SERIES DE DIRICHLET CONSIDERADAS COMO ESPACIOS DE SUCESIONES

por

JULIA PRADA BLANCO

SUMMARY

This work begins with some fundamental ideas of perfect spaces. In the second paragraph, the following spaces are introduced

$$H(\mu) = \left\{ a \in \omega / \sum_0^\infty |a_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \infty, \quad \forall \mu' > \mu \right\}$$

$$H(-\infty) = \left\{ a \in \omega / \sum_0^\infty |a_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \infty, \quad \forall \mu' \in R \right\}$$

$$H[\mu] = \{ b \in \omega / \exists\, n_0 \in N, \quad \exists\, \mu' > \mu / |b_n| \leq e^{-\lambda_n \mu'}, \quad \forall n \geq n_0 \}$$

$$H[-\infty] = \{ b \in \omega / \exists\, n_0 \in N, \quad \exists\, \mu' \in R / |b_n| \leq e^{-\lambda_n \mu'}, \quad \forall n \geq n_0 \}$$

where (λ_n) is a sequence of real numbers $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \to \infty$. We show that $H[\mu]^x = H(\mu)$ and $H(\mu)^x = H[\mu]$, where $\mu \in R$ or $\mu = -\infty$ and $lím \dfrac{\lambda_n}{n} > 0$.

Paragraph three is concerned with the different topologies which can be defined in terms of the dual pairs $\langle H[\mu], H(\mu) \rangle$ and $\langle H(\mu), H[\mu] \rangle$, where $\mu \in R$ or $\mu = -\infty$.

Paragraph four deals with the inductive limit of the spaces $H(\mu)$ and the projective limit of the spaces $H[\mu]$, where $\mu < R$.

INTRODUCCION

Sea w el espacio vectorial sobre C formado por todas las sucesiones $x = (x_n) / x_n \in C, \ \forall n \in N$.

Llamamos espacio de sucesiones λ a cualquier subespacio vectorial de w.

Köthe y Toeplitz introdujeron el concepto de α-dual de un espacio de sucesiones λ, notado por λ^x. Aquellos espacios de sucesiones λ que coinciden con su α-bidual, $\lambda = \lambda^{xx}$, se llaman de Kothe o perfectos.

En el capítulo I de este trabajo, comenzamos dando unos resultados generales de la teoría de la α-dualidad. A continuación, exponemos algunos ejemplos de espacios de Köthe, los espacios $l^p \, (1 \leq p \leq \infty)$, $h(\mu) \, (0 < \mu \leq \infty)$ y $h[\mu] \, (0 \leq \mu < \infty)$.

Posteriormente, establecemos las relaciones de inclusión existentes entre estos espacios y teniendo en cuenta las parejas duales $\langle l^q, l^p \rangle$, $\langle h\left[\frac{1}{\mu}\right], h(\mu) \rangle$, $\langle h\left(\frac{1}{\mu}\right), h[\mu] \rangle$ comparamos las topologías dadas por la dualidad en el subespacio con las topologías inducidas en él por las topologías que la α-dualidad engendra en el espacio en que está incluido, llegando al resultado de que las aplicaciones canónicas dadas por las inclusiones son siempre continuas para cualquier topología de las establecidas a partir de las parejas duales.

En el capítulo II, introducimos previamente el concepto de serie de Dirichlet y algunas notaciones concernientes al estudio de dichas series.

A partir de ello, formamos los espacios $H(\mu)$, $\mu \in R$ y $H(-\infty)$ estableciendo, después, los espacios $H[\mu]$, $\mu \in R$ y $H[-\infty]$.

Vemos que $H(\mu)$ ($\mu \in R$ y $\mu = -\infty$) son espacios escalonados, lo que nos lleva al resultado de que son perfectos o de Köthe.

A continuación, estudiamos la α-dualidad.

En el capítulo III, que es de índole topológica, consideramos las parejas duales $\langle H[\mu], H(\mu) \rangle$ y $\langle H(\mu), H[\mu] \rangle$ en los casos lim inf $\frac{\lambda_n}{n} > 0$ (finito o no), estudiando las diferentes topologías dadas por ellas.

En el capítulo IV, estudiamos el límite inductivo de los espacios $H(\mu)$, $\mu < R$ y el límite proyectivo de los espacios $H[\mu]$.

En cuanto a la notación usada, sólo cabe destacar la empleada para denotar las diferentes topologías dadas por una pareja dual.

Sea $\langle B, A \rangle$ una tal pareja dual. σ_A, Δ_A, β_A, θ_A y β_A^* designan las topologías débil, normal, fuerte, de Mackey y semifuerte en A, respectivamente.

Respecto a los teoremas que utilizamos, hacemos referencia a los trabajos en que se encuentran, dando al final de la memoria una reseña bibliográfica de los libros y trabajos consultados.

Debo hacer constar mi agradecimiento al director de este trabajo, Prof. Dr. D. Rafael Aguiló Fuster.

CAPITULO I

LA α-DUALIDAD

Llamamos w al espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos de todas las sucesiones complejas.

A todo subespacio vectorial de w, $\lambda \subset w$, le llamamos espacio de sucesiones. Consideremos

$$\varphi = \{(x]_n) \ / \ \forall n \in N, \ X_n = 0, \text{ excepto un número finito}\}$$

y tenemos un ejemplo de espacio de sucesiones.

Un espacio de sucesiones se dice normal si cuando $x \in \lambda$ también $y \in \lambda$, siendo y un vector cualquiera tal que $|y_i| \leq |x_i|$, $\forall i$. φ es un espacio de sucesiones normal.

Dado un conjunto de vectores M, se llama envoltura normal de M al conjunto

$$N(M) = \{x \in w \ / \ |x_i| \leq |m_i| \text{ para algún } m \in M\}$$

M es normal sii $N(M) = M$.

A cada espacio de sucesiones λ le asignamos un nuevo espacio al que vamos a llamar λ^x, su α-dual.

$$\lambda^x = \left\{ u = (u_i) \ / \ \sum_0^\infty |u_i x_i| < \infty, \ \forall x \in \lambda \right\}$$

Diremos que $\langle B, A\rangle$ es un sistema dual cuando A y B son espacios de sucesiones y la forma bilineal

$$(u, x) \rightarrow ux = \sum_{0}^{\infty} u_i x_i$$

está bien definida sobre $B \times A$, cumpliendo las dos condiciones siguientes

$$ux = 0, \quad \forall x \in A \Rightarrow u = 0$$

$$ux = 0, \quad \forall u \in B \Rightarrow x = 0$$

En general $\langle \lambda^x, \lambda\rangle$ no es un sistema dual, aunque para ello es suficiente que $\varphi \subset \lambda$. La condición no es necesaria.

Un espacio de sucesiones se llöma de Kothe o perfecto sii $\lambda = \lambda^{xx}$.

Si λ es perfecto $\Rightarrow \lambda$ es normal y $\varphi \subset \lambda \Rightarrow \langle \lambda^x, \lambda\rangle$ es siempre sistema dual.

