óptima de f por **K**.

En este trabajo nos vamos a limitar a tratar estas cuestiones en el caso que **K** sea un conjunto convexo y, en particular, cuando **K** sea una variedad lineal $\mathbf{M} \subset \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

OBSERVACIÓN 1. *Si K es el conjunto de las aproximaciones óptimas de f por* **K**, *$(f_0 - f) + K$ es el conjunto de las aproximaciones óptimas de $f_0 \in \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ por $(f_0 - f) + \mathbf{K}$.*

Recientemente, IVANOFF [6] (2) ha obtenido importantes resultados sobre estos problemas en el caso que **Y** sea el cuerpo **C** de los números complejos o **R** de los números reales y que **K** sea una variedad lineal **M** de dimensión finita sobre **C** o **R**. Así ha demostrado que cuando φ es una aproximación óptima de f por **M** el conjunto $F(\varphi)$ tiene la siguiente propiedad extremal: Para cada $\psi \in \mathbf{M}$ existe un punto $x \in F(\varphi)$ tal que

$$\mathrm{Re}\,\{[\varphi(x) - f(x)]\,\overline{[\psi(x) - f(x)]}\} \geq \mu^2 \qquad (\mu = \mu(\varphi)),$$

o lo que es igual que

$$\mathrm{Re}\,\{[\varphi(x) - f(x)]\,\overline{[\psi(x) - \varphi(x)]}\} \geq 0.$$

Es posible que un subconjunto N de $F(\varphi)$ tenga la misma propiedad, a tal subconjunto le llama IVANOFF conjunto normal y demuestra que existe en **X** un conjunto normal minimal y que si $r + 1$ es el número de sus puntos entonces $r \leq n$ en el caso real y $r \leq 2n$ en el caso complejo. Esta diferencia que aparece entre ambos casos se explica perfectamente por ser toda variedad lineal **M** de dimensión n sobre el cuerpo **C** una variedad lineal de dimensión $2n$ sobre **R**.

En este trabajo completaremos estos resultados, extendiendo y mejorando el clásico teorema de HAAR.

(2) No habiéndonos sido posible consultar esta Memoria, hemos tenido que recurrir a las revistas Math. Rev. 14, pág. 254 y Zentralblatt für Math. 46, pág. 293 para conocer su contenido.

NOTACIONES. Conviene tener presente que en este trabajo:

1. **K** *es un conjunto convexo de funciones de* $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.
2. $\mu(\varphi) = \|\varphi - f\|$ *para una función prefijada* $f \varepsilon \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.
3. $\mu = \operatorname{Inf}_{\varphi \varepsilon \mathbf{K}} \mu(\varphi)$.
4. *K es el conjunto de las aproximaciones óptimas de f por* **K**.

§ 2. La teoría de los conjuntos convexos regulares de funciones reales continuas

En esta parte supondremos que **Y** es la recta real **R** y que **K** es un subconjunto convexo de $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ que contiene a la función $\varphi = 0$.

DEFINICIÓN 2. *Diremos que un subconjunto N de* **X** *es un conjunto normal (respecto de* **K**) *y que* **K** *es un conjunto convexo regular sobre N, si para cada* $f \varepsilon \mathbf{K}$ *existe un punto* $x \varepsilon N$ *tal que*

$$f(x) \geq 0 \qquad (x = x(f))$$

En el caso que **K** *sea una variedad o sistema lineal* **S** *también diremos que* **S** *es un sistema lineal oscilante sobre* **N**.

EJEMPLO. Si **X** es el intervalo $[-1, 1]$ de la recta real **R** y

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{arc.cos} x)$$

es el polinomio de TCHEBYCHEFF de grado n, el sistema lineal **S**:

$$T_n(x) \sum_0^{n-1} \alpha_\nu x_\nu \qquad (\alpha_\nu \varepsilon \mathbf{R}),$$

engendrado por $T_n(x)$, $T_n(x)\, x, \ldots, T_n(x)\, x^{n-1}$, es un sistema lineal oscilante sobre el conjunto

$$N = \left\{ 1, \quad \cos\frac{\pi}{n}, \quad \cos\frac{2\pi}{n}, \ldots, \cos\frac{n\pi}{n} \right\}.$$

En efecto, si fuese

$$T_n(x) \sum_0^{n-1} \alpha_\nu x^\nu < 0$$

para todo $x \varepsilon N$, el polinomio

$$\sum_0^{n-1} \alpha_\nu x^\nu \not\equiv 0$$

tendría un cero x_ν en cada intervalo

$$\left(\cos \frac{\nu\pi}{n}, \quad \cos \frac{(\nu+1)\pi}{n}\right) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

y, por consiguiente, n ceros en $[-1,1]$.

PROPOSICIÓN 1. *Si* $\mathbf{S}$ *es un sistema lineal oscilante sobre* N, *para cada* $f \in \mathbf{S}$ *existen dos puntos* x_1 y x_2 *de* N, *iguales o distintos, tales que*

$$f(x_1) \geq 0 \quad \text{y} \quad f(x_2) \leq 0 \qquad (x_i = x_i(f)\ ;\ i = 1,2).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta tener presente que si $f \in \mathbf{S}$, $-f \in \mathbf{S}$.

OBSERVACIÓN 2. *El nombre de sistema lineal oscilante, dado a* $\mathbf{S}$, *se debe a la propiedad que poseen estos sistemas según la proposición 1.*

PROPOSICIÓN 2. *Si* $X \subset \mathbf{X}$ *no es un conjunto normal (respecto de* $\mathbf{K}$*) y* $\alpha > 0$, *existe una función* $f \in \mathbf{K}$ *tal que*

$$f(x) < 0$$

para todo $x \in X$, *y*

$$\|f\| = \operatorname*{Max}_{x \in \mathbf{X}} |f(x)| \leq \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la definición 2 existe una función $g \in \mathbf{K}$ tal que

$$g(x) < 0$$

para todo $x \in X$. Por tanto, si ponemos

$$f = \frac{\lambda}{\|g\|}\, g \quad \text{con} \quad \lambda = \operatorname{Min}\,(\|g\|,\ \alpha),$$

tendremos que $f \in \mathbf{K}$, $\|f\| \leq \alpha$ y

$$f(x) < 0$$

para todo $x \in X$.

PROPOSICIÓN 3. *Si* N *es un conjunto normal, todo conjunto* $X \subset \mathbf{X}$ *que contenga a* N *es normal.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente de la definición 2.

Como consecuencia resulta :

COROLARIO 1. *Dado un conjunto* $X \subset \mathbf{X}$, *para que existan subconjuntos normales de* X *es necesario que* X *sea normal.*

El siguiente teorema justifica, en parte, que estudiemos en este trabajo los conjuntos convexos regulares.

TEOREMA 1. *Para que $\varphi = 0$ sea una aproximación óptima de $f(x) \equiv -1$ por* **K** *en un conjunto cerrado $F \subset$* **X**, *es necesario y suficiente que F sea normal.*

DEMOSTRACIÓN. La condición es necesaria. En efecto, si F no es normal ni vacío existe, por la proposición 2, una función $f \in$ **K** tal que

$$f(x) < 0$$

para todo $x \in F$ con $|f(x)| \leq 1$ en **X**. Esta función f por el teorema de WEIERSTRASS, siendo F compacto y no vacío, tiene un máximo $-\sigma$ en F que, evidentemente, es negativo. Entonces, como

$$|f(x) - (-1)| = 1 + f(x) \leq 1 - \sigma < 1$$

para todo $x \in F$ y $f \in$ **K**, $\varphi = 0$ no es una aproximación óptima de -1 por **K** en F.

La condición es suficiente. Si F es normal, por la definición 2, para cada $f \in$ **K** tendremos:

$$|f(x) - (-1)| \geq 1 + f(x) \geq 1$$

para algún $x \in F$ y, por consiguiente, $\varphi = 0$ es una aproximación óptima en F de -1 por **K**.

DEFINICIÓN 3. *Una familia $\{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos X_λ de* **X** *se dice que es una cadena decreciente si Λ es un conjunto ordenado no vacío y*

$$X_{\lambda'} \supset X_{\lambda''}$$

para $\lambda' < \lambda''$. Análogamente, se dice que $\{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ es una cadena creciente si

$$X_{\lambda'} \subset X_{\lambda''}$$

para $\lambda' < \lambda''$.

TEOREMA 2. *Si F es un conjunto normal cerrado, existe un conjunto F^* normal cerrado minimal, esto es, que cada conjunto cerrado $F' \subset F^*$ y distinto de F^* no es normal.*

DEMOSTRACIÓN. Por el axioma de ZORN es suficiente demostrar que la familia de los conjuntos normales cerrados contenidos en F, ordenados por inclusión, es inductiva respecto de la intersección y no vacía. Desde luego dicha familia no es vacía puesto que F pertenece a ella. Tenemos, pues, que probar que si $\{F_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ es una cadena decreciente de conjuntos normales cerrados contenidos en F,

$$F_0 = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

es un conjunto normal cerrado. Como F_0 es cerrado por ser intersección de conjuntos cerrados, queda por probar que F_0 es un conjunto normal.

En efecto, como todo F_λ es un conjunto normal, para cada $f \varepsilon \mathbf{K}$ existe un punto $x_\lambda \varepsilon F_\lambda$ tal que

$$f(x_\lambda) \geq 0 \qquad\qquad (x_\lambda = x_\lambda(f)).$$

Sea $\Phi_\lambda = \{x_{\lambda'}\,;\ \lambda' \geq \lambda\}$ el conjunto de los puntos $x_{\lambda'}$ con $\lambda' \geq \lambda$. Se ve fácilmente que dichos conjuntos constituyen una base de filtro. Por tanto, siendo $\mathbf{X}$ compacto, existe un punto $x_0 \varepsilon \mathbf{X}$ adherente a todos los conjuntos Φ_λ. De esto resulta, siendo f continua, que

$$f(x_0) \geq 0.$$

Para concluir basta tener presente que por ser los conjuntos F_λ cerrados y $\Phi_\lambda \subset F$, $x_0 \varepsilon F_\lambda$ para todo $\lambda \varepsilon \Lambda$ y, por consiguiente, que $x_0 \varepsilon F_0$.

Definición 4. *Un conjunto normal $N \subset \mathbf{X}$, se dice completamente normal (respecto de $\mathbf{K}$) si para cada $f \varepsilon \mathbf{K}$, que no se anule idénticamente en N, existe un punto $x \varepsilon N$ tal que*

$$f(x) > 0.$$

De igual forma que las proposiciones 1 y 2 se obtienen las dos siguientes.

Proposición 4. *Si N es un conjunto completamente normal respecto de un sistema lineal $\mathbf{S}$, para cada $f \varepsilon \mathbf{S}$, que no se anule idénticamente en N, existen dos puntos x_1 y x_2 de N tales que*

$$f(x_1) > 0 \quad \text{y} \quad f(x_2) < 0 \qquad (x_i = x_i(f)\,;\ i = 1,2).$$

Proposición 5. *Si X no es un conjunto completamente normal (respecto de $\mathbf{K}$) y $\alpha > 0$, existe una función $f \varepsilon \mathbf{K}$ tal que*

$$f(x) \leq 0$$

para todo $x \varepsilon X$ y $0 < \|f\| \leq \alpha$.

Observación 3. *La proposición 3 no se puede extender para los conjuntos completamente normales.*

Proposición 6. *Si* N_0 *es un conjunto completamente normal contenido en el conjunto normal* N *y para* $f \varepsilon \mathbf{K}$ *se tiene*

$$f(x) \leq 0$$

para todo $x \varepsilon N$, N_0 *está contenido en el conjunto de los ceros de* f *en* N, *es decir,* $f(x) = 0$ *para* $x \varepsilon N_0$.

Demostración. Se deduce de la definición 4.

Teorema 3. *Todo conjunto normal* N *que no posea ningún subconjunto propio* X, *normal y cerrado en* N, *es completamente normal.*

Demostración. Supongamos que N no es completamente normal. Entonces, existe una función $f \varepsilon \mathbf{K}$ tal que

$$f(x) \leq 0$$

para todo $x \varepsilon N$ y

$$f(x_0) = -\sigma < 0$$

para un $x_0 \varepsilon N$. Sea $0 < \varepsilon < \sigma$ y X_ε el conjunto de los puntos x de N que satisfacen la condición

$$f(x) \geq -\varepsilon.$$

Siendo X_ε un conjunto cerrado en N y $N \neq X_\varepsilon$, X_ε no es normal y por la proposición 2 existe una función $g \varepsilon \mathbf{K}$ tal que

$$g(x) < 0$$

para $x \varepsilon X_\varepsilon$ y $|g(x)| \leq \varepsilon$ para $x \varepsilon \mathbf{X}$.

De todo esto resulta, poniendo

$$f^* = \frac{1}{2}(f + g) \varepsilon \mathbf{S},$$

que

$$f^*(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) < 0$$

para $x \varepsilon X_\varepsilon$ y

$$f^*(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) < \frac{1}{2}(-\varepsilon + \varepsilon) = 0$$

para $x \varepsilon N - X_\varepsilon$. En resumen, $f^*(x) < 0$ en N para una función $f^* \varepsilon \mathbf{K}$ y, por consiguiente, N no es normal. Como esto es absurdo, N es un conjunto completamente normal.

COROLARIO 2. *Todo conjunto normal cerrado minimal F es completamente normal.*

COROLARIO 3. *Todo conjunto normal minimal N es completamente normal.*

TEOREMA 4. *Si F es un conjunto normal cerrado, existe un conjunto cerrado F^*, completamente normal, contenido en F.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 2 existe un conjunto normal cerrado minimal $F^* \subset F$. Este conjunto, por el corolario 2, es un conjunto completamente normal.

OBSERVACIÓN 4. *Demostrada la existencia de conjuntos completamente normales F^* contenidos en un conjunto normal cerrado F, hacemos notar que la proposición 6 da un método para encontrar estos conjuntos completamente normales.*

PROPOSICIÓN 7. *Si X_0 es un conjunto no completamente normal y $X \supset X_0$, $\overline{X}_0 \cap X$ es un conjunto no completamente normal* (3).

DEMOSTRACIÓN. En efecto, por ser X_0 un conjunto no completamente normal existe una función $f \in \mathbf{K}$ que no se anula idénticamente en X_0 y tal que

$$f(x) \leq 0$$

para todo $x \in X_0$ y, por consiguiente, para todo $x \in \overline{X}_0$ por la continuidad de f. Por tanto, como

$$f(x) \leq 0$$

para todo $x \in \overline{X}_0 \cap X$ y f no se anula idénticamente en $\overline{X}_0 \cap X \supset X_0$, $\overline{X}_0 \cap X$ es un conjunto no completamente normal.

TEOREMA 5. *Si N es un conjunto normal que no posee ningún subconjunto propio normal y cerrado en N, para que $X \subset N$ sea normal o completamente normal es necesario y suficiente que $\overline{X} \supset N$.*

DEMOSTRACIÓN. La condición es necesaria. En efecto, si $\overline{X}$ no contiene a N el conjunto $\overline{X} \cap N$, cerrado en N y distinto de N, no es normal y por tanto tampoco lo es $\overline{X} \subset X \cap N$.

La condición es suficiente. En efecto, si X no es completamente normal de la proposición 7 resulta que $\overline{X} \cap N$ no es completamente normal y, por consiguiente, según el teorema 3, $\overline{X} \cap N \neq N$.

COROLARIO 4. *Si N es un conjunto normal que no posee ningún subconjunto propio normal y cerrado en N, todo conjunto $N_0 \subset N$ que sea normal es completamente normal.*

(3) Designamos por $\overline{X}$ a la clausura de X.