EJEMPLOS DE ESPACIOS DE SUCESIONES

Los espacios l^p, $1 \leq p \leq \infty$

$$l^p = \left\{x \in w \;/\; \sum_{0}^{\infty} |x_i|^p < \infty\right\} \qquad l^\infty = \{x \in w \;/\; |x_n| \leq M, \quad \forall n \in N\}$$

Sabemos que l^1 y l^∞ son perfectos y $(l^1)^x = l^\infty$, $(l^\infty)^x = l^1\, l^p$. es perfecto para $1 < p < \infty$, $(l^p)^x = l^q$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Los espacios $h(\mu)$ y $h[\mu]$

$$h(\mu) = \left\{a \in w \;/\; \sum_{0}^{\infty} k^n |a_n| < \infty, \ \forall K \in (0, \mu)\right\} \qquad 0 < \mu < \infty$$

$$h(\infty) = \left\{a \in w \;/\; \lim_{n} \sqrt[n]{k^n |a_n|} = 0, \quad \forall K > 0\right\}$$

$$h[\mu] = \left\{u \in w \;/\; \exists\, n_0 \in N \;/\; \forall n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq k^n, K < \frac{1}{\mu}\right\} 0 < \mu < \infty$$

$$h[0] = \left\{u \in w \;/\; |u_n| \leq k^n, \quad \text{para algún} \quad K > 0\right\}$$

Sabemos que estos espacios son perfectos y que

$$h[\mu]^x = h\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad 0 < \mu < \infty\,; \quad h[0]^x = h(\infty)$$

$$h(\mu)^x = h\left[\frac{1}{\mu}\right], \quad 0 < \mu < \infty\,; \quad h(\infty)^x = h[0]$$

Relaciones entre los espacios h y l^p

1.º) — Si $\mu > 1, \quad p \geq 1 \Rightarrow h(\mu) \subset l^p$

$$a \in h(\mu) \Rightarrow \sum_0^\infty k^n |a_n| < \infty, \quad \forall K < \mu \Rightarrow \sum_0^\infty |a_n| < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in l^1 \Rightarrow h(\mu) \subset l^1 \subset l^p$$

2.º) — Si $\mu \leq 1, \quad p \geq 1 \Rightarrow l^p \subset h(\mu)$

$x \in l^\infty \Rightarrow \Sigma\, x_n z^n$ tiene radio de convergencia $R \geq 1 \Rightarrow \Sigma\, k^n |x_n| < \infty$, $\forall K \;/\; K < R \Rightarrow x \in h(\mu)\ (\mu \leq 1) \Rightarrow l^p \subset l^\infty \subset h(\mu)$.

3.º) — Si $\mu \geq 1,\ p \geq 1 \Rightarrow h[\mu] \subset l^p$

Sabemos que $l^p \subset h(\mu),\ \mu \leq 1 \Rightarrow h[\mu] \subset l^p,\ \mu \geq 1$.

4.º) — Si $\mu < 1,\ p \geq 1 \Rightarrow l^p \subset h[\mu]$

Sabemos que $h(\mu) \subset l^p,\ \mu > 1 \Rightarrow l^p \subset h[\mu],\ \mu < 1$.

Comparacion de las topologias

Se nos presentan los siguientes casos:

$a_1)$	$\mu = 1$,	$p = 1$,	$l^1 \subset h(1)$	$b_1)$	$\mu = 1$,	$p > 1$,	$l^p \subset h(1)$
$c_1)$	$\mu > 1$,	$p = 1$,	$h(\mu) \subset l^1$	$d_1)$	$\mu > 1$,	$p > 1$,	$h(\mu) \subset l^p$
$e_1)$	$\mu < 1$,	$p = 1$,	$l^1 \subset h(\mu)$	$f_1)$	$\mu < 1$,	$p > 1$,	$l^p \subset h(\mu)$
$a_2)$	$\mu = 1$,	$p = 1$,	$h[1] \subset l^1$	$b_2)$	$\mu = 1$,	$p > 1$,	$h[1] \subset l^p$
$c_2)$	$\mu > 1$,	$p = 1$,	$h[\mu] \subset l^1$	$d_2)$	$\mu > 1$,	$p > 1$,	$h[\mu] \subset l^p$
$e_2)$	$\mu < 1$,	$p = 1$,	$l^1 \subset h[\mu]$	$f_2)$	$\mu < 1$,	$p > 1$,	$l^p \subset h[\mu]$

TOPOLOGIAS DEBILES

$a_1)$ $\mu = 1$, $p = 1$, $l^1 \subset h(1)$

$\sigma_{h(1)}$ = topología débil en $h(1)$ respecto a la pareja dual.
σ_{l^1} = topología débil en l^1 respecto a la pareja dual.
α = topología inducida en l^1 por la topología $\sigma_{h(1)}$.

PROPOSICION I-1

σ_{l^1} es más fina que α.

Demostración

Una base de entornos de cero para la topología $\sigma_{h(1)}$ viene dada por la familia A tal que

$$A = U_{u_1, u_2 .., u_n; \varepsilon} = \{a \in h(1) \;/\; \sup |u_i(a)| < \varepsilon, \; u_i \in h[1]\}$$

Una base de entornos de cero para la topología σ_{l^1} viene dada por la familia B tal que

$$B = U_{u_1, u_2 ... u_n; \varepsilon} = \{x \in l^1 \;/\; \sup |u_i(x)| < \varepsilon, \; u \in l^\infty\}$$

Una base de entornos de cero para α viene dada por la familia $A \cap l_1$

$$A \cap l^1 = \{x \in h(1) \cap l^1 \;/\; \sup |u_i(x)| < \varepsilon, \; u_i \in h[1]\}$$

Como $l^1 \subset h(1) \Rightarrow h[1] \subset l^\infty \Rightarrow$ todo $A \cap l^1$ es un B.

Observación I. En todos los demás casos se encuentra el mismo resultado, efectuando demostraciones análogas.

TOPOLOGIAS NORMALES

$a_1)$ $\mu = 1$, $p = 1$, $l^1 \subset h(1)$

$\Delta_{h(1)}$ = topología normal en $h(1)$.
Δ_{l^1} = topología normal en l^1.
γ = topología inducida en l^1 por la topología $\Delta_{h(1)}$

PROPOSICION I-2

Δ_{l^1} es más fina que γ.

Demostración

Una base de entornos de cero para $\Delta_{h(1)}$ viene dada por la familia A tal que

$$A = U_{(u,\varepsilon)} = \{a \in h(1) \ / \ p_u(a) \leq \varepsilon, \ u \in h[1], \ u > 0\}$$

Una base de entornos de cero para Δ_{l^1} viene dada por la familia B tal que

$$B = U_{(u,\varepsilon)} = \{x \in l^1 \ / \ Pu(x) \leq \varepsilon, \ u \in l^\infty, \ u > 0\}$$

Una base de entornos de cero para γ viene dada por la familia $A \cap l^1$ tal que

$$A \cap l^1 = \{x \in l^1 \ / \ Pu(x) \leq \varepsilon, \ u \in h[1]\}$$

Como $l^1 \subset h(1) \Rightarrow h[1] \subset l^\infty \Rightarrow$ todo $A \cap l^1$ es un B.

Observación II. En todos los demás casos se encuentra el mismo resultado, efectuando demostraciones análogas.

TOPOLOGIAS FUERTES

$a_1)$ $\mu = 1$, $p = 1$, $l^1 \subset h(1)$

$\beta_{h(1)}$ = topología fuerte en $h(1)$
β_{l^1} = topología fuerte en l^1
β = topología inducida en l^1 por $\beta_{h(1)}$

PROPOSICION I-3

β_{l^1} es más fina que β.

Demostración

Una base de entornos de cero para la topología $\beta_{h(1)}$ viene dada por la familia A tal que

$$A = U_{(p,\varepsilon)} = \{a \in h(1) \ / \ p^k |a_k| \leq \varepsilon, \ \forall k, \ 0 < p < 1\}$$

Una base de entornos de cero para la topología β_{l^1} viene dada por la familia B tal que

$$B = U_\varepsilon = \{x \in l^1 \ / \ ||x||_1 \leq \varepsilon\} = \left\{x \in l^1 \ / \ \sum_0^\infty |x_k| \leq \varepsilon\right\}$$

Una base de entornos de cero para la topología β viene dada por la familia $A \cap l^1$ tal que

$$A \cap l^1 = \{x \in l^1 \ / \ p^k |x_k| \leq \varepsilon, \ \forall k, \ 0 < p < 1\}$$

Tenemos $B \subset A \cap l^1 (\forall p \ / \ 0 < p < 1$ y el mismo $\varepsilon)$.
En efecto:

$$x \in B \Rightarrow \sum_0^\infty |x_k| \leq \varepsilon \Rightarrow p^k |x_k| \leq |x_k| \, (p < 1) \Rightarrow x \in A \cap l^1$$

todo entorno de β es un entorno de β_{l^1}.