TEOREMA 6. *Si N es un conjunto normal que no posee ningún subconjunto propio normal y cerrado en N, todo conjunto normal $N_0 \subset N$ goza de la misma propiedad.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si X_0 es un subconjunto propio de N_0, cerrado en N_0, X_0 es intersección de un conjunto X, cerrado en N, con N_0. Por tanto, siendo $X \neq N$, los conjuntos X y $X_0 \subset X$ no son normales.

PROPOSICIÓN 8. *Todo conjunto normal minimal N es aislado.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si existiese un punto x_0 de N, no aislado, sería $\overline{N - \{x_0\}} \supset N$ y del teorema 5 resultaría que $N - \{x_0\}$ es un conjunto normal. Siendo esto absurdo, N es un conjunto aislado.

COROLARIO 5. *Si* $\mathbf{X}$ *es separable, todo conjunto normal minimal es numerable.*

TEOREMA 7. *Si N es un conjunto normal que no posee ningún subconjunto propio normal y cerrado en N, para que exista un conjunto normal minimal $N^* \subset N$ es necesario y suficiente que la clausura $\bar{A}$ del conjunto A de los puntos aislados de N contenga a N. En el caso que N^* exista, $N^* = A$.*

DEMOSTRACIÓN. La condición es necesaria. En efecto, si existe un conjunto normal minimal $N^* \subset N$ por la proposición 8 y el teorema 5 se sigue que N^* es aislado y $\bar{N}^* \supset N$, y por consiguiente que $A = N^*$ y $\bar{A} \supset N$.

La condición es suficiente. En efecto, si $\bar{A} \supset N$ por el teorema 5 se deduce que A es un conjunto normal. Como además para todo conjunto normal $X \subset N$ se tiene $\bar{X} \supset N$, resulta que $X \supset A$ y, en particular, que A es un conjunto normal minimal.

COROLARIO 6. *Para que un conjunto normal cerrado minimal F sea un conjunto normal minimal es necesario y suficiente que sea finito.*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce del teorema 7 teniendo presente que un conjunto cerrado $F \subset \mathbf{X}$ y, por tanto, compacto, es aislado si y solo si es finito.

LEMA. *Si el conjunto $\{a_1, a_2 ..., a_n\}$ de los puntos*

$$a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{in}) \qquad (i = 1, 2 ..., n)$$

de $\mathbf{R}^n$ *con coordenadas*

$$\alpha_{ii} > 0 \quad y \quad \alpha_{ij} < 0 \quad para \quad j \neq i \qquad (i, j = 1, 2, ..., n)$$

tiene una envolvente convexa $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \qquad \left(\sum_1^n \lambda_i = 1 \quad y \quad \lambda_i \geq 0 \quad para \quad i = 1, 2, \ldots, n \right)$$

que no tiene ningún punto común con la región (cerrada)

$$\{x_1 \leq 0, \; x_2 \leq 0, \ldots, x_n \leq 0\},$$

dicha envolvente convexa $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *corta a todos los semi-ejes positivos*

$$\{x_1 = 0, \ldots, x_{i-1} = 0, \; x_i > 0, \; x_{i+1} = 0, \ldots, x_n = 0\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción. Desde luego para $n = 1$ y $n = 2$ el lema es cierto. Supongamos que también lo es para $n - 1$. Entonces, como el conjunto $\{a_1, a_2', \ldots, a_{n-1}'\}$ de los puntos

$$a_i' = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

de $\mathbf{R}^{n-1}$ tiene una envolvente convexa $[a_1, a_2', \ldots, a_{n-1}']$ que no tiene ningún punto común con

$$\{x_1 \leq 0, \; x_2 \leq 0, \ldots, x_{n-1} \leq 0\},$$

se pueden determinar los números $\lambda_{ij} \geq 0$ de modo que

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{ij} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{ij} a_j' = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{in-1})$$

con $\beta_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $\beta_{ii} = 1/\beta_i > 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$.

De esto resulta, poniendo

$$\lambda_i' = -\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{ji} \alpha_{nj} \beta_j \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\lambda_i = \frac{\lambda_i'}{1 + \sum_1^{n-1} \lambda_i'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \quad \text{y} \quad \lambda_n = \frac{1}{1 + \sum_1^{n-1} \lambda_i'}$$

que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i' a_i + a_n = -\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} \beta_j \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ji} a_i + a_n = (0, 0, \ldots, 0, \gamma')$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = (0, 0, \ldots, 0, \gamma).$$

Finalmente, como

$$\sum_{1}^{n} \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

y la envolvente convexa $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ no tiene ningún punto común con la región

$$\{x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0, \ldots, x_n \leq 0\},$$

se sigue $\gamma > 0$. De la misma forma se puede probar que $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ corta a los demás semi-ejes positivos.

COROLARIO 7. *La envolvente convexa* $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *del conjunto* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, *considerado en el lema anterior, es un simplex de dimensión* $n - 1$.

DEFINICIÓN 5. *En general, si* $\mathbf{Y}$ *es un espacio vectorial normado, llamaremos soporte de un conjunto* $H \subset \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *a la mínima variedad lineal* M *que contiene a* H, *es decir,* M *es el conjunto de las funciones* $\varphi \in H$ *que se pueden expresar en la forma*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$$

con $\varphi_i \in H$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *y* $\sum_{1}^{n} \lambda_i = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Llamaremos dimensión de* H *sobre el conjunto* $X \subset \mathbf{X}$ *a la dimensión de la variedad lineal* $M(X) \subset \mathbf{C}(X, \mathbf{Y})$ *que se obtiene por restricción de las funciones* φ *de* M *a* X.

OBSERVACIÓN 5. *Como en este parágrafo, por hipótesis,* $\varphi = 0 \in \mathbf{K}$, *la dimensión de* $\mathbf{K}$ *sobre* $X \subset \mathbf{X}$ *es el máximo número de funciones linealmente independientes sobre* X *pertenecientes a* $\mathbf{K}$.

TEOREMA 8. *Si* N *es un conjunto normal minimal que consta de* p *puntos y la dimensión de* $\mathbf{K}$ *sobre* N *es* r, *se tiene* $r \leq p \leq r + 1$.

DEMOSTRACIÓN. Desde luego $p \geq r$ puesto que el número de funciones linealmente independientes sobre N no puede ser superior a p.

Como para $r = \infty$ o $p = 1$ el teorema es evidente podemos suponer r finito y $p > 1$. Sea $N = \{x_\lambda ; \lambda \varepsilon \Lambda\}$ entonces, siendo cada $N - \{x\}$ un conjunto no normal, existe una función $f_\lambda \varepsilon \mathbf{K}$ tal que

$$f_\lambda (x) < 0$$

para todo $x \varepsilon N - \{x_\lambda\}$, de donde se sigue por ser N completamente normal que

$$f_\lambda (x_\lambda) > 0.$$

Sea $s \leq r$ el máximo número de funciones f_λ $(\lambda \varepsilon \Lambda)$ linealmente independientes sobre N, entonces existen s funciones.

$$f_1 = f_{\lambda_1}, \quad f_2 = f_{\lambda_2}, \ldots, f_s = f_{\lambda_s} \qquad (\lambda_i \varepsilon \Lambda)$$

linealmente independientes sobre N y tales que cada f_λ $(\lambda \varepsilon \Lambda)$ es combinación lineal sobre N de ellas. Por tanto, como toda función

$$f = \sum_1^s \mu_i f_i$$

con

$$\sum_1^s \mu_i = 1 \quad \text{y} \quad \mu_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

pertenece a $\mathbf{K}$ y es negativa en cada punto x de $N - \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ $(x_i = x_{\lambda_i})$ se sigue, siendo N completamente normal, que

$$\sum_1^s \mu_i f_i (x_j) > 0 \qquad (x_j = x_{\lambda_j})$$

para algún $j = 1, 2, \ldots, s$. Por consiguiente, el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ de los puntos

$$a_i = (f_i (x_1), f_i (x_2), \ldots, f_i (x_s)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

de $\mathbf{R}^s$ tiene una envolvente convexa $[a_1, a_2 \ldots, a_s]$ que no tiene ningún punto común con la región (cerrada)

$$\{\xi_1 \leq 0, \xi_2 \leq 0, \ldots, \xi_s \leq 0\}$$

de $\mathbf{R}^s$. De esto se deduce por el lema precedente que existen s funciones $g_1, g_2, \ldots, g_s$ pertenecientes a la envolvente convexa $[f_1, f_2, \ldots, f_s]$ de $\{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ y tales que

$$g_i(x_i) > 0, \qquad g_i(x_j) = 0 \quad \text{para} \quad j \neq i \qquad (i\,;\, j = 1, 2, \ldots, s)$$

y

$$g_i(x) < 0$$

para $x \in N - \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$. Como evidentemente $g_1, g_2, \ldots, g_s$ son linealmente independientes sobre N, resulta que cada función f_λ ($\lambda \ni \Lambda$) es combinación lineal sobre N de $g_1, g_2, \ldots, g_s$ y, por consiguiente,

$$f_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{s} \frac{f_\lambda(x_i)}{g_i(x_i)}\, g_i(x)$$

para $x \in N$. De esto se deduce que $f_\lambda(x) > 0$ para todo $x \in N - \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ y $\lambda \in \Lambda - \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$ y, por tanto, que $p \leq s + 1 \leq r + 1$.

COROLARIO 8. *Si N es un conjunto normal minimal respecto de un sistema lineal $\mathbf{S}$ $(= \mathbf{K})$ y si la dimensión de $\mathbf{S}$ sobre N es r, N consta de $r + 1$ puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 8 si p es el número de puntos de N es $r \leq p \leq r + 1$. Por otra parte, si fuese $p < r + 1$ existiría una función $f \in \mathbf{S}$ con valores prefijados en los p puntos de N, en particular, negativos y N no sería normal.

De aquí en adelante supondremos en este parágrafo que $\mathbf{K}$ es un sistema lineal $\mathbf{S}$.

TEOREMA 9. *Si $\mathbf{S}$ es de dimensión finita n sobre un conjunto completamente normal N y si $\{X_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$ es una cadena creciente de subconjuntos de N tales que*

$$N \subset \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X}\,,$$

algún conjunto X_λ es completamente normal.

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 7 es suficiente demostrar que si los conjuntos X_λ no son completamente normales, el conjunto

$$X_0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

no es completamente normal.

Sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$ $(r \leq n)$ una base de $\mathbf{S}$ sobre X_0. Entonces, siendo cada X_λ un conjunto no completamente normal existe una función

$$f_\lambda = \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_{\lambda\nu} \varphi_\nu.$$

tal que

$$f_\lambda(x) \leq 0$$

para todo $x \varepsilon X_\lambda$ y

$$\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_{\lambda\nu}^2 = 1.$$

Sea A_λ el conjunto de los puntos

$$a_{\lambda'} = (\alpha_{\lambda'1}, \alpha_{\lambda'2}, \ldots, \alpha_{\lambda'r})$$

con $\lambda' \geq \lambda$ de la esfera S_{r-1}:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_r^2 = 1.$$

Se ve fácilmente que dichos conjuntos constituyen una base de filtro sobre S_{r-1}. Por tanto, siendo S_{r-1} un conjunto compacto de $\mathbf{R}^r$ existe un punto

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$$

de S_{r-1} adherente a todos los conjuntos A_λ. De esto resulta que si x pertenece a algún X_λ, es decir, si $x \varepsilon X_0$ se tiene

$$f(x) \equiv \sum_{1}^{r} \alpha_\nu \varphi_\nu(x) \leq 0.$$

Para concluir basta observar que $f \varepsilon \mathbf{S}$ y no se anula idénticamente en X_0 puesto que $\sum_{1}^{r} \alpha_\nu^2 = 1$ y $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$ es una base de $\mathbf{S}$ sobre X_0.

TEOREMA 10. *Si* $\mathbf{S}$ *es de dimensión finita sobre el conjunto* $X \subset \mathbf{X}$ *y* X_0 *es un subconjunto de* X*, no completamente normal (respecto de* $\mathbf{S}$*), existe un conjunto* $X^* \subset X$*, cerrado* en X*, no completamente normal y que contiene a* X_0*, con la propiedad que todo subconjunto* X' *e* X *que contenga a* X^* *y distinto de* X^* *es completamente normal.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 7 y el axioma de ZORN es suficiente demostrar que la familia de los conjuntos no completamente normales contenidos en X y que contienen a X_0, ordenados por inclusión, es inductiva respecto de la reunión y no vacía. Desde luego, dicha familia no es vacía puesto que X_0 pertenece a ella. Vamos a ver que es inductiva. En efecto, si $\{X_\lambda ; \lambda \varepsilon \Lambda\}$ es una cadena creciente de conjuntos no completamente normales, por el teorema 9, $\bigcup_{\lambda \varepsilon \Lambda} X_\lambda$ es un conjunto no completamente normal.

OBSERVACIÓN 6. *Si X no es completamente normal el teorema 10 es trivial puesto que $X^* = X$ satisface las condiciones que se requieren para X^*.*

TEOREMA 11. *Si N es un conjunto normal (respecto de* **S***) que no posee ningún subconjunto propio normal y cerrado en N y si* **S** *es de dimensión r sobre N, N consta de $r + 1$ puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Como el teorema es inmediato para $r = \infty$, supondremos r finito. Sea A el conjunto de los puntos aislados de N. Si $\bar{A} \supset N$, por el teorema 7, A es un conjunto normal minimal y, por consiguiente, según el corolario 8, A y N constan de $r + 1$ puntos.

Si $\bar{A}$ no contiene a N, A es un conjunto no completamente normal y por el teorema 10 existe un conjunto X^*, no completamente normal, con $A \subset X^* \subset N$ y tal que todo conjunto $X' \neq X^*$, que verifique la condición $X^* \subset X' \subset N$, es completamente normal. Entonces, $N - X^* \neq \Phi$ y existe un punto $x_0 \varepsilon N - X^*$ y, por consiguiente, $\overline{X^* \cup \{x_0\}} \supset N$. Como $\overline{X^*}$ no contiene a N por ser X^* no completamente normal, resulta de esto que x_0 es un punto aislado de N, lo que es absurdo puesto que $(N - X^*) \cap A = \Phi$. Por tanto, hay que descartar la posibilidad de que $\bar{A}$ no contenga a N.

COROLARIO 9. *Si F es un conjunto normal cerrado (respecto de* **S***) y* **S** *es de dimensión finita n sobre F, existe un conjunto normal $N \subset F$ que consta de $r + 1 \leq n + 1$ puntos.*

§ 3. LA TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN EN ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS

Aquí supondremos como en § 1 que **Y** es un espacio vectorial normado general salvo indicación expresa de lo contrario. **X** como siempre, es un espacio topológico compacto.

PROPOSICIÓN 9. *Si* **K** *es un conjunto cerrado de dimensión finita sobre cada punto $x \varepsilon$* **X** *y tal que cada subconjunto acotado de* **K** *es equi-*

continuo, todo subconjunto acotado H de **K** *es relativamente compacto en* **K**.

DEMOSTRACIÓN. Sea $H(x) = \{\varphi(x) ; \varphi \varepsilon H\}$ el conjunto de los valores de las funciones de H en un punto $x \varepsilon \mathbf{X}$. Este conjunto $H(x)$ es relativamente compacto en **Y**, por ser $H(x)$ un conjunto acotado de dimensión finita. Entonces, como H es un conjunto equicontinuo por el teorema de ASCOLI (4) resulta que H es relativamente compacto en $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, puesto que la convergencia compacta en **X** coincide con la convergencia uniforme en X, por ser **X** compacto. De esto se concluye, siendo **K** cerrado, que H es un conjunto relativamente compacto en **K**.

COROLARIO 10. *Si* **K** *es un conjunto cerrado y de dimensión finita n, todo subconjunto acotado H de* **K** *es relativamente compacto en* **K**.

DEMOSTRACIÓN. Se deduce de la proposición 9 teniendo presente que todo subconjunto acotado H de **K** es equicontinuo por ser cada función $\varphi \varepsilon H$ combinación lineal, con coeficientes acotados, de $n + 1$ funciones $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de **K**, independientes de φ (5).