$d_1)$ $\mu > 1$, $p > 1$, $(p \neq \infty)$, $h(\mu) \subset l^p$

β_{l^p} = topología fuerte en l^p

$\beta_{h(\mu)}$ = topología fuerte en $h(\mu)$

β = topología inducida en $h(\mu)$ por β_{l^p}

PROPOSICION I-4

$\beta_{h(\mu)}$ es más fina que β

Demostración

Una base de entornos de cero para β_{l^p} viene dada por la familia A tal que

$$A = U_\varepsilon = \left\{x \in l^p \ / \ \left(\sum_0^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon\right\}$$

Una base de entornos de cero para $\beta_{h(\mu)}$ viene dada por la familia B tal que

$$B = U_{(m,\varepsilon)} = \{a \in h(\mu) \ / \ m^k |a_k| \leq \varepsilon, \ \forall k, \ 0 < m < \mu\}$$

Una base de entornos de cero para β viene dada por la familia $A \cap h(\mu)$ tal que

$$A \cap h(\mu) = \left\{a \in h(\mu) \ / \ \left(\sum_0^\infty |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon\right\}$$

Veamos que todo $A \cap h(\mu)$ contiene siempre a un B.
Sea

$$A \cap h(\mu) = \left\{a \in h(\mu) \ / \ \left(\sum_0^\infty |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon\right\}$$

Tomemos un B tal que

$$B = \left\{a \in h(\mu) \ / \ m^k |a_k| \leq \varepsilon', \ \varepsilon' = \frac{\varepsilon (m^p - 1)^{\frac{1}{p}}}{m}, \ m > 1\right\}$$

$$a \in B \Rightarrow m^k |a_k| \leq \varepsilon' \Rightarrow |a_k| \leq \frac{\varepsilon'}{m^k} \Rightarrow |a_k| \leq \frac{\varepsilon'^p}{m^{kp}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_0^\infty |a_k|^p \leq \varepsilon'^p \sum_0^\infty \left(\frac{1}{m^p}\right)^k$$

Como $m > 1 \Rightarrow m^p > 1 \Rightarrow \sum_0^\infty \left(\frac{1}{u^p}\right)^k = \frac{m^p}{m^p - 1} \Rightarrow \left(\sum_0^\infty |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$

$r > 1, \ p > 1.$ Caso $p = \infty, \ h(\mu) \subset l^\infty$

β_{l^∞} = topología fuerte en l^∞

$\beta_{h(\mu)}$ = topología fuerte en $h(\mu)$

β = topología inducida en $h(\mu)$ por β_{l^∞}

PROPOSICION I-5

$\beta_{h(\mu)}$ es más fina que β

Demostración

Una base de entornos de cero para β_{l^∞} viene dada por la familia A tal que

$$A = \{x \in l^\infty \ / \ \sup |x_k| \leq \varepsilon\}$$

Una base de entornos de cero para $\beta_{h(\mu)}$ viene dada por la familia B tal que

$$B = U_{(m,\varepsilon)} = \{a \in h(\mu) \ / \ m^k |x_k| \leq \varepsilon, \ \forall \, k, \ 0 < m < \mu\}$$

Una base de entornos de cero para β viene dada por la familia $A \cap h(\mu)$ tal que

$$A \cap h(\mu) = \{a \in h(\mu) \ / \ \sup |a_k| \leq \varepsilon\}$$

Todo $A \cap h(\mu)$ contiene a un B.

Sea $\qquad A \cap h(\mu) = \{a \in h(\mu) \ / \ \sup |a_k| \leq \varepsilon\}$

Tomemos un B tal que

$$B = \{a \in h(\mu) \ / \ m^k |a_k| \leq \varepsilon', \ \varepsilon' = \varepsilon, \ m = 1\}$$

Observación IV. Los casos e_1, f_1 y a_2 son evidentes.

$b_2)$ $\quad r = 1, \ p > 1, \ h[1] \subset l^p$.

β_{l^p} = topología fuerte en l^∞

$\beta_{h[1]}$ = topología fuerte en $h[1]$

β = topología inducida en $h[1]$ por β_{l^p}

PROPOSICION I-6

$\beta_{h[1]}$ es más fina que β

Demostración

Una base de entornos de cero para b_{l^p} viene dada por la familia A tal que

$$A = \left\{ x \in l^p \ / \ \left(\sum_0^\infty |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \right\}$$

Una base de entornos de cero para $\beta_{h[1]}$ viene dada por la familia B tal que

$$B = U_{\beta_{h[1]}} = a \in h[1] \ / \ P_u(a) \leq \varepsilon, \ u > 0, \ u \in h(1)\}$$

Una base de entornos de cero para β viene dada por la familia U_β tal que

$$U_\beta = \left\{ a \in h[1] \ / \ \left(\sum_0^\infty |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \right\}$$

$\forall \, U_\beta, \ \exists \, U_{\beta_{h[1]}} \ / \ U_{\beta_{h[1]}} \subset U_\beta$.

Dado U_β, tomemos $U_{\beta_{h[1]}}$ dado por la sucesión $u_n = n^2 + 1$ y

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\left(\sum_0^\infty \left(\frac{1}{n^2 + 1} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}}$$

Por lo tanto

$$\left(\sum_0^\infty \left(\frac{1}{n^2 + 1} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$a \in U_{\beta_{h[1]}} \Rightarrow P_u(a) \leq \varepsilon' \Rightarrow \left(\sum_0^\infty |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

$\mu = 1, \ p < 1$. Caso $p = \infty$, $h[1] \subset l^\infty$.

β_{l^∞} = topología fuerte en l^∞

$\beta_{h[1]}$ = topología fuerte en $h[1]$

β = topología inducida en $h[1]$ por β_{l^∞}

PROPOSICION I-7

$\beta_{h[1]}$ es más fina que β

Demostración

Una base de entornos de cero para β_{l^∞} viene dada por la familia A tal que

$$A = \{x \in l^\infty \ / \ \sup |x_k| \leq \varepsilon\}$$

Una base de entornos de cero para $\beta_{h[1]}$ viene dada por la familia B tal que

$$B = U_{\beta_{h[1]}} = \{a \in h[1] \ / \ P_u(a) \leq \varepsilon, \ u > 0, \ u \in h(1)\}$$

Una base de entornos de cero para β viene dada por la familia U_β tal que

$$U_\beta = \{a \in h(1) \ / \ \sup |a_k| \leq \varepsilon\}$$

$$\forall \, U_\beta, \ \exists \, U_{\beta_{h[1]}} \ / \ U_{\beta_{h[1]}} \cap U_\beta$$

Dado U_β, tomemos $U_{\beta_{h[1]}}$ dado por la sucesión $u_n = n^2 + 1$ y $\varepsilon' = \varepsilon$

$$a \in U_{\beta_{h[1]}} \Rightarrow P_u(a) \leq \varepsilon' \Rightarrow \sup |a_i| \leq \varepsilon$$

Observación V. Los casos c_2,, d_2 e_2 y f_2 son evidentes.

TOPOLOGIAS DE MACKEY

Observación VI. Las demostraciones son inmediatas en todos los casos, encontrándose en todos ellos el mismo resultado.

CAPITULO II

ESPACIOS DE SUCESIONES DE SERIES DE DIRICHLET

Llamamos serie de Dirichlet a una serie de la forma

$$\Sigma\, a_n\, e^{-\lambda_n s}$$

donde $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \ldots$ es una sucesión de números reales, monótona creciente tal que $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \to \infty$

La variable s es una variable compleja y $a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ es una sucesión de números complejos. $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ son llamados coeficientes de la serie y $\lambda_0,\ \lambda_1, \ldots \lambda_n \ldots$ es el tipo de la serie.

Entre los tipos de importancia tenemos $\lambda_n = lg\ n,\ a_0 = 0$

La serie es, pues, de la forma

$$\sum_1^\infty a_n\, n^{-s} = \frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \ldots$$

llamada serie de Dirichlet ordinaria.