TEOREMA 12. *Dada una función $f \varepsilon \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, si* **K** *es un conjunto cerrado tal que cada subconjunto acotado H de* **K** *es relativamente compacto en* **K**, *existe una aproximación óptima φ de f por* **K**, *en otras palabras, el conjunto K ($\subset \mathbf{K}$) de las aproximaciones óptimas de f por* **K** *no es vacío.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\mu = \operatorname*{Inf}_{\psi \varepsilon \mathbf{K}} \mu(\psi) \qquad (\mu(\psi) = \|\psi - f\|)$$

entonces, como

$$\psi \to \mu(\psi)$$

es una aplicación continua de $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ en **R** y $\{\|\psi - f\| \leq \mu + 1, \psi \varepsilon \mathbf{K}\}$ es un subconjunto no vacío, cerrado y acotado de **K** y, por consiguiente, compacto, por el teorema de WEIERSTRASS existe una función $\varphi \varepsilon \mathbf{K}$ de $\|\psi - f\| \leq \mu + 1$ para la que se alcanza el mínimo de $\mu(\psi)$ en **K**. Por tanto, $\mu(\varphi) = \mu$.

COROLARIO 11. *Con las mismas hipótesis que en el teorema 12, si $f \notin$* **K** *es*

$$\mu = \operatorname*{Inf.}_{\psi \varepsilon K} \mu(\psi) \neq 0.$$

---

(4) Véase BOURBAKI [4], pág. 43.

(5) Este corolario se puede probar también teniendo presente que todo espacio vectorial normado (o topológico), real y de dimensión finita n es isomorfo a $\mathbf{R}^n$.

Teorema 13. *Si* $F(\varphi)$ *es el conjunto de los puntos* x *de* $\mathbf{X}$ *para los que* $\|\varphi(x) - f(x)\| = \mu(\varphi)$, *se tiene*:

a) $F(\varphi)$ *es un conjunto cerrado no vacío.*

b) Para cada conjunto abierto $G \supset F(\varphi)$ *existe un* $\varepsilon > 0$ *tal que si* $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$, $F(\psi) \subset G$.

Demostración. *a)* Que $F(\varphi)$ es no vacío lo hemos visto en § 1 y que es cerrado se sigue por ser $\|\varphi(x) - f(x)\|$ una función continua de x.

b) $\mathbf{X} - G$ es un conjunto compacto por ser un conjunto cerrado del espacio compacto $\mathbf{X}$. Por tanto, por el teorema de Weierstrass, $\|\varphi(x) - f(x)\|$ tiene un máximo $\mu(\varphi) - 2\varepsilon$ en $\mathbf{X} - G$, que por ser $(\mathbf{X} - G) \cap F(\varphi) = \Phi$ es menor que $\mu(\varphi) = \|\varphi - f\|$ y, por consiguiente, $\varepsilon > 0$.

Vamos a demostrar que si $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$, $F(\psi) \subset G$. En efecto, si fuese $\|\psi(x) - f(x)\| = \|\psi - f\|$ para un punto $x \in \mathbf{X} - G$ se llegaría al absurdo de que

$$\begin{aligned} \|\psi - f\| = \|\psi(x) - f(x)\| &\leq \|\psi(x) - \varphi(x)\| + \|\varphi(x) - f(x)\| \leq \\ &\leq \|\psi - \varphi\| + \mu(\varphi) - 2\varepsilon = \|\psi - \varphi\| + \|\varphi - f\| - 2\varepsilon \leq \\ &\leq 2\,\|\psi - \varphi\| + \|\psi - f\| - 2\varepsilon < \|\psi - f\|. \end{aligned}$$

Teorema 14. *El conjunto* K *de las aproximaciones óptimas* φ *de* f *por un conjunto convexo* $\mathbf{K}$ *es cerrado en* $\mathbf{K}$, *acotado y convexo.*

Demostración. En efecto, siendo

$$\psi \to \mu(\psi)$$

una aplicación continua de $\mathbf{K}$ en $\mathbf{R}$, el conjunto K de los puntos φ de $\mathbf{K}$ tales que

$$\mu(\varphi) = \mu$$

es cerrado en $\mathbf{K}$ y también, evidentemente, acotado: $\|\varphi - f\| = \mu$.

Por otra parte, si $\varphi_0 \in K$ y $\varphi_1 \in K$,

$$\varphi_\lambda = (1 - \lambda)\,\varphi_0 + \varphi_1 \in K$$

para $0 < \lambda < 1$, puesto que $\varphi_\lambda \in \mathbf{K}$ y

$$\mu \leq \mu(\varphi\,) \leq \|\varphi_\lambda - f\| = (1 - \lambda)\,\|\varphi_0 - f\| + \lambda\,\|\varphi_1 - f\| = \mu.$$

COROLARIO 12. *Si* **K** *es un conjunto convexo y cerrado de dimensión finita sobre cada punto* $x \in \mathbf{X}$ *y tal que cada subconjunto acotado de* **K** *es equicontinuo,* K *es un conjunto convexo compacto (no vacío).*

DEFINICIÓN 6. *Diremos, por un abuso del lenguaje, que* φ *es un punto interior de* K *si* φ *es un punto interior de* K *en su soporte* M, *esto es, si existe un entorno de* φ *en* M :

$$V_\varrho(\varphi) = \{ \|\psi - \varphi\| < \varrho,\ \psi \in M \} \subset K.$$

PROPOSICIÓN 10. *Si* φ_0 *es un punto del conjunto convexo* K *y* φ_1 *es un punto interior de* K, *cada punto*

$$\varphi_\lambda = (1 - \lambda)\varphi_0 + \lambda\varphi_1 \qquad (0 < \lambda < 1)$$

del segmento abierto de extremos φ_0 *y* φ_1 *es también un punto interior de* K. (6).

DEMOSTRACIÓN. En efecto, siendo φ_1 un punto interior de K existe un entorno

$$V_\varrho(\varphi_1) = \{ \|\varphi - \varphi_1\| < \varrho,\ \psi \in M \} \subset K,$$

y, por tanto,

$$V_{\lambda\varrho}(\varphi_\lambda) = (1 - \lambda)\varphi_0 + \lambda V_\varrho(\varphi_1) \subset K,$$

que expresa que φ_λ es un punto interior de K.

DEFINICIÓN 7. *Diremos que* φ *es un punto central de* K *si para cada* $\varphi_0 \in K - \{\varphi\}$ *existe un punto* $\varphi_1 \in K - \{\varphi\}$ *tal que* φ *es un punto del segmento de extremos* φ_0 *y* φ_1. *Si* φ *es un punto no central de* K, *diremos que* φ *es un punto extremal de* K.

PROPOSICIÓN 11. *Todo punto interior del conjunto convexo* K *es un punto central de* K, *y basta la existencia de un punto interior de* K *para que todo punto central de* K *sea un punto interior (de* K*).*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si φ es un punto interior de K existe un entorno de φ en su soporte M :

$$\overline{V}_\varrho(\varphi) = \{ \|\psi - \varphi\| \leq \varrho,\ \psi \in M \} \subset K.$$

Por tanto, si $\varphi_0 \in K - \{\varphi\}$ y ponemos

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + (\lambda - 1)\varphi_0}{\lambda} \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{\|\varphi - \varphi_0\|}{\varrho + \|\varphi - \varphi_0\|}$$

(6) Véase BOURBAKI [5], pág. 51.

tendremos que $\varphi_1 \varepsilon M$ y como además

$$\|\varphi_1 - \varphi\| = \frac{1-\lambda}{\lambda} \|\varphi - \varphi_0\| = \varrho,$$

$\varphi_1 \varepsilon K - \{\varphi\}$. Finalmente, siendo

$$\varphi = (1-\lambda)\varphi_0 + \lambda\varphi_1 \qquad (0 < \lambda < 1),$$

φ es un punto del segmento de extremos φ_0 y φ_1.

Recíprocamente, si φ es un punto central de K y K posee un punto interior φ_0, $\varphi = \varphi_0$ o bien $\varphi \neq \varphi_0$ y existe entonces un punto $\varphi_1 \varepsilon K - \{\varphi_0\}$ tal que φ es un punto del segmento abierto de extremos φ_0 y φ_1 y, por la proposición 10, φ es un punto interior de K.

Observación 7. *Si I es el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ de* $\mathbf{R}$, *el conjunto convexo $K \subset \mathbf{C}(\mathbf{I}, \mathbf{R})$, formado por las funciones reales φ derivables que satisfacen la condición $|\varphi'(x)| \leq 1$ en* $\mathbf{I}$, *carece de puntos interiores y, sin embargo, posee puntos centrales, por ejemplo, el punto $\varphi = 0$.*

Corolario 13. *Si el conjunto convexo K es de dimensión finita r, K posee puntos interiores y, por consiguiente, puntos centrales.*

Proposición 12. *Si φ_0 es un punto del conjunto convexo K y φ_1 es un punto central de K, cada punto*

$$\varphi_\lambda = (1-\lambda)\varphi_0 + \lambda\varphi_1 \qquad (0 < \lambda < 1)$$

del segmento abierto de extremos φ_0 y φ_1 es también un punto central de K.

Demostración. Dado el punto $\psi_0 \varepsilon K - \{\varphi_\lambda\}$, si $\psi_0 = \varphi_1 (\varepsilon K - - \{\varphi_\lambda\})$, φ_λ es evidentemente un punto del segmento de extremos ψ_0 y $\psi_1 = \varphi_0 \varepsilon K - \{\varphi_\lambda\}$. Si $\psi_0 \neq \varphi_1$ se puede determinar, por ser φ_1 un punto central de K, un punto $\psi \varepsilon K - \{\varphi_1\}$ tal que

$$\varphi_1 = (1-\lambda')\varphi_0 + \lambda'\psi \qquad (0 < \lambda' < 1).$$

Entonces, si ponemos

$$\psi_1 = \frac{(1-\lambda)\varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \lambda(\lambda'-1)\psi_0}{1-\lambda+\lambda\lambda'} \qquad (1-\lambda+\lambda\lambda' > 0),$$

se deduce que

$$\psi_1 = \frac{(1-\lambda)\varphi_0 + \lambda\lambda'\psi}{1-\lambda+\lambda\lambda'} \varepsilon K - \{\varphi_\lambda\}$$

y

$$\varphi_\lambda = \lambda (1 - \lambda') \psi_0 + (1 - \lambda + \lambda \lambda') \psi_1,$$

y, por tanto, que φ_λ es un punto del segmento de extremos ψ_0 y ψ_1.

PROPOSICIÓN 13. *Si φ_0 y φ_1 son dos puntos del conjunto convexo K, para cada punto*

$$\varphi_\lambda = (1 - \lambda) \varphi_0 + \lambda \varphi_1 \qquad (0 < \lambda < 1)$$

del segmento abierto de extremos φ_0 y φ_1 se tiene

$$F(\varphi_\lambda) \subset F(\varphi_0) \cap F(\varphi_1).$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, como para cada $x \in F(\varphi_\lambda)$ se verifica

$$\mu = \|\varphi_\lambda(x) - f(x)\| \leq (1 - \lambda) \|\varphi_0(x) - f(x)\| + \lambda \|\varphi_1(x) - f(x)\|,$$

por ser K un conjunto convexo, y

$$\|\varphi_0(x) - f(x)\| \leq \mu \quad \text{y} \quad \|\varphi_1(x) - f(x)\| \leq \mu,$$

resulta

$$\|\varphi_0(x) - f(x)\| = \mu \quad \text{y} \quad \|\varphi_1(x) - f(x)\| = \mu$$

para $x \in F(\varphi_\lambda)$ y, por consiguiente,

$$F(\varphi_\lambda) \subset F(\varphi_0) \cap F(\varphi_1).$$

TEOREMA 15. *El conjunto cerrado*

$$F = \bigcup_{\psi \in K} F(\psi)$$

no es vacío y para cada punto central φ de K es $F(\varphi) = F$.

DEMOSTRACIÓN. Si $K = \Phi$ el teorema es evidente puesto que $F = \mathbf{X}$. Si $K \neq \Phi$ para demostrar la primera parte del teorema es suficiente probar, siendo $\mathbf{X}$ compacto y los conjuntos $F(\psi)$ cerrados, que los conjuntos $F(\psi)$ $(\psi \in K)$ constituyen una base de filtro pero esto se sigue de la proposición 13.

Finalmente, si φ es un punto central de K, cualquiera que sea $\varphi_0 \in K - \{\varphi\}$, existe un punto $\varphi_1 \in K - \{\varphi\}$ tal que φ es un punto del segmento abierto de extremos φ_0 y φ_1, y por la proposición 13 resulta que

$$F(\varphi) \subset F(\varphi_0) \cap F(\varphi_1) \subset F(\varphi_0).$$

Por tanto,

$$F(\varphi) \subset \bigcap_{\psi \in K} F(\psi) \quad \text{y} \quad F(\varphi) = F.$$

§ 4. La teoría de la aproximación en ciertos espacios vectoriales normados

Como anteriormente supondremos aquí que **X** es un espacio topológico compacto y que **Y** es un espacio vectorial normado y además que existen dos funciones reales $H(t)$ y $L(y', y'')$ con las siguientes propiedades:

P_1. *$H(t)$ es una función continua y creciente en la semi-recta $t \geq 0$.*

P_2, *$L(y', y'')$ es una función real definida en $\mathbf{Y} \times \mathbf{Y}$ y lineal en y'', esto es,*

a) $L(y', y_1'' + y_2'') = L(y', y_1'') + L(y', y_2'')$.

b) $L(y', \lambda y'') = \lambda L(y', y'')$ *para cada número real* λ.

P_3. $H(\|y' + y''\|) \geq H(\|y'\|) + L(y', y'')$ *de forma que la igualdad se verifica si y sólo si* $y'' = 0$.

P_4.

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{H(\|y' + \lambda y''\|) - H(\|y'\|)}{\lambda} = L(y', y''),$$

siendo la convergencia uniforme en cada conjunto acotado de $\mathbf{Y} \times \mathbf{Y}$ *y, por consiguiente,* $L(y', y'')$ *continua en* $\mathbf{Y} \times \mathbf{Y}$.

Ejemplos. 1. Si **Y** es un espacio euclídeo en donde está definido el producto escalar (y', y''), siendo

$$\|y' + y''\|^2 = \|y'\|^2 + 2(y', y'') + \|y''\|^2,$$

se puede tomar $H(t) = t^2$ y $L(y', y'') = 2(y', y'')$.

2. Si **Y** es un espacio hermítico en donde está definido el producto escalar (y', y''), siendo

$$\|y' + y''\|^2 = \|y'\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(y', y'') + \|y''\|^2,$$

se puede tomar $H(t) = t^2$ y $L(y', y'') = 2\,\mathrm{Re}\,(y', y'')$.

3. Si $Y = l^p$ $(p > 2)$, siendo

$$\|y' + y''\|^p = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu' + \eta_\nu''|^p = \|y'\|^p + p \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu'' \, |\eta_\nu'|^{p-1} \operatorname{sig} \eta_\nu' +$$

$$+ p(p-1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu''^2 \, |\eta_\nu' + \theta \eta_\nu''|^{p-2} \qquad (0 < \theta < 1)$$

y

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu''^2 \, |\eta_\nu' + \theta \, \eta_\nu''|^{p-2} \leq \|y''\|^2 \, \|y' + \theta \, y''\|^{p-2} \leq$$
$$\leq \|y''\|^2 \, (\|y'\| + \|y''\|)^{p-2},$$

se puede tomar $H(t) = t^p$ y $L(y', y'') = p \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu'' \, |\eta_\nu'|^{p-1} \operatorname{sig} \eta_\nu'$.