Si $a_1 = a_2 = \ldots$ iguales a uno, tenemos

$$\sum_1^\infty n^{-s}$$

que representa la función zeta de Riemann.

Los espacios $H(\mu)$

Consideremos los espacios $H(\mu)$ tal que

$$H(\mu) = \left\{ a \in w \ / \ \sum_0^\infty |a_n|\, e^{-\lambda_n \mu'} < \infty,\ \forall\ \mu' > \mu \right\}$$

siendo μ cualquier número real.

Sea $\mu = -\infty$ y consideremos el espacio $H(-\infty)$ tal que

$$H(-\infty) = \left\{ a \in w \ / \ \sum_0^\infty |a_n|\, e^{\lambda_n \mu'} < \infty,\ \forall\ \mu' \in R \right\}$$

$\lambda_0,\ \lambda_1 \ldots \lambda_n \ldots$ es cualquier sucesión de números reales tal que $\lambda_n \to \infty$

PROPOSICION II-1

Los espacios $H(\mu)$ son escalonados de orden uno.

Demostración

Sea $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n \dots$ una sucesión de números reales, decreciente y convergente a μ.

Consideremos los vectores

$$a_1 = (a_1^n) = (e^{-\lambda_n \mu_1}) \dots a_k = (a_k^n) = (e^{-\lambda_n \mu_k}) \dots$$

para $k = 1, 2 \dots$

Si los tomamos como escalones, el espacio escalonado correspondiente a ellos es

$$\bigcap_1^\infty \lambda_{a_k}$$

Veamos que

$$H(\mu) = \bigcap_1^\infty \lambda_{a_k}$$

En efecto: $a \in H(\mu) \Rightarrow \sum\limits_0^\infty |a_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \infty, \quad \forall \mu' > \mu.$

Ahora bien, $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_k \dots$ son mayores que μ,

$$\forall k \in N \Rightarrow \sum_0^\infty |a_n| e^{-\lambda_n \mu_k} < \infty, \ \forall \mu_k \Rightarrow a \in \lambda_{a_k}, \ \forall k \in N \Rightarrow a \in \bigcap_1^\infty \lambda_{a_k}$$

Recíprocamente

$$x \in \bigcap_1^\infty \lambda_{a_k} \Rightarrow \sum_0^\infty |x_n| e^{-\lambda_n \mu_k} < \infty, \ \forall \mu_k$$

Queremos ver que $x \in H(\mu) \Leftrightarrow \sum\limits_0^\infty |x_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \infty, \ \forall \mu' > \mu.$

Sea $\quad \mu' > \mu \Rightarrow |\mu_k - \mu| < \mu' - \mu, \ \forall k \geq k_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{\lambda_n \mu_k} < e^{\lambda_n \mu'} \Rightarrow \sum_0^\infty |x_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \sum_0^\infty |x_n| e^{-\lambda_n \mu_k}$$

cuando μ_k es tal que $k \geq k_0 \Rightarrow x \in H(\mu)$.

PROPOSICION II-2

Sea $\mu = -\infty$. El espacio $H(-\infty)$ es escalonado de orden uno.

Demostración

Consideremos los números enteros negativos $-1, -2, -3 \ldots$ y tomemos los escalones

$$a_1 = (a_1^n) = (e^{-\lambda_n(-1)}) \ldots a_k = (a_k^n) = (e^{-\lambda_n(-k)}) \ldots$$

El espacio escalonado correspondiente a ellos es

$$\bigcap_1^{\infty} \lambda_{a_k}$$

Veamos que $H(-\infty) = \bigcap_1^{\infty} \lambda_{a_k}$.

En efecto:

$$a \in H(-\infty) \Rightarrow a \in \lambda_{a_k}, \ \forall\, k \Rightarrow a \in \bigcap_1^{\infty} \lambda_{a_k}$$

Recíprocamente

$$x \in \bigcap_1^{\infty} \lambda_{a_k} \Rightarrow \sum_0^{\infty} |x_n| e^{\lambda_n k} < \infty, \ \forall\, k \in N$$

Sea $\quad \mu' \in R \Rightarrow \exists\, k \in N \ / \ -k < \mu' \Rightarrow e^{\lambda_n k} > e^{\lambda_n \mu'} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_0^{\infty} |x_n| e^{\lambda_n \mu'} < \infty, \ \mu' \in R \Rightarrow x \in H(-\infty)$$

NOTA. Como consecuencia de la proposición anterior, los espacios $H(\mu)$, $\mu \in R$ y $H(\mu)$, $\mu = -\infty$ son perfectos.

LOS ESPACIOS $H[\mu]$

Consideremos los espacios $H[\mu]$ tal que

$$H[\mu] = \{b \in w \ / \ \mu' > \mu \quad \text{y un} \quad n_0 \in N \ / \ |b_n| \leq e^{-\lambda_n \mu'}, \ \forall\, n \geq n_0\}$$

siendo μ cualquier número real.

Sea $\mu = -\infty$ y consideremos el espacio $H[-\infty]$ tal que

$$H[-\infty] = \{b \in w \mid \exists\, \mu' \in R \text{ y un } n_0 \in N \mid |b_n| \leq e^{-\lambda_n \mu'}, \ \forall\, n \geq n_0\}$$

$\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_n \ldots$ es cualquier sucesión de números reales tal que $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \to \infty$.

PROPOSICION II-3

$$H(\mu) = H[\mu]^x$$

Demostración

$$u \in H[\mu]^x \Rightarrow \sum_0^\infty |u_n|\,|b_n| < \infty, \quad \forall\, b \in H[\mu].$$

Ahora bien, $e^{-\lambda_n \mu'} \in H[\mu]$, $\forall\, \mu' > \mu \Rightarrow \sum_0^\infty |u_n|\, e^{-\lambda_n \mu'} < \infty$, $\forall\, \mu' > \mu$.

Recíprocamente $a \in H(\mu) \Rightarrow \sum_0^\infty |a_n|\, e^{-\lambda_n \mu'} < \infty$, $\forall\, \mu' > \mu$.

Sea $b \in H[\mu] \Rightarrow \exists\, \mu' > \mu$ y un $n_0 \in N \mid |b_n| \leq$

$$\leq e^{-\lambda_n \mu'}, \ \forall\, n \geq n_0 \Rightarrow \sum_0^\infty |a_n|\,|b_n| < \infty \Rightarrow a \in H[\mu]^x.$$

PROPOSICION II-4

Supongamos $\lim\inf \dfrac{\lambda_n}{n} > 0$ (finito o no), $H(\mu)^x = H[\mu]$.

Demostración

Sabemos por la proposición anterior que $H(\mu)^x = H[\mu]$

Demostremos que $H(\mu)^x \subset H[\mu)$.

Sea $u \in H(\mu)^x \Rightarrow \sum_0^\infty |u_n|\,|a_n| < \infty$, siempre que

$$\sum_0^\infty |a_n|\, e^{-\lambda_n \mu'} > \infty, \quad \forall\, \mu' > \mu$$

Tenemos que ver que $u \in H[\mu]$, es decir,

$$\exists\, \mu' > \mu,\ n_0 \in N \mid |u_n| \leq e^{-\lambda_n \mu'}, \quad \forall\, n \geq n_0$$

Supongamos que no se cumpliese esta condición.

Tomemos, entonces, una sucesión $\mu_0, \mu_1 \dots \mu_n \dots$ decreciente y convergente a μ.

Para cada μ_i, $i = 0, 1, \dots n \dots$, existen infinitos términos u_n tal que $|u_n| \geq e^{-\lambda_n \mu_i} \to$ podemos formar una subsucesión (u_{n_i}) de (u_n) tal que

$$e^{-\lambda_{n_i}\mu_i} < |u_{n_i}|, \quad i = 0, 1, 2 \dots$$

Tendremos $\sum_0^\infty e^{-\lambda_{n_i}\mu_i} |a_{n_i}| < \infty$, $\forall\, a \in H(\mu)$ ya que $u \in H(\mu)^x$.

Tomemos una sucesión de la forma

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \notin \{n_i\} \\ e^{\lambda_{n_i}\mu_i}, & n \in \{n_i\} \end{cases}$$

Esta sucesión pertenece a $H(\mu)$, pues

$$\lim\sup\, (e^{\lambda_{n_i}\mu_i})^{\frac{1}{\lambda_{n_i}}} = e^{\mu}$$

En efecto: $\Sigma\, |a_n|\, e^{-\lambda_n \mu'} < \infty$, $\forall\, \mu' > \mu$.

Veamos que:

Dado un $\mu' < \mu$, siempre $\exists\, \mu'' \;/\; \mu < \mu'' < \mu$ y tenemos

$$|a_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} \leq e^{\mu''},\ \forall\, n \geq n_0 \Rightarrow \sum_0^\infty |a_n|\, e^{-\lambda_n \mu'} < \infty.$$

Por consiguiente, $\sum_1^\infty e^{\lambda_{n_i}\mu_i} |a_{n_i}| < \infty$, ya que $a \in H(\mu)$, pero $\sum_0^\infty e^{-\lambda_{n_i}\mu_i} |a_{n_i}| = \infty$ y tenemos una contradicción.

PROPOSICION II-5

Sea $\mu = -\infty$, $H(-\infty) = H[-\infty]^x$

Demostración

Sea $u \in H[-\infty]^x \Rightarrow \sum_0^\infty |u_n|\, |b_n| < \infty$, $\forall\, b \in H[-\infty] \Rightarrow \sum_0^\infty |u_n|\, e^{-\lambda_n \mu'} < \infty$

$\forall\, \mu' \in R$, ya que $e^{-\lambda_n \mu'} \in H[-\infty]$, $\forall\, \mu' \in R \Rightarrow u \in H(-\infty)$

Reciprocamente

Sea $\quad a \in H(-\infty) \Rightarrow \sum\limits_{0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \infty, \quad \forall \mu' \in R$

Sea $\quad b \in H[-\infty] \Rightarrow \exists\, \mu' \in R$ y un $n_0 \in N \;/\; |b_n| \leq$

$$\leq e^{-\lambda_n \mu'}, \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{0}^{\infty} |a_n|\,|b| < \infty \Rightarrow a \in H[-\infty]^x$$

PROPOSICION II-6

Supongamos $\lim\inf \dfrac{\lambda_n}{n} > 0$ (finito o no). $H(-\infty)^x = H[-\infty]$.

Demostración

Sabemos que $H[-\infty] \subset H(-\infty)^x$.

Demostremos que $H(-\infty)^x \subset H[-\infty]$.

Para ello, veamos que $u \notin H[-\infty] \Rightarrow u \notin H(-\infty)^x$.

Consideremos los números enteros negativos $-1, -2 \ldots$

Como $u \notin H[-\infty]$, tenemos para cada uno de ellos una infinidad de términos $u_n \;/\; |u_n| > e^{-\lambda_n(-i)} \Rightarrow$ podemos elegir una subsucesión (u_{n_i}) de (u_n) / $|u_{n_i}| > e^{\lambda_{n_i} i}$, $i = 1, 2 \ldots$

Tomemos una sucesión definida de la forma siguiente

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \notin \{n_i\} \\ e^{-\lambda_{n_i} i} & n \in \{n_i\} \end{cases}$$

Esta sucesión pertenece a $H(-\infty)$, pues

$$\lim\sup \left(e^{-\lambda_{n_i} i}\right)^{\frac{1}{\lambda_{n_i}}} = 0$$

En efecto:

Veamos que $\quad \sum\limits_{1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \infty, \quad \forall \mu' \in R$

Dado un $\mu' \in R$, tomemos un $\mu'' < \mu'$; como $e^{\mu''} > 0$, tenemos

$$|a_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} \leq e^{\mu''}, \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \infty$$

Por otra parte, $\quad \sum\limits_{0}^{\infty} |u_n|\,|a_n| = \infty \Rightarrow u \notin H(-\infty)^x$

ALGUNAS RELACIONES DE INCLUSION ENTRE LOS ESPACIOS $H(\mu)$ Y $H[\mu]$

PROPOSICION II-7

Supongamos $\liminf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ (finito o no) y $\mu \geq 0$. $H[\mu] \subset H(\mu)$.

Demostración

$$b \in H[\mu] \Rightarrow |b_n| \leq e^{-\lambda_n a} \;/\; a > \mu, \quad n \geq n_0$$

Veamos que $\sum_0^\infty |b_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \infty, \quad \forall \mu' > \mu$

$$\sum_0^\infty |b_n| e^{-\lambda_n \mu'} \leq \sum_0^{n_0} |b_n| e^{-\lambda_n \mu'} + \sum_{n_0+1}^\infty e^{-\lambda_n (a+\mu')}$$

Como

$$a + \mu' < 0$$

tenemos

$$\sum_0^\infty |b_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \infty$$

PROPOSICION II-8

Supongamos $r < 0$, $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n \dots$ cualquier tipo. $H[\mu] \not\subset H(\mu)$.

Demostración

Tomemos $b \in H[\mu] \;/\; b_n = e^{-\lambda_n a}$ siendo $\mu < a < 0$

Veamos que $$\sum_0^\infty |b_n| e^{-\lambda_n \mu'}$$

no converge para todo $\mu' > \mu$

Sea $\mu < \mu' < -a \Rightarrow \sum_0^\infty |b_n| e^{-\lambda_n \mu'} = \sum_0^\infty e^{-\lambda_n (a+\mu')}$

Como $a + \mu' < 0 \Rightarrow \lim e^{-\lambda_n \mu' (a+\mu')} = \infty \Rightarrow b \notin H(\mu)$

PROPOSICION II-9

Supongamos $\lim\inf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ (finito o no). $H[-\mu] \subset H(\mu)$.

Demostración

$$b \in H[-\mu] \Rightarrow |b_n| \leq e^{\lambda_n a} \ / \ a > -\mu, \quad n \geq n_0$$

Veamos que

$$\sum_0^{\infty} |b_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \infty, \quad \forall \mu' > \mu$$

Como $\qquad a + \mu' > 0 \Rightarrow \sum_0^{\infty} |b_n| e^{-\lambda_n \mu'} < \infty$

Observación. Es evidente que

$$H(\mu) \subset H(\mu'), \quad \mu < \mu' \quad \text{y} \quad H[\mu'] \subset H[\mu], \quad \mu' > \mu$$
$$H(-\infty) \subset H(\mu), \quad \mu \in R \quad \text{y} \quad H[\mu] \subset H[-\infty], \quad \mu \in R.$$

CAPITULO III

ESTUDIO DE LAS TOPOLOGIAS EN LOS ESPACIOS DE SUCESIONES DE SERIES DE DIRICHLET

TOPOLOGIAS EN LOS ESPACIOS $H(\mu)$

Supongamos $\lim\inf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ (finito o no).

Entonces, $\langle H[\mu], H(\mu) \rangle$ es un sistema dual de espacios de sucesiones y vamos a considerar las topologías:

1.º) $\Delta_{H(\mu)}$, topología normal sobre $H(\mu)$.

2.º) $\beta_{H(\mu)}$, topología fuerte sobre $H(\mu)$.

3.º) $\theta_{H(\mu)}$, topología de Mackey sobre $H(\mu)$.

Observación I. $H[\mu]$ es un espacio co-escalonado de orden uno.

Proposicion III-1

En $H(\mu)$ se tiene $\Delta_{H(\mu)} = \beta_{H(\mu)} = \theta_{H(\mu)}$ y $H(\mu)$ es un espacio de Fréchet.

Demostración

$H(\mu)$ con la topología $\Delta_{H(\mu)}$ es un espacio de Fréchet y el resultado es inmediato (VII, pág. 419)

Ocservación II. Como $H(\mu)$ es un espacio perfecto, se verifica

$$\Delta_{H(\mu)} = \beta_{H(\mu)} = \theta_{H(\mu)} = \beta^{*}_{H(\mu)}$$

Proposicion III-2

$H(\mu)$ es un espacio de Montel, $\forall\, \mu \in R$

Demostración

Evidentemente

$$a_1 = (e^{-\lambda_n \mu_1}), \ldots a_k = (e^{-\lambda_n \mu_k}) \ldots$$

es un sistema completo, monótono creciente de escalones.