Podemos completar ahora el teorema 15 así:

TEOREMA 16. *Si*

$$F = \bigcap_{\varphi \, \varepsilon \, K} F(\varphi),$$

para cada par φ_0 y φ_1 de funciones pertenecientes a K, se tiene

$$\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$$

para todo $x \, \varepsilon \, F$.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\varphi_\lambda = \varphi_0 + \lambda \, \psi \qquad\qquad (\psi = \varphi_1 - \varphi_0)$$

y

$$\varDelta_\lambda = \varphi_\lambda - f = \varDelta_0 + \lambda \, \psi,$$

entonces, como $\varphi_\lambda \, \varepsilon \, K$, teniendo presente P_4, tendremos

$$L(\varDelta_0(x), \, \psi(x)) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{H(\|\varDelta_\lambda(x)\|) - H(\|\varDelta_0(x)\|)}{\lambda} =$$
$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{H(\mu) - H(\mu)}{\lambda} = 0$$

para $x \, \varepsilon \, F$ y, por consiguiente,

$$H(\|\varDelta_1(x)\|) = H(\|\varDelta_0(x)\|) + L(\varDelta_0(x), \, \psi(x)) \qquad (= \mu)$$

para $x \, \varepsilon \, F$, de donde por P_3 resulta $\psi(x) = 0$ para todo $x \, \varepsilon \, F$, es decir, $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$ para todo $x \, \varepsilon \, F$.

OBSERVACIÓN 8. *El teorema 16 es también cierto si* **Y** *es un espacio vectorial normado convexo, es decir, si de $\|y_1\| = 1$, $\|y_2\| = 1$ y $\|(y_1 + y_2)/2\| = 1$ se sigue $y_1 = y_2$.*

COROLARIO 14. *Si* **K** *es de dimensión n y K es de dimensión r,* **K** *es de dimensión $s \leq n - r$ sobre*

$$F = \bigcap_{\varphi \, \varepsilon \, K} F(\varphi)$$

TEOREMA 17. *Si* $\varphi_0 \varepsilon \mathbf{K} - K$ *existe una función* $\varphi_1 \varepsilon \mathbf{K}$ *tal que*

$$L(\Delta_0(x), \psi(x)) < 0 \qquad (\Delta_0 = \varphi_0 - f, \ \psi = \varphi_1 - \varphi_0) \tag{4.1}$$

para todo $x \varepsilon F(\varphi_0)$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, siendo $\mu(\varphi_0) \neq \mu$, existe una función $\varphi_1 \varepsilon \mathbf{K}$ tal que

$$\mu \leq \mu(\varphi_1) < \mu(\varphi_0),$$

entonces, poniendo $\psi = \varphi_1 - \varphi_0$, tendremos por P_3 y P_1, que

$$L(\Delta_0(x), \psi(x)) \leq H(\|\varphi_1(x) - f(x)\|) - H(\|\varphi_0(x) - f(x)\|) = \\ = H(\mu(\varphi_1)) - H(\mu(\varphi_0)) < 0$$

para todo $x \varepsilon F(\varphi_0)$.

TEOREMA 18. *Si* $\varphi_0 \varepsilon \mathbf{K}$ *y existe una función* $\varphi_1 \varepsilon \mathbf{K}$ *tal que*

$$L(\Delta_0(x), \psi(x)) < 0 \qquad (\Delta_0 = \varphi_0 - f, \ \psi = \varphi_1 - \varphi_0) \tag{4.2}$$

para todo $x \varepsilon F(\varphi_0)$, φ_0 *no es una aproximación óptima de* f *por* $\mathbf{K}$, *es decir,* $\varphi_0 \notin K$.

DEMOSTRACIÓN. Como

$$L(\Delta_0(x), \psi(x))$$

es una función continua negativa en $F(\varphi_0)$ y $F(\varphi_0)$ es un conjunto compacto, $L(\Delta_0(x), \psi(x))$ tiene un máximo $-m < 0$ en $F(\varphi_0)$. Sea G el conjunto de los puntos $x \varepsilon \mathbf{X}$ tales que

$$L(\Delta_0(x), \psi(x)) < -m/2.$$

Evidentemente, G es abierto y contiene a $F(\varphi_0)$. Por tanto, según el teorema 13, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $F(\varphi) \subset G$ si $\|\varphi - \varphi_0\| < \varepsilon$.

Por otra parte de P_4 se deduce que

$$H(\|\Delta_0(x) + \lambda\psi(x)\|) < H(\|\Delta_0(x)\|) + \lambda L(\Delta_0(x), \psi(x)) + \lambda \frac{m}{2}$$

para todo $x \varepsilon \mathbf{X}$ y $\lambda : 0 < \lambda < \lambda_0$, si se elige λ_0 de manera conveniente.

Sea

$$0 < \lambda < \operatorname{Min}\left(\frac{\varepsilon}{\|\psi\|}, \lambda_0, 1\right),$$

entonces, si $x \varepsilon F(\varphi_0 + \lambda\psi)$, $x \overline{\varepsilon} G$ y por consiguiente

$$H(\mu(\varphi_0 + \lambda\psi)) = H(\|\Delta_0(x) + \lambda\psi(x)\|) < H(\|\Delta_0(x)\|) +$$
$$+ \lambda L(\Delta_0(x), \psi(x)) + \lambda\frac{m}{2} <$$
$$< H(\mu(\varphi_0)) - \lambda\frac{m}{2} + \lambda\frac{m}{2} = H(\mu(\varphi_0)).$$

De esto resulta que

$$\mu(\varphi_0 + \lambda\psi) < \mu(\varphi_0)$$

para $\varphi_0 + \lambda\psi = (1 - \lambda)\varphi_0 + \lambda\varphi_1 \varepsilon \mathbf{K}$ y por tanto que $\varphi_0 \notin K$.

DEFINICIÓN 8. *Si $\varphi_0 \varepsilon \mathbf{K}$ y $\mathbf{K}(\varphi_0)$ es el conjunto convexo de funciones reales continuas en $\mathbf{X}$ que contiene a la función $g = 0$, imagen de $\mathbf{K}$ por la aplicación $\varphi \to g$ definida por*

$$g(x) = L(\Delta_0(x), \varphi(x) - \varphi_0(x)) \qquad (\Delta_0 = \varphi_0 - f),$$

diremos que un subconjunto N de $\mathbf{X}$ es un conjunto normal respecto de φ_0 (y $\mathbf{K}$), si N es normal respecto de $\mathbf{K}(\varphi_0)$. Análogamente, diremos que N es un conjunto completamente normal respecto de φ_0 (y $\mathbf{K}$) si N es completamente normal respecto de $\mathbf{K}(\varphi_0)$.

OBSERVACIÓN 9. *Si $\mathbf{K}$ es una variedad lineal $\mathbf{M}$ y $\varphi_0 \varepsilon \mathbf{K}$, $\mathbf{K}(\varphi_0) = \mathbf{M}(\varphi_0)$ es un sistema lineal de funciones reales continuas en $\mathbf{X}$.*

TEOREMA 19. *Para que φ sea una aproximación óptima de f por $\mathbf{K}$, es decir, para que $\varphi \varepsilon K$, es necesario y suficiente que $F(\varphi)$ sea un conjunto normal respecto de φ.*

DEMOSTRACIÓN. Resulta inmediatamente de los teoremas 17 y 18.

TEOREMA 20. *Si N es un conjunto completamente normal respecto de $\varphi \varepsilon K$ y $N \subset F(\varphi)$, se tiene*

$$N \subset F = \bigcap_{\psi \varepsilon K} F(\psi).$$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar el teorema es suficiente probar que para cada $\varphi^* \varepsilon K$, $N \subset F(\varphi^*)$. En efecto, como para $\Delta = \varphi - f$, $\Delta^* = \varphi^* - f$ y $\psi = \varphi^* - \varphi$ se verifica

$$g(x) = L(\Delta(x), \psi(x)) \leq H(\|\Delta^*(x)\|) - H(\|\Delta(x)\|) =$$
$$= H(\|\Delta^*(x)\|) - H(\mu) \leq 0$$

para todo $x \varepsilon F(\varphi)$ con $g \varepsilon \mathbf{K}(\varphi)$, tendremos, según la proposición 6, que N está contenido en el conjunto de los ceros de g en $F(\varphi)$ y, por consiguiente, en $F(\varphi^*)$.