Veamos que $\quad \forall\, k,\ \exists\, N(k) \;/\; \lim \dfrac{a_k^n}{a_{N(k)}^n} = 0$

Tenemos $\quad a_k^n = e^{-\lambda_n \mu_k},\ a_{N(k)}^n = \ldots = e^{\lambda_n \mu_{N(k)}}$

Por lo tanto

$$\frac{a_k^n}{a_{N(k)}^n} = e^{-\lambda_n(\mu_k - \mu_{N(k)})}$$

Para que $\quad e^{-\lambda_n(\mu_k - \mu_{N(k)})} \to 0$ cuando $n \to \infty$

basta que $\mu_{N(k)} < \mu_k$

Pero $\mu_s \ldots \mu_k \ldots$ es una sucesión decreciente $\Rightarrow \forall\, K,\ \exists\, N(K) \;/$ $/\; \mu_{N(k)} < \mu_k$.

Para la demostración de esta proposición hemos utilizado el resultado de un conocido teorema (VII, pág. 422)

Observación III. — $H[\mu]$ es de Montel.

PROPOSICION III-3

$H(-\infty)$ es espacio de Montel.

Demostración

Evidentemente

$$a_1 = (e^{\lambda_n}) \dots a_k = (e^{k\lambda_n}) \dots$$

es un sistema monótono creciente y completo de escalones.

Veamos que

$$\forall\, k,\ \exists\, N(k)\ /\ \lim \frac{a_k^n}{a_{N(k)}^n} = 0$$

Tenemos

$$\frac{a_k^n}{a_{N(k)}^n} = e^{-\lambda_n(N(k)-k)}$$

Para que $e^{-\lambda_n(N(k)-k)} \to 0$ cuando $n \to \infty$ basta que $N(k) > k$.

Observación IV. $H[-\infty]$ es espacio de Montel.

PROPOSICION III-4

$\forall\, p > \mu,\quad \forall\, \varepsilon > 0,$ designemos

$$U(p,\, \varepsilon) = \{a \in H(\mu)\ /\ e^{-\lambda_n p}\, |a_n| \leq \varepsilon,\quad \forall\, n \in N\}$$

La familia de conjuntos $U_{(p,\varepsilon)}$ es base de entornos de cero para una topología $\mathfrak{T}$ de espacio localmente convexo metrizable tal que

$$\mathfrak{T} = \Delta_{H(\mu)} = \beta_{H(\mu)} = \theta_{H(\mu)}$$

Demostración

1.º) $U(p, \varepsilon)$ es absolutamente convexo.

2.º) la familia de conjuntos $U(p, \varepsilon)$ es una base de filtro. Dados $U(p, \varepsilon)$ y $U(p', \varepsilon)$, veamos que existe

$$U(\tilde{p}, \tilde{\varepsilon}) \;/\; U(\tilde{p}, \tilde{\varepsilon}) \subset U(p, \varepsilon) \cap U(p', \varepsilon)$$

En efecto:

Tomemos $\tilde{p} = \min(p, p')$; $\tilde{\varepsilon} = \min(\varepsilon, \varepsilon')$

$$a \in U(\tilde{p}, \tilde{\varepsilon}) \Rightarrow a \in U(p, \varepsilon) \cap U(p', \varepsilon')$$

Tenemos, así, una topología $\mathfrak{T}$ localmente convexa.

3.º) $\mathfrak{T}$ es metrizable.

Tomando $p_n = \dfrac{\lambda_n + 1}{\lambda_n}\mu$ si $\mu \geq 0$, $p_n = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_n + 1}\mu$ si $\mu < 0$, $\varepsilon_n = \dfrac{1}{\lambda_n}$ los $U(p_n, \varepsilon_n)$ forman una base de entornos de cero.

4.º) El dual topológico de $H(\mu)$ respecto a la topología $\mathfrak{T}$ es el α-dual $H[\mu]$.

a) $$H[\mu] \subset [H(\mu), \mathfrak{T}]$$

En efecto:

$$b \in H[\mu] \Rightarrow \exists\, \mu' > \mu, \text{ y un } n_0 \in N \;/\; |b_n| \leq e^{-\lambda_n \mu'}, \quad \forall\, n \geq n_0$$

Sea $\quad a \in H(\mu) \Rightarrow |ba| \leq M\left(\sum\limits_{0}^{n_0} |a_i|\right) + \sum\limits_{n_0+1}^{\infty} e^{-\lambda_n \mu'} |a_n|$

siendo $M =$ *máximo* $|b_i|$, $0 \leq i \leq n_0$

Dado $\delta > 0$, tomemos $\mu < p < \mu'$ y

$$\varepsilon < \textit{mínimo}\left(\frac{\delta}{2M\sum\limits_{0}^{n_0} e^{\lambda_n p}}, \quad \frac{\delta}{2\sum\limits_{n_0+1}^{\infty} e^{-\lambda_n(\mu'-p)}}\right)$$

Tenemos que $\sum\limits_{n_0-1}^{\infty} e^{-\lambda_n(\mu'-p)} < \infty$.

Entonces $\forall\, a \in U(p, \varepsilon)$ tendremos $|ba| < \delta \Rightarrow b \in [H(\mu), \mathfrak{T}]$.

b) $$[H(\mu),\ \mathfrak{T}]' \subset H[\mu]$$

En efecto:

Todo entorno de cero en $\mathfrak{T}$ es entorno de cero en $\Delta_{H(\mu)}$.

Sea $U(p,\ \varepsilon)$ un entorno de cero en $\mathfrak{T}$.

$$U(p,\ \varepsilon) = \{x \in H(\mu)\ /\ e^{-\lambda_n p}\,|x_n| \leq \varepsilon,\quad \forall\, n \in N\}$$

Tomemos $\quad u = (e^{-\lambda_n p}),\quad p > \mu \Rightarrow u \in H[\mu]$

Consideremos el entorno $U(u,\ \varepsilon)$ que es un entorno de cero en la topología $\Delta_{H(\mu)}$ de $H(\mu)$.

$$x \in U(u,\ \varepsilon) \Rightarrow \Sigma\,|u_n x_n| \leq \varepsilon \Rightarrow \Sigma\, e^{-\lambda_n p}\,|x_n| \leq \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-\lambda_n p}\,|x_n| \leq \varepsilon \Rightarrow x \in U(p,\ \varepsilon)$$

Proposicion III-5

$\forall\, p \in R,\ \varepsilon > 0$, designemos

$$U(p,\ \varepsilon) = \{a \in H(-\infty)\ /\ e^{-\lambda_n p}\,|a_n| \leq \varepsilon,\quad \forall\, n \in N\}$$

La familia de conjuntos $U(p,\ \varepsilon)$ es base de entornos de cero para una topología $\mathfrak{T}$ localmente convexa y metrizable en $H(-\infty)$ tal que $\mathfrak{T} = \Delta_{H(-\infty)} = \beta_{H(-\infty)} = \theta_{H(-\infty)}$.

Demostración

Análoga al caso anterior. Los conjuntos $U(p,\ \varepsilon)$ donde $p_n = -\lambda_n^{*}$ y $\varepsilon_n^{*} = \dfrac{1}{\lambda_n^{*}}$ forman una base de entornos de cero.

Topologias en los espacios $H[\mu]$

Supongamos $\lim\inf \dfrac{\lambda_n}{n} > 0$ (finito o no)

Proposicion III-6

En $H[\mu]$ se verifica $\theta_{H[\mu]} = p_{H[\mu]}$.

Demostración

$H[\mu]$ es un espacio de Montel con la topología $\theta_{H[\mu]} = \theta_{H[\mu]} = \beta_{H[\mu]}$.

PROPOSICION III-7

En $H[-\infty]$ se verifica $\theta_{H[\mu]} = \beta_{H[\mu]}$.

Demostración

Análoga a la anterior.

PROPOSICION III-8

$\Lambda_{H[\mu]} = \theta_{H[\mu]}$.

Demostración

Utilizando el resultado de un conocido teorema (XI, pág. 213) basta ver que

$$\forall\, x = (x_n^{*}) \quad \text{y} \quad \forall\, k \in N \;/\; \lim a_k^n x_n^{*} = 0 \Rightarrow \sum_0^\infty |a_k^n x_n^{*}| < \infty, \quad \forall\, K \in N$$

$$\lim a_k^n x = 0 \Rightarrow [\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_k(\varepsilon) \;/\; \forall\, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |e^{-\lambda_n \mu_k} x_n| < \varepsilon]$$

$$|e^{-\lambda_n \mu_k} x_n| < \varepsilon \Rightarrow \frac{|x_n|}{\varepsilon} < e^{-\lambda_n \mu_k}, \quad \forall\, n \geq N_k(\varepsilon)$$

Veamos que $\sum_0^\infty e^{-\lambda_n \mu_k} |x_n| < \infty, \quad \forall\, k \in N.$

Dado un k cualquiera, tomemos un k' tal que $\mu_k > \mu_{k'}$.

Entonces $|x_n| < \varepsilon\, e^{\lambda_n \mu_{k'}}, \quad \forall\, n \geq N_{k'}(\varepsilon) \Rightarrow \sum_0^\infty e^{-\lambda_n \mu_k} |x_n| < \infty$

PROPOSICION III-9

$\Lambda_{H[-\infty]} = \theta_{H[-\infty]}$.

Demostración

Veamos que

$\forall\, x = (x_n^{*})$ y $\forall\, k \in N \;/\; \lim a_k^n x_n = 0 \Rightarrow \sum_0^\infty a_k^n |x_n| < \infty, \quad \forall\, k \in N$

$\lim e^{\lambda_n k} x_n = 0 \Rightarrow [\forall\, \varepsilon < 0,\ \exists\, N_k(\varepsilon) \;/\; \forall\, n \geq N_k(\varepsilon) \Rightarrow |e^{\lambda_n k} x_n^{*}| < \varepsilon]$

Veamos que $\sum_0^\infty e^{\lambda_n k} |x_n^{*}| < \infty, \quad \forall\, k \in N$

Dado un k cualquiera, tomemos un k' tal que $k < k'$ y tendremos

$$\sum_0^\infty e^{\lambda_n k} |x_n| < \infty$$

Capitulo IV

Limite inductivo de los espacios $H(\mu)$

Supongamos $\lim \inf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ (finito o no)

Sea μ un número real. Tomemos todos los espacios $H(\mu)$ tal que $\mu < R$.

Sabemos que el límite inductivo de los espacios $H(\mu)$ tal que $\mu < R$ es igual a $\sum_{\mu<R} H(\mu) = \bigcup_{\mu<R} H(\mu)$

Véase VII, pág. 220.

Proposicion IV-1

El límite inductivo de los espacios $\underset{\mu<R}{H(\mu)}$ es igual a $H[-R]$

Demostración

1.º) $\bigcup H(\mu) \subset H[-R]$.

En efecto:

$a \in \bigcup H(\mu) \Rightarrow \exists\, \mu_1 < R \;/\; a \in H(\mu_1) \Rightarrow \sum_0^\infty |a_n| e^{-\lambda_n \mu''} < \infty, \quad \forall\, \mu' > \mu_1$

Como $\mu_1 < R$, tomemos un p tal que $\mu_1 < p < R$.

Entonces

$$\sum_0^\infty |a_n| e^{-\lambda_n p} < \infty \Rightarrow \sum_0^\infty |a_n| e^{-\lambda_n p} = M \Rightarrow \frac{|a_n|}{M} \leq e^{\lambda_n p}, \quad \forall n \in N$$

Como $p < R \Rightarrow (a_n) \in H[-R]$

2.º) $H[-R] \subset \bigcup H(\mu)$

Sea $a \in H[-R] \Leftarrow \exists\, \mu' > -R$ y un $n_0 \in N \;/\; |a_n| \leq e^{-\lambda_n \mu'}$, $\forall n \geq n_0$

Como $-R < \mu'$, tomemos un número $-x \;/\; -R < -x < \mu' \Rightarrow$ $\Rightarrow x$ es uno de los μ tal que $\mu < R$.

Ahora bien, $|a_n| \leq e^{-\lambda_n \mu'}$, $\forall n \geq n_0$ siendo

$$\mu' > -x \Rightarrow a \in \bigcup H(\mu), \quad \mu < R$$

Topologia del limite inductivo de los espacios $H(\mu)$

Tomemos los espacios $H(\mu)$, $\mu < R$ con la topología normal que sabemos que coincide con la fuerte, la de Mackey, la semifuerte y la topología $\mathfrak{T}$.

Si $\mu_1 < \mu_2$, tenemos $H(\mu_1) \subset H(\mu_2)$.

El límite inductivo topológico de los espacios $H(\mu)$, $\mu < R$ es igual a la envoltura localmente convexa

$$\sum_{\mu} H(\mu)\,(\Delta_{H(\mu)}) = \bigcup_{\mu < R} H(\mu)\,(\Delta_{H(\mu)})$$

siempre que la topología de $H(\mu_1)$ sea más fina que la inducida en él por la topología de $H(\mu_2)$

Proposicion IV-2

La topología normal de $H(\mu_1)$ es más fina que la topología inducida en $H(\mu_1)$ por la topología normal de $H(\mu_2)$.

Demostrativo

Una base de entornos del origen para la topología de $H(\mu_2)$ viene dada por la familia U tal que

$$U = \{x \in H(\mu_2) \ / \ p_u(x) \leq \varepsilon, \ u > 0, \ u \in [H(\mu_2)]^x\}$$

Una base de entornos del origen para la topología inducida en $H(\mu_1)$ viene dada por la familia $U \cap H(\mu_1)$ tal que

$$U \cap H(\mu_1) = \{x \in H(\mu_1) \ / \ p_u(x) \leq \varepsilon, \ u > 0, \ u \in (H(\mu_2))^x\}$$

Una base de entornos del origen para la topología de $H(\mu_1)$ viene dada por la familia U' tal que

$$U' = \{x \in H(\mu_1) \ / \ p_u(x) \leq \varepsilon', \ u > 0, \ u \in H(\mu_1)^x\}$$

$H(\mu_1) \subset H(\mu_2) \Rightarrow H(\mu_2)^x \subset H(\mu_1)^x \Rightarrow$ todo $U \cap H(\mu_1)$ es un U'.

Comparacion de la topologia de $H[-R]$ con la topologia del limite inductivo de los espacios $H(\mu)$, $\mu < R$

Proposicion IV-3

La topología del límite inductivo de los espacios $H(\mu)$, $\mu < R$ es más fina que la topología normal de $H[-R]$.

Demostración

Veamos que todo entorno del origen en la topología normal de $H[-R]$ es entorno del origen en la topología del límite inductivo.

Tenemos que $\bigcup H(\mu) = H[-R] \Rightarrow H(-R) \subset H[\mu]$, $\forall \mu < R$.

Como $H(\mu) \subset H[-R]$, la topología de $H[-R]$ induce en $H(\mu)$, $\forall \mu < R$ una topología a la que vamos a llamar Δ.

Evidentemente, $\Delta_{H(\mu)}$ es más fina que Δ.

Por lo tanto, sea U un entorno del origen en la topología normal de $H[-R] \Rightarrow U \cap H(\mu)$ $(\forall \mu < R)$ es un entorno del origen en la topología inducida en $H(\mu)$ $(\forall \mu < R) \Rightarrow U \cap H(\mu)$ es un entorno del origen en la topología normal de $H(\mu)$ $(\forall \mu < R)$

Por consiguiente, $\Gamma \cup (U \cap H(\mu)) (\forall \mu < R)$ es un entorno del origen en la topología del límite inductivo.