COROLARIO 15. *Todo conjunto $N \subset F(\varphi)$, completamente normal respecto de $\varphi \varepsilon K$ es un conjunto completamente normal respecto de cada $\varphi^* \varepsilon K$.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de los teoremas 20 y 16.

COROLARIO 16. *Todo conjunto $N \subset F(\varphi)$, normal minimal respecto de $\varphi \varepsilon K$ es un conjunto normal minimal respecto de cada $\varphi^* \varepsilon K$. Todo conjunto $F^* \subset F(\varphi)$, normal cerrado minimal respecto $\varphi \varepsilon K$ es un conjunto con la misma propiedad respecto de cada $\varphi^* \varepsilon K$.*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce de los corolarios 2, 3, 4 y 15.

COROLARIO 17. *Todo conjunto $F^* \subset F(\varphi)$, cerrado y normal respecto de $\varphi \varepsilon K$ tiene una intersección no vacía con*

$$F = \bigcap_{\psi \varepsilon K} F(\psi).$$

DEMOSTRACIÓN. Se deduce de los teoremas 2, 3 y 20.

TEOREMA 21. *Si $\mathbf{K}$ es una variedad lineal $\mathbf{M}$ de dimensión finita n, K no es vacío y existe un conjunto N, normal minimal respecto de cada $\varphi \varepsilon K$, contenido en*

$$F = \bigcap_{\psi \varepsilon K} F(\psi).$$

Además, si K es de dimensión r, si N consta de p puntos y si la dimensión de $\mathbf{M}(\varphi_0)$ $(\varphi_0 \varepsilon K)$ sobre cada subconjunto de $\mathbf{X}$ (o F) que conste de q puntos es q, se tiene

$$q + 1 \leq p \leq n - r + 1 \tag{4.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario 10 y el teorema 12 el conjunto K de las aproximaciones óptimas de f por $\mathbf{M}$ no es vacío, por el teorema 19 si $\varphi_0 \varepsilon K$ el conjunto cerrado $F(\varphi_0)$ es normal respecto de φ_0 y por el corolario 9 existe un conjunto $N \subset F(\varphi_0)$, normal minimal respecto de φ_0. Como, según el corolario 3, N es completamente normal resulta, por el teorema 20, que $N \subset F$. Además, por el corolario 16, N es un conjunto normal minimal respecto de cada $\varphi \varepsilon K$. Con esto queda demostrada la primera parte.

Como por el corolario 14 la dimensión de $\mathbf{M}$ sobre F no es superior a $n - r$ y por el teorema 11 la dimensión de $\mathbf{M}(\varphi_0)$ sobre $N\ (\subset F)$ es $p - 1$, tendremos que $p - 1 \leq n - r$. Por otra parte, siendo q' la dimensión de $\mathbf{M}(\varphi_0)$ sobre cada subconjunto de $\mathbf{X}$ (o F) que conste de $q' \leq q$ puntos, se deduce que $p \geq q + 1$.

DEFINICIÓN 9. *Diremos que $y'' \in \mathbf{Y}$ es ortogonal a $y' \in \mathbf{Y}$ si $L(y', y'') = 0$.*

TEOREMA 22. *Con las mismas hipótesis que en el teorema 21, si cualesquiera que sean $\varphi \in \mathbf{M}$ y $\varphi^* \in \mathbf{M}$ $(\varphi^* \neq \varphi)$, $\psi(x) = \varphi^*(x) - \varphi(x)$ es ortogonal a $\varphi(x) - f(x)$ a lo sumo para $n - 1$ valores de x pertenecientes a $F(\varphi)$, resulta que K se reduce a una función φ_0 y que cada conjunto $N \subset F(\varphi_0)$, normal minimal respecto de φ_0, consta de $n + 1$ puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Como por las condiciones impuestas se deduce que la dimensión de $\mathbf{M}(\varphi_0)$ sobre cada subconjunto de F que conste de $q = n$ puntos es n si $\varphi_0 \in K$, por la desigualdad (4.3) se sigue $r = 0$ y $p = n + 1$.

COROLARIO 18. *Si $\mathbf{S}$ es un sistema lineal de funciones reales continuas en $\mathbf{X}$ de dimensión finita n y si cada $\varphi \in \mathbf{S} - \{0\}$ tiene a lo sumo $n - 1$ ceros en $\mathbf{X}$ (o $F(\varphi)$), existe una y una sola aproximación óptima φ_0 de f por $\mathbf{S}$ y cada conjunto $N \subset F(\varphi_0)$, normal minimal respecto de φ consta de $n + 1$ puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Es un caso particular del teorema 22.

COROLARIO 19. *Si $\mathbf{S}$ es un sistema lineal de funciones complejas continuas en $\mathbf{X}$ de dimensión finita n (sobre el cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos) y si cada $\varphi \in \mathbf{S} - \{0\}$ tiene a lo sumo $n - 1$ ceros en $\mathbf{X}$ (o $F(\varphi)$), existe una y una sola aproximación óptima φ_0 de f por $\mathbf{S}$ y cada conjunto $N \subset F(\varphi_0)$, normal minimal respecto de φ_0, consta de un número p de puntos tal que*

$$n + 1 \leq p \leq 2n + 1 \tag{4.4}$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathbf{S}$ es de dimensión $2n$ sobre el cuerpo $\mathbf{R}$ de los números reales, por el teorema 21, K no es vacío. Por otra parte, siendo $L(y', y'') = \operatorname{Re}(y'\,\overline{y''})$ para $H(t) = t^2$, se deduce que la dimensión de $\mathbf{S}(\varphi)$ sobre cada subconjunto de $\mathbf{X}$ (o $F(\varphi)$) que conste de $q = n$ puntos es n y, por tanto, que $p \geq n + 1$. De esto resultaría, por el teorema 16, si existiese más de una aproximación óptima que existiría una función $\psi \in \mathbf{S}$ que se anularía en F, y, por consiguiente en $p \geq n + 1$ puntos. Como esto es absurdo existe una sola aproximación óptima de f por $\mathbf{S}$. La desigualdad (4.4) se sigue entonces de (4.3) teniendo presente que la dimensión de K es $r = 0$.

OBSERVACIÓN 10. *Parte de los corolarios 18 y 19 constituyen la condición suficiente del teorema de* HAAR *para los campos, real y complejo.*

BIBLIOGRAFIA

[1] ACHIESER, N. I. — *Theory of Approximation.* — Frederik Ungar Publishing Co. New York, 1956.

[2] BERNSTEIN, S. N. — *Leçons sur les propietés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.* Paris, Gauthier-Villars, 1926.

[3] BOURBAKI, N. — *Eléments de Mathématique* Livre III. *Topologie générale.* Chap. 1. *Structures topologiques.* Chap. .. *Structures uniformes.* — Act. Sc. et Ind. n.º 1142.

[4] BOURBAKI, N. — *Eléments de Mathématique.* Livre III. *Topologie générale.* Chap. 10. *Espaces fonctionnels.* Dictionnaire. — Act. Sc. et Ind. n.º 1084.

[5] BOURBAKI, N. — *Eléments de Mathématique.* Livre V. *Espaces vectoriels topologiques.* Chap. 1. *Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué.* Chap. 2. *Ensembles convexes et espaces localement convexes.* — Act. Sc. et Ind. n.º 1189.

[6] HAAR, A. — *Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen.* — Math. Annalen 78, 1918.

[7] IVANOFF, V. K. — *Sobre la aproximación uniforme de funciones continuas* (en ruso). — Mat. Sbornik, N. S. 30(72), 543-558, 1952.

[8] KOLMOGOROFF, A. N. — *Una observación sobre los polinomios de Tchebycheff de desviación mínima de una función dada* (en ruso). — Uspehi Matem. Nauk. N. S. 3, n.º 1 (23), 216-221, 1948.

Universidad de Zaragoza