Ahora bien,

$$\cup (u \cap H(\mu)) (\forall \mu < R) = U \cap (\bigcup_{\forall \mu < R} H(\mu))$$

Entonces $$\cup (U \cap H(\mu)) (\mu < R) = U$$

y si U lo tomamos absolutamente convexo, tenemos

$$\Gamma \cup (U \cap H(\mu)) (\forall \mu < R) = U$$

PROPOSICION IV-4

El límite inductivo topológico de los espacios $H(\mu)$ no es estricto.

Demostración

Para que el límite inductivo topológico fuese estricto haría falta que la topología de $H(\mu_2)$ indujera en $H(\mu_1)$ la topología de $H(\mu_1)$.

Esta condición no se cumple.

En efecto:

Sea $U(p, \varepsilon)$ un entorno del origen en la topología de $H(\mu_1)$ tal que $\mu_1 < p \leq \mu_2$.

Queremos ver si existe un $U'(p', \varepsilon')$ tal que $U'(p', \varepsilon' \subset U(p, \varepsilon)$.

Necesariamente $p' > \mu_2 \Rightarrow p' > p$.

Consideremos las siguientes sucesiones

$$x^k = (x_n^k) = \begin{cases} \varepsilon' e^{\lambda_n p'} & n = k \\ \varepsilon' e^{\lambda_n \mu_1} & n \neq k \end{cases}$$

Tenemos que $x^k \in U(p', \varepsilon'), \quad \forall k \in N$.

Para que $x^k \in U(p, \varepsilon)$, $\forall k$ tiene que cumplirse $|x_n^k| \leq \varepsilon e^{\lambda_n p}$, $\forall n \in N$, siendo k cualquier número natural $\Rightarrow$

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \leq e^{-\lambda_n (p' - p)}, \quad \forall n \in N$$

Pero cualquiera que sea el p' que tomemos, se tiene $p' - p > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \nexists U'(p', \varepsilon') \mid U'(p', \varepsilon') \subset U(p, \varepsilon)$.

LIMITE PROYECTIVO DE LOS ESPACIOS $H[\mu]$, $\mu < R$

Considerendo los espacios $H[\mu]$, $\mu < R$ y las aplicaciones canónicas inclusión $I_{\mu_1\mu_2} : H[\mu_2] \to H[\mu_1]$, $\mu_1 < \mu_2$, tenemos que el límite proyectivo de los espacios $H[\mu]$, $\mu < R$ es, evidentemente, igual a $\cap H[\mu]$, $\mu < R$ (VII, pág. 229).

PROPOSICION IV-5

El límite proyectivo de los espacios $H[\mu]$, $\mu < R$ es igual a $H(-R)$.

Demostración

Límite proyectivo de los espacios

$$H[\mu] = \bigcap_{\mu<R} H[\mu] = (H[-R])^x = H(-R)$$

TOPOLOGIA DEL LIMITE PROYECTIVO DE LOS ESPACIOS $H[\mu]$, $\mu < R$

Tomemos todos los espacios $H[\mu]$ con la topología normal que sabemos que coincide con la fuerte y la de Mackey.

Si $\mu_1 < \mu_2$, tenemos $H[\mu_2] \subset H[\mu_1]$

La topología del límite proyectivo de los espacios $H[\mu]$ tiene una base de entorno de cero dada por las intersecciones finitas de $\mathbf{U}_\mu \cap H(-R)$ donde U_μ es un entorno absolutamente convexo del origen en $H[\mu]$, siempre que las aplicaciones $I_{\mu_1\mu_2} : H[\mu_2] \to H[\mu_1]$, $\mu_1 < \mu_2$ sean continuas (VII, pag. 230).

PROPOSICION IV-6

Las aplicaciones $I_{\mu_1\mu_2} : H[\mu_2] \to H[\mu_1]$, $\mu_1 < \mu_2$ son continuas.

Demostración

Si $\mu_1 < \mu_2$, tenemos que $H[\mu_2] \subset H[\mu_1]$.

Si $\Delta_{H[\mu_2]}$ es más fina que la topología inducida en $H[\mu_2]$ por la topología $\Delta_{H[\mu_1]} \Rightarrow$ las aplicaciones son continuas.

Comparemos, pues, la topología $\Delta_{H[\mu_2]}$ y la inducida.

Como $H[\mu_2] \subset H[\mu_1] \Rightarrow H(\mu_1) \subset H(\mu_2) \Rightarrow$ la topología $\Delta_{H[\mu_2]}$ es más fina que la inducida.

Comparacion de la topologia de $H(-R)$ con la topologia del limite proyectivo de los espacios $H[\mu]$, $\mu < R$

Proposicion IV-7

La topología del límite proyectivo de los espacios $H[\mu]$, $\mu < R$ es igual a la topología normal de $H(-R)$

Demostración

1.º) La topología normal de $H(-R)$ es más fina que la topología del límite proyectivo.

Sabemos que $H(-R) \subset H[\mu]$, $\forall \mu < R$

Por lo tanto, la topología normal de $H[\mu]$, $\mu < R$ induce en $H(-R)$ una topología que vamos a llamar Δ.

Evidentemente, $\Delta_{H(-R)}$ es más fina que Δ.

Entonces, sea $(U\mu_1 \cap H(-R)) \cap (U\mu_2 \cap H(-R)) \cap \ldots \cap (U\mu_n \cap \cap H(-R))$ un entorno del origen en la topología del límite proyectivo.

$U\mu_1 \cap H(-R)$ es un entorno del origen en la topología inducida en $H(-R)$ por la topología de $H[\mu_1] \Rightarrow$ es un entorno del origen en la topología de $H(-R)$.

Análogamente $U\mu_2 \cap H(-R) \ldots U\mu_n \cap H(-R)$

2.º) La topología del límite proyectivo es más fina que la normal de $H(-R)$.

Sea U un entorno del origen en la topología normal de $H(-R)$.

Por lo tanto $U = \{x \in H(-R) \ / \ p_u(x) \leq \varepsilon,\ u > 0,\ u \in H[-R)]\}$.

Sabemos que $u \in H[-R] \Rightarrow \exists\, \mu' < R \ / \ u \in H(\mu')$

Tenemos

$$U' = \{x \in H[\mu'] \ / \ p_u(x) \leq \varepsilon, \quad u > 0, \quad u \in H(\mu')\}$$

Se verifica que $U = U' \cap H(-R) \Rightarrow U$ es un entorno del origen en la topología del límite proyectivo.

BIBLIOGRAFÍA

I. BESICOVITCH, A.S., *Almost Periodic Functions*. Cambridge at the University Press. Dover Publications, Inc. 1954.

II. CERDÁ MARTÍN, J.L., *Dualidad de Köthe a funciones analíticas*. Collectanea Mathematica. Volumen XXII, 157-189. Barcelona. 1971.

III. DIEUDONNE, J. *Sur les espaces de Köthe*. J. Analyse Math. 1, 81-115, 1951.

IV. GARLING, D.J.H., *On topological sequence spaces*. Proc. Camb. Phil. Soc. 63, 997-1019. 1967.

V. HARDY, G.H. and RIESZ, MARCEL. *Dirichlet Series*. Stechert-Hafner Service Agency. New York and London. 1964.

VI. KOMURA, T. and KOMURA, Y. *Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations*. J. Math. Soc. Japan. 15, 319-338. 1963.

VII. KÖTHE, G. *Topological Vector Spaces I*. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York. 1969.

VIII. MANDELBROJT, S. *Series adhérentes. Regularisation de suites. Applications*. Gauthiers-Villars. 1952.

IX. PIETSCH, A. *Nuclear Locally Convex Spaces*. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York. 1972.

X. TOEPLITZ, O. *Die linearen vollkommenen Raüme del Funktionentheorie*. Comm. Math. Hal. 23, 222-242. 1949.

XI. TORT PINILLA, M. *Consideraciones sobre la topología normal en los espacios de Köthe*. Actas de las primeras jornadas matemáticas luso-españolas. 203-216. 1973